

N. BOGOEVICI

---

---

# **ELECTROTEHNICĂ ȘI MĂSURĂRI ELECTRICE**

---

---

Editura didactică și pedagogică  
București — 1979

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. ing. NICOLAE BOGOEVICI

# **ELECTROTEHNICĂ ȘI MĂSURĂRI ELECTRICE**

---

MANUAL PENTRU SUBINGINERI

---



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ  
BUCUREȘTI

**Referent științific : prof. dr. ing. Marius Păda**

**Redactor : ing. Maria Beluri**

**Tehnoredactor : Sanda Dumitrașcu**

**Grafician : Nicolae Sirbu**

## PREFAȚĂ

Ținând seama de cerințele actuale ale pregătirii subinginerilor în specialitățile *Mașini și aparate electrice* și *Electromecanică tehnologică*, am elaborat cursul de **ELECTROTEHNICĂ ȘI MĂSURĂRI ELECTRICE**, care cuprinde lecțiile predate studenților din specialitățile respective de la Institutul de subingineri din Reșița. Conținutul și forma de prezentare a materialului sintetizează rezultatul activității desfășurate în acest sens timp de aproape cinci ani.

Pe fondul unei prezentări teoretice restrânse și accesibile, am urmărit cu atenție sublinierea aspectelor aplicative în diverse domenii a fenomenelor electrice, magnetice și electromagnetice, ținând în același timp seama că disciplinele de *Electrotehnică* și *Măsurări electrice* fac parte din grupa disciplinelor de cultură tehnică generală.

În prima parte, cuprinzând opt capitole, sînt prezentate cunoștințele despre electrostatică, electrocINETICĂ, electrodinamică, circuite și rețele electrice de curent continuu și de curent alternativ, insistîndu-se asupra enunțării, explicării și aplicării legilor și teoremelor (în formă integrală) aferente acestui domeniu.

A doua parte, extinsă pe cinci capitole, cuprinde problemele referitoare la metodele și instrumentele de măsurare a mărimilor electrice și magnetice, incluzînd și instrumentele electronice și numerice, precum și verificarea și etalonarea instrumentelor electrice de măsurare.

Deși se adresează studenților subingineri de la secțiile cu specific electric, lucrarea poate fi folosită și de studenții de la secțiile neelectrice, în scopul aprofundării cunoștințelor despre problemele de bază ale electrotehnicii și măsurărilor electrice.

Țin să aduc pe această cale mulțumiri tov. asist. univ. ing. Iancu Tătucu care m-a ajutat la definitivarea formei de prezentare a părții referitoare la măsurări electrice.

Fînd la prima ediție, anumite părți sau aspecte ale lucrării sînt susceptibile de îmbunătățiri. Voi fi recunoscător tuturor acelor care au de făcut sugestii și observații în acest sens.

AUTORUL



## CUPRINS

<b>Introducere</b> .....	13
<b>1. Obiectul și conținutul cursului</b> .....	13
<b>2. Scurt istoric asupra dezvoltării conceptelor privind fenomenele electrice, magnetice și electromagnetice</b> .....	15
<b>3. Mărimi fizice</b> .....	18
<b>4. Legi și teoreme</b> .....	19
<b>5. Regimurile mărimilor electrice și magnetice</b> .....	20

### Partea I

#### ELECTROSTATICA, ELECTRODINAMICA CIRCUITE ȘI REȚELE ELECTRICE

<b>Capitolul 1. Electrostatica</b> .....	22
<b>1.1. Sarcina electrică</b> .....	22
1.1.1. Existența și natura sarcinilor electrice .....	22
1.1.2. Repartiția sarcinilor electrice .....	23
1.1.3. Dipolul electric .....	24
<b>1.2. Teorema lui Coulomb,</b> .....	25
<b>1.3. Câmpul electric în vid</b> .....	27
1.3.1. Noțiunea de câmp .....	27
1.3.2. Intensitatea câmpului electric în vid .....	28
1.3.3. Inducția electrică în vid .....	29
1.3.4. Liniiile câmpului electric .....	30
1.3.5. Fluxul intensității câmpului electric .....	33
1.3.6. Teorema lui Gauss .....	33
1.3.7. Potențialul electric și tensiunea electrică .....	35
1.3.8. Gradientul potențialului electric .....	37
1.3.9. Teorema potențialului electrostatic .....	38
1.3.10. Linii și suprafețe echipotențiale. Ortogonalitatea dintre liniile de câmp și liniile echipotențiale .....	39
1.3.11. Exemple de calcul a câmpului electric coulombian în vid .....	40
<b>1.4. Câmpul electric în corpuri metalice</b> .....	47
1.4.1. Caracterizarea corpurilor metalice .....	47
1.4.2. Echilibrul electrostatic .....	47
1.4.3. Sarcini electrice libere și legate .....	48

1.5.	Cîmpul electric în medii dielectrice .....	59
1.5.1.	Caracterizarea mediilor (corpurilor) dielectrice .....	50
1.5.2.	Polarizarea dielectricilor în cîmpul electric .....	50
1.5.3.	Intensitatea cîmpului electric în mediul dielectric. Sarcini electrice de polarizare .....	51
1.5.4.	Permitivitatea relativă și absolută .....	53
1.5.5.	Rigiditatea dielectrică .....	53
1.5.6.	Vectorul de polarizare electrică .....	54
1.5.7.	Legea polarizării electrice temporare .....	56
1.6.	Legea legăturii dintre $\bar{D}$ , $\bar{E}$ și $\bar{P}$ .....	56
1.7.	Legea fluxului electric .....	57
1.8.	Condensatoare. Capacitatea electrică a condensatoarelor .....	60
1.8.1.	Capacitatea tubului de cîmp electric .....	61
1.8.2.	Capacitatea electrică a condensatorului plan .....	62
1.8.3.	Capacitatea electrică a condensatorului cilindric .....	63
1.8.4.	Capacitatea electrică a condensatorului sferic .....	64
1.8.5.	Gruparea condensatoarelor .....	65
1.8.6.	Capacitatea unui condensator cu doi dielectrici .....	67
1.8.7.	Verificarea condensatoarelor .....	67
1.8.8.	Condensatoare industriale .....	69
1.9.	Energia electrostatică. Forțe .....	71
1.9.1.	Energia electrostatică .....	71
1.9.2.	Forța de interacțiune dintre plăcile unui condensator electric .....	73
Capitolul 2. <i>Electrocinetica</i> .....		75
2.1.	Caracterizarea stării electrocinetice a mediilor (corpurilor) conductoare .....	75
2.2.	Curentul electric și densitatea de curent .....	76
2.2.1.	Curentul electric de conducție .....	76
2.2.2.	Densitatea curentului electric de conducție .....	77
2.2.3.	Densitatea curentului electric de deplasare .....	78
2.2.4.	Legătura dintre densitatea curentului de conducție și viteza de mișcare a sarcinilor electrice .....	79
2.3.	Legea conservării sarcinilor electrice libere .....	80
2.4.	Legea conducției electrice (Legea lui Ohm) .....	81
2.4.1.	Forma locală .....	81
2.4.2.	Forma integrală .....	82
2.5.	Rezistența electrică. Rezistoare .....	85
2.5.1.	Definirea noțiunii de rezistență electrică .....	85
2.5.2.	Variația rezistenței electrice cu temperatura. Supraconductibilitatea .....	87
2.5.3.	Rezistoare .....	91
2.5.4.	Termistoare .....	93
2.6.	Efectul termic al curentului electric .....	94
2.6.1.	Legea transformării energiei electromagnetice în procesul de conducție (Legea Joule-Lenz) .....	94
2.6.2.	Dimensionarea conductoarelor pe bază de încălzire .....	96
2.6.3.	Aplicațiile efectului termic al curentului electric .....	99
2.7.	Curentul electric în semiconductoare .....	100
2.8.	Curentul electric în vid și în gaze .....	103
2.8.1.	Curentul electric în vid .....	103

2.8.2. Curentul electric în gaze .....	104
2.9. Curentul electric în electroliti .....	106
2.9.1. Conductibilitatea electrolitilor .....	106
2.9.2. Electroliza și aplicațiile industriale .....	107
2.9.3. Legea electrolizei .....	108
2.10. Câmpuri electrice imprimate .....	109
2.11. Elemente galvanice .....	110
2.11.1. Elemente galvanice primare (pile electrice) .....	111
2.11.2. Acumulatori electrice .....	113
2.12. Termoelemente .....	115
<b>Capitolul 3. Rețele electrice de curent continuu</b>	
3.1. Circuit electric și rețea electrică. Sensuri de referință .....	118
3.2. Teoremele lui Kirchhoff .....	121
3.2.1. Teorema I a lui Kirchhoff .....	121
3.2.2. Teorema a II-a a lui Kirchhoff .....	121
3.3. Gruparea rezistoarelor și a surselor de curent continuu .....	122
3.3.1. Gruparea rezistoarelor .....	122
3.3.2. Gruparea surselor de curent continuu .....	123
3.4. Metode de calcul a rețelilor liniare de curent continuu .....	125
3.4.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff .....	126
3.4.2. Metoda superpoziției .....	126
3.4.3. Metoda transfigurării .....	127
3.4.4. Metoda curenților ciclici (ochiurilor independente) .....	129
3.4.5. Metoda potențialelor nodurilor .....	130
3.5. Calculul electric al unei linii de curent continuu .....	132
3.6. Circuite de curent continuu cu elemente neliniare .....	134
3.6.1. Considerațiuni generale. Caracteristici. ....	134
3.6.2. Calculul circuitelor cu elemente neliniare .....	139
<b>Capitolul 4. Electrodinamica</b>	
4.1. Câmpul magnetic .....	141
4.2. Câmpul magnetic staționar în vid .....	142
4.2.1. Inducția magnetică ....	142
4.2.2. Intensitatea câmpului magnetic .....	143
4.2.3. Liniiile câmpului magnetic .....	143
4.3. Teorema lui Biot-Savart-Laplace .....	145
4.4. Fluxul magnetic. Legea fluxului magnetic .....	148
4.4.1. Fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă .....	148
4.4.2. Legea fluxului magnetic .....	149
4.5. Teorema lui Ampère, .....	150
4.6. Câmpul magnetic în corpuri .....	153
4.6.1. Starea de magnetizare a corpurilor .....	153
4.6.2. Polarizarea magnetică .....	154
4.6.3. Legea polarizării magnetice temporare .....	154
4.6.4. Legea legăturii dintre $\vec{B}$ , $\vec{H}$ și $\vec{M}$ .....	155
4.6.5. Permeabilitatea magnetică absolută și relativă.....	155
4.7. Materiale feromagnetice .....	156
4.7.1. Curba de magnetizare .....	156
4.7.2. Fenomenul de histerezis magnetic .....	157
4.7.3. Clasificarea materialelor feromagnetice .....	160

4.8.	Circuite magnetice .....	161
4.8.1.	Rezistența magnetică (reluctanța) .....	162
4.8.2.	Teoremele lui Kirchhoff aplicate la circuitele magnetice .....	164
4.8.3.	Calculul circuitelor magnetice prevăzute cu bobine de excitație .....	165
4.8.4.	Calculul circuitelor magnetice cu magneți permanenți .....	166
4.9.	Înlănțuiri magnetice și inductanțe .....	169
4.9.1.	Înlănțuiri magnetice .....	169
4.9.2.	Inductanțe .....	170
4.9.3.	Legarea în serie a două bobine cuplate magnetic .....	172
4.10.	Energia magnetică .....	173
4.11.	Forțe în câmpul magnetic .....	176
4.11.1.	Elemente din teoria forțelor generalizate în câmpul magnetic .....	177
4.11.2.	Forța ce acționează asupra unui conductor parcurs de curent, așezat în câmpul magnetic (forța magnetoelectrică) .....	179
4.11.3.	Forța dintre două conductoare paralele parcurse de curent (forța electro-dinamică) .....	180
4.11.4.	Electromagneți. Forța portantă .....	181
4.11.5.	Acțiunea câmpului magnetic asupra unei sarcini electrice în mișcare (forța Lorentz) .....	182
4.11.6.	Acceleratoare de particule .....	184
4.12.	Legea circuitului magnetic .....	185
4.13.	Legea inducției electromagnetice .....	188
4.14.	Curenți turbionari .....	193
4.15.	Energia și puterea electromagnetică .....	194
Capitolul 5. <i>Circuite monofazate în regim permanent sinusoidal</i>		
5.1.	Noțiuni asupra mărimilor cu variație periodică în timp .....	196
5.1.1.	Mărimi periodice, alternative și sinusoidale. Faza și defazajul .....	196
5.1.2.	Producerea unei tensiuni electromotoare sinusoidale .....	198
5.1.3.	Valori efective și medii ale curenților și tensiunilor sinusoidale .....	199
5.1.4.	Reprezentarea mărimilor sinusoidale .....	201
5.2.	Elemente ideale de circuit în regim permanent sinusoidal .....	204
5.2.1.	Rezistorul ideal .....	204
5.2.2.	Bobina ideală .....	205
5.2.3.	Condensatorul ideal .....	206
5.3.	Circuit RLC serie în regim permanent sinusoidal. Impedanța și admitanța ....	207
5.4.	Circuit cu RLC în paralel în regim permanent sinusoidal .....	210
5.5.	Circuite cu impedanțe în serie în paralel și mixt .....	212
5.5.1.	Impedanțe în serie .....	212
5.5.2.	Impedanțe în paralel .....	214
5.5.3.	Impedanțe în conectare mixtă (serie și paralel) .....	216
5.6.	Circuite cuplate magnetic .....	217
5.7.	Circuite electrice în regim de rezonanță .....	221
5.7.1.	Circuit cu rezonanță simplă de tensiune .....	221
5.7.2.	Circuit cu rezonanță simplă de curent .....	223
5.7.3.	Rezonanța la circuitele electrice complexe .....	225
5.7.4.	Ferorezonanța .....	225
5.8.	Puterea la circuitele monofazate în regim sinusoidal .....	227
5.8.1.	Puterea activă .....	227
5.8.2.	Puterea reactivă .....	228

5.8.3. Puterea aparentă .....	229
5.8.4. Reprezentarea în complex a puterilor .....	230
5.9. Factorul de putere și importanța sa tehnico-economică .....	230

#### Capitolul 6. Rețele electrice trifazate în regim permanent sinusoidal

6.1. Noțiuni generale .....	234
6.1.1. Rețea trifazată. Sistem trifazat de tensiuni și de curenți .....	234
6.1.2. Conexiunea fazelor .....	236
6.2. Tensiunile și curenții la conexiunile în stea și în triunghi a fazelor .....	238
6.2.1. Tensiunile și curenții la conexiunea în stea .....	238
6.2.2. Tensiunile și curenții la conexiunea în triunghi .....	241
6.3. Puterea la rețelele trifazate .....	242
6.3.1. Puterea la rețelele trifazate cu conexiune în stea .....	242
6.3.2. Puterea la rețelele trifazate cu conexiune în triunghi .....	245
6.4. Factorul de putere la rețelele trifazate .....	247
6.5. Calculul rețelor trifazate .....	249
6.5.1. Considerațiuni generale asupra metodelor de calcul a rețelor electrice ....	249
6.5.2. Calculul rețelor trifazate cu conexiune în stea .....	250
6.5.3. Calculul rețelor trifazate cu conexiune în triunghi .....	250
6.5.4. Problema transfigurării .....	257
6.5.5. Metoda generatorului echivalent de tensiune .....	259
6.5.6. Metoda componentelor simetrice .....	261

#### Capitolul 7. Circuite electrice în regim tranzitoriu

7.1. Definirea regimului tranzitoriu .....	264
7.2. Metodica de studiu a regimurilor tranzitorii .....	265
7.2.1. Ecuația integro-diferențială .....	265
7.2.2. Condiții inițiale .....	266
7.2.3. Natura rădăcinilor ecuației caracteristice .....	268

#### Capitolul 8. Circuite electrice în regim nesinusoidal

8.1. Descompunerea în armonici a mărimilor periodice nesinusoidale .....	274
8.1.1. Metoda analitică .....	275
8.1.2. Metoda grafică Thomson-Runge .....	277
8.2. Valori efective în regim nesinusoidal .....	279
8.3. Puterea activă, reactivă, aparentă și deformantă în regim nesinusoidal .....	281
8.4. Calculul circuitelor electrice liniare în regim nesinusoidal .....	282
8.5. Filtre electrice .....	284

### Partea II

## MĂSURĂRI ELECTRICE

#### Capitolul 9. Măsurări electrice

9.1. Considerațiuni generale asupra măsurărilor și instrumentelor electrice de măsurare	288
9.1.1. Măsurarea mărimilor fizice.....	288
9.1.2. Erori de măsurare .....	289
9.1.3. Părți constructive comune ale instrumentelor electrice .....	291
9.1.4. Mișcarea sistemului mobil .....	292
9.1.5. Clasificarea instrumentelor electrice de măsurare .....	293
9.1.6. Date caracteristice și simboluri ale instrumentelor electrice de măsurare ..	293

9.2.	Construcția și funcționarea instrumentelor electrice de măsurare .....	296
9.2.1.	Instrumente magnetoelectrice .....	296
9.2.2.	Instrumente electromagnetice .....	298
9.2.3.	Instrumente electrodinamice .....	299
9.2.4.	Instrumente de inducție .....	301
9.2.5.	Galvanometre .....	305
9.2.6.	Logometre .....	306
9.2.7.	Punți de măsurare .....	307
9.3.	Măsurarea curentului electric .....	307
9.3.1.	Ampermetre .....	307
9.3.2.	Extinderea domeniului de măsurare al ampermetrelor .....	308
9.3.3.	Folosirea transformatoarelor de curent .....	309
9.4.	Măsurarea tensiunii electrice .....	312
9.4.1.	Voltmetre .....	312
9.4.2.	Extinderea domeniului de măsurare al voltmetrelor .....	313
9.4.3.	Folosirea transformatoarelor de tensiune .....	313
9.4.4.	Măsurarea tensiunilor electromotoare .....	314
9.5.	Măsurarea curenților și tensiunilor de valori mici cu galvanometre .....	315
9.6.	Măsurarea rezistențelor electrice .....	317
9.6.1.	Metoda volt-ampermetrică .....	317
9.6.2.	Metoda punții industriale (Wheatstone) .....	320
9.6.3.	Măsurarea rezistențelor mici cu puntea dublă (Thomson) .....	321
9.6.4.	Măsurarea rezistențelor cu ajutorul ohmmetrelor .....	322
9.6.5.	Rezistențele de izolație și măsurarea lor .....	325
9.6.6.	Prizele de pământ .....	328
9.6.7.	Măsurarea rezistenței electrice a prizelor de pământ .....	330
9.7.	Determinarea locului defectelor în cabluri și linii aeriene .....	332
9.8.	Măsurarea inductanțelor și capacităților electrice .....	336
9.8.1.	Măsurarea inductanțelor proprii ale bobinelor și capacități condensatoarelor .....	336
9.8.2.	Măsurarea inductanțelor mutuale .....	340
9.8.3.	Puntea Schering .....	341
9.8.4.	Faradmetrul .....	341
9.9.	Măsurarea puterii electrice .....	342
9.9.1.	Măsurarea puterii în curent continuu .....	343
9.9.2.	Măsurarea puterii active la circuite monofazate .....	343
9.9.3.	Măsurarea puterii reactive la circuite monofazate .....	344
9.9.4.	Măsurarea puterii active la circuite trifazate .....	345
9.9.5.	Măsurarea puterii reactive la circuite trifazate .....	348
9.9.6.	Măsurarea puterii la circuite de curent alternativ folosind transformatoarele de măsurare .....	349
9.10.	Măsurarea energiei electrice .....	350
9.10.1.	Măsurarea energiei electrice în curent continuu .....	351
9.10.2.	Măsurarea energiei active la circuite monofazate .....	352
9.10.3.	Măsurarea energiei reactive la circuite monofazate .....	352
9.10.4.	Măsurarea energiei active și a energiei reactive la circuite trifazate ....	353
9.11.	Măsurarea factorului de putere .....	354
9.12.	Măsurarea frecvenței .....	356
9.13.	Q-metrul .....	359



## Capitolul 10. Măsurări magnetice

10.1. Măsurarea inducției magnetice și a fluxului magnetic .....	360
10.1.1. Măsurarea inducției magnetice cu sonda Hall. Teslametrul Hall .....	360
10.1.2. Măsurarea inducției magnetice pe baza efectului Gauss.....	362
10.1.3. Măsurarea inducției magnetice pe baza fenomenului de inducție electro- magnetică .....	362
10.1.4. Fluxmetrul .....	364
10.2. Măsurarea intensității cîmpului magnetic .....	367
10.2.1. Măsurarea intensității cîmpului magnetic pe baza legii circuitului mag- netic .....	367
10.2.2. Metoda magnetometrică .....	367
10.3. Măsurarea caracteristicilor magnetice a materialelor feromagnetice .....	368
10.3.1. Determinarea ciclului de histerezis cu ajutorul osciloscopului .....	368
10.3.2. Determinarea curbei de magnetizare cu ajutorul permeametrului (Per- meametrul Ilievici) .....	369
10.3.3. Ferometrul .....	371
10.3.4. Măsurarea pierderilor în fier cu aparatul Epstein. ....	375

## Capitolul 11. Instrumente de măsurare electronice și înregistratoare.

11.1. Osciloscopul electronic .....	379
11.2. Voltmetre electronice.....	381
11.2.1. Voltmetre cu tuburi electronice .....	382
11.2.2. Voltmetre cu tranzistoare .....	385
11.3. Frecvențmetre electronice .....	386
11.4. Fazmetre electronice .....	387
11.5. Tahometre electronice .....	388
11.6. Instrumente înregistratoare .....	388
11.6.1. Ampermetre, voltmetre, wattmetre înregistratoare .....	389
11.6.2. Oscilografii electromecanice .....	389
11.6.3. Înregistratorul în coordonate X—Y .....	390
11.7. Surse de alimentare stabilizate .....	391
11.8. Determinarea caracteristicilor și măsurarea parametrilor tranzistoarelor .....	394
11.9. Unele considerații asupra măsurărilor la circuite integrate .....	396

## Capitolul 12. Măsurări și instrumente numerice

12.1. Principiul de funcționare al instrumentelor numerice .....	398
12.2. Voltmetrul numeric .....	399
12.3. Măsurarea numerică a curentului electric .....	400
12.4. Măsurarea numerică a defazajului și factorului de putere .....	402
12.5. Măsurarea numerică a puterii .....	402
12.6. Numărătoare electronice .....	403
12.6.1. Numărătoare binare.....	403
12.6.2. Numărătoare zecimale .....	405
12.7. Frecvențmetrul numeric .....	406

### **Capitolul 13. Verificarea și etalonarea instrumentelor electrice de măsurare**

<b>13.1. Considerațiuni generale</b>	<b>407</b>
<b>13.2. Compensatoare de măsurare</b>	<b>407</b>
13.2.1. Principiul de funcționare	407
13.2.2. Compensatoare de curent continuu	408
13.2.3. Compensatoare de curent alternativ	409
<b>13.3. Verificarea ampermetrelor și voltmetrelor</b>	<b>410</b>
<b>13.4. Verificarea contoarelor de energie electrică</b>	<b>412</b>
<i>Bibliografie</i>	<b>416</b>
<b>ANEXA I</b>	<b>417</b>
<b>ANEXA II</b>	<b>419</b>

# INTRODUCERE

## 1. OBIECTUL ȘI CONȚINUTUL CURSULUI

*Electrotehnica* ca disciplină științifică se ocupă cu studiul stărilor și fenomenelor electrice, magnetice și electromagnetice, iar ca disciplină tehnică, cu studiul aplicațiilor practice ale acestor stări și fenomene.

Pentru a sublinia importanța însușirii cunoștințelor din domeniul electronicii, este necesar să se arate că forma de energie cea mai utilizată în diferite domenii este energia electromagnetică (în limbajul tehnic — energia electrică).

Energia electrică prezintă o serie de avantaje în comparație cu alte forme de energie și anume :

- producerea energiei electrice în centrale electrice are loc în condiții economice avantajoase ;

- energia electrică poate fi transmisă la distanțe mari prin intermediul câmpului electromagnetic, fie direct prin mediul înconjurător, fie dirijat prin linii electrice ;

- la locul de consum, energia electrică poate fi transformată în condiții economice în alte forme de energie ;

- energia electrică poate fi divizată și utilizată în părți oricât de mici, după necesități.

Dezavantajul pe care îl prezintă energia electrică în comparație cu alte forme ale energiei constă în aceea că nu poate fi înmagazinată. Energia electrică trebuie produsă în momentul când este cerută de consumatori.

*Centralele electrice* producătoare de energie sînt de mai multe tipuri : termoelectrice, hidroelectrice, atomoelectrice etc. În condițiile actuale de dezvoltare ale tehnicii, centralele producătoare de energie electrică constituie unități puternice, cu puteri de ordinul a sute și mii de megawatt, încadrate în sisteme energetice unice, naționale sau internaționale, permițînd valorificarea avantajoasă a resurselor energetice naturale.

*Centralele termoelectrice*, amplasate în apropierea resurselor naturale de combustibili solizi și fluizi, permit utilizarea rațională a acestora, mai ales a celor inferiori, care nu pot fi utilizați cu același randament în alte scopuri, economisindu-se totodată costul transportului lor. De asemenea, centralele termoelectrice amplasate în centre industriale permit realizarea în condiții economice a instalațiilor de termoficare atât a unităților de producție, cît și a clădirilor de locuit.

*Centralele hidroelectrice* folosesc energia inepuizabilă a căderilor de apă și permit amenajarea hidrotehnică și de navigație a cursurilor de apă.

*Centralele atomoelectrice* constituie unul din mijloacele eficiente de folosire în scopuri pașnice a imensei energii conținute de atomul material. Întrucât sursele de combustibili fosili (cărbune și țiței) ale pământului sînt epuizabile, energia atomică va fi cea careia îi revine rolul de a asigura, în cea mai mare parte, consumul de energie al omenirii în viitor.

În prezent, în toate sectoarele de activitate se folosește, în cele mai diverse moduri, energia electrică. Motoarele electrice de acționare a diferitelor utilaje, mașini și mijloace de transport transformă energia electrică în energie mecanică, lămpile electrice o transformă în energie luminoasă, cuptoarele electrice o transformă în energie termică (căldură) pentru topit, încălzit sau uscat etc. Dacă se consideră și utilizarea energiei electrice în telecomunicații, în automatizări, în aparatele electrocasnice etc., rezultă domeniul foarte vast în care această formă de energie își găsește utilizare.

Politica marxist-leninistă a Partidului Comunist Român, bazată pe o profundă cunoaștere a necesităților economiei naționale, a considerat întotdeauna electrificarea țării ca una din pîrghiile principale ale construcției socialiste. Aplicarea acestei politici a fost concretizată în planul pe 10 ani de electrificare a țării (1951—1960), în planul șesenal (1960—1965), în directivele Congresului al IX-lea al P.C.R. cu privire la valorificarea resurselor energetice și electrificarea țării în perioada 1966—1975, în directivele Congresului al X-lea al P.C.R. cu privire la dezvoltarea resurselor energetice și a electrificării în perioada 1971—1980 și în directivele congresului al XI-lea al P.C.R., referitoare la creșterea producției de energie electrică și dezvoltarea industriei electrotehnicii și electronicii.

Producția de energie electrică, crescînd într-un ritm mai ridicat decît producția industrială în ansamblu, va ajunge în Republica Socialistă România în 1980 la 75—80 miliarde kWh, cu o creștere de 33—42% față de 1975. Consumul de energie electrică pe locuitor va crește de la 2 400—2 500 kWh în 1975 la 3 000—3 400 kWh în 1980. Puterea instalată în centralele electrice va fi mărită în perioada 1976—1980 cu 5 400—5 700 MW, din care circa 1 700 MW în centrale hidroelectrice și circa 3 200 MW în centrale termoelectrice pe bază de cărbuni. Vor fi construite noi centrale hidroelectrice pe Dunăre, Lotru, Argeș, Olt, Someș, Sebeș, Siret și Rîul Mare.

Industria electrotehnică și electronică va deține în 1980 peste 20% din totalul construcțiilor de mașini.

Scopul cursului în electrotehnică și măsurări electrice îl constituie studiul calitativ și cantitativ al stărilor și fenomenelor electrice, magnetice și electromagnetice, cu ajutorul mărimilor fizice, legilor și teoremelor aferente, insistîndu-se în mod deosebit asupra aplicațiilor concrete ale acestor stări și fenomene.

Conținutul cursului este împărțit în două părți. În partea I-a se prezintă problemele de bază ale electromagnetismului, insistîndu-se mai mult asupra analizei și calculului circuitelor electrice, iar în partea a II-a se prezintă problemele referitoare la măsurările electrice și electronice.

Înșușirea cunoștințelor din prezentul curs de către studenți constituie piatra unghiulară a succesului în pregătirea profesională pentru obținerea calificării superioare. De la început trebuie subliniată dificultatea legată de faptul că cele mai multe dintre manifestările cîmpului electromagnetic — formă a materiei distinctă de substanță — nu sînt sesizabile direct de simțurile omului, ci indirect, prin efectele lor mecanice, termice etc. Legile și teoremele electrotehnicii se exprimă și se dezvoltă cu ajutorul unor noțiuni de matematici superi-

oare, necesitînd cunoaşterea temeinică a algebrei şi analizei vectoriale, a calculului diferenţial şi integral etc. În plus, trebuie remarcat faptul că relaţiile dintre mărimi nu sînt simple formule de reţinut prin memorare ci, prin intermediul lor, se exprimă stări şi fenomene ce trebuie înţelese prin raţionament logic, pe bază de judecată. Toate acestea pretind din partea studenţilor un studiu temeinic şi sistematic, efectuat zi de zi.

## 2. SCURT ISTORIC ASUPRA DEZVOLTĂRII CONCEPTELOR PRIVIND FENOMENELE ELECTRICE, MAGNETICE ŞI ELECTROMAGNETICE

Deşi unele stări şi fenomene electrice şi magnetice au fost cunoscute din cele mai vechi timpuri, explicaţia lor ştiinţifică a fost dată abia în ultimii o sută de ani, după descoperirea unor fenomene de natură electromagnetică. Fără o astfel de explicaţie ştiinţifică nu s-ar fi putut ajunge azi la aplicaţiile tehnice deosebit de valoroase ale acestor fenomene.

Pînă în prezent se cunosc cinci faze mai importante prin care, din punct de vedere istoric, a trecut acest studiu al fenomenelor electrice şi magnetice, respectiv electromagnetice.

**Teoria acţiunii la distanţă.** În prima etapă, studiul fenomenelor electrice şi magnetice a fost foarte mult influenţat de teoria fenomenelor mecanice, ale cărei baze au fost puse de *Newton* (mecanica clasică). Dintre legile stabilite de *Newton*, după care evoluează fenomenele mecanice, legea atracţiei universale (formulată în 1687) a influenţat cel mai mult cercetările în domeniul fenomenelor electrice şi magnetice. În 1785, *Coulomb*, pe baza generalizării experienţelor efectuate, stabileşte relaţia după care corpurile punctiforme încărcate cu sarcini electrice, precum şi magneţii punctiformi, interacţionează, forţa fiind invers proporţională cu patratul distanţei dintre corpuri (relaţie identică cu cea pentru forţa de interacţiune dintre masele inerte punctiforme).

Este cunoscut faptul că, în mecanica lui *Newton*, predomină concepţia acţiunilor ponderomotoare la distanţă, considerîndu-se că *forţele şi momentele se transmit instantaneu prin spaţiu*, de la corpul ce acţionează pînă la corpul asupra căruia se exercită acţiunea, *oricare ar fi distanţa dintre corpuri*. Cu alte cuvinte, aceste acţiuni ponderomotoare nu au nevoie de un timp de propagare, *viteza de propagare* a acestora fiind considerată *infinită*. În acelaşi sens a fost interpretată în această etapă şi legea lui *Coulomb*.

Experienţa a arătat însă că acţiunile fizice nu se transmit instantaneu, că nu există acţiuni la distanţă, ceea ce face ca toate concepţiile bazate pe teoria acţiunii la distanţă să fie **greşite**. Concepţia acţiunii la distanţă a condus pe unii fizicieni la concluzia greşită că în spaţiul înconjurător corpurilor încărcate cu sarcini electrice nu se produc procese materiale, că poate deci exista un spaţiu lipsit de materie.

Teoria acţiunii la distanţă nu mai prezintă interes decît sub aspect istoric, ea fiind înlocuită, la timpul său, cu teoria acţiunii din aproape în aproape.

**Teoria acţiunii prin contiguitate (din aproape în aproape).** Conform acestei teorii, se consideră că *acţiunile ponderomotoare electrice şi magnetice se transmit din aproape în aproape, prin spaţiu şi în timp, cu o viteză foarte mare, dar finită*.

Purtătorul acțiunilor electrice și magnetice este câmpul electromagnetic, formă a materiei distinctă de substanța corpurilor și ireductibilă la aceasta, care poate exista atât în corpuri, cât și în afara lor și a cărei existență locală este pusă în evidență cu ajutorul forțelor și momentelor pe care le exercită asupra unor mici corpuri electrizate sau magnetizate. Legea acțiunii ponderomotoare în câmpul electromagnetic se exprimă prin relația :

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1)$$

unde  $\vec{F}$  este forța ce se exercită de câmp asupra unui mic corp încărcat cu sarcina electrică  $Q$  ce se mișcă în câmp cu viteza  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}$  este intensitatea câmpului electric, iar  $\vec{B}$  este inducția magnetică.

În această fază de dezvoltare a teoriei fenomenelor electrice și magnetice, inițiată de *Faraday* și desăvârșită de *Maxwell*, corpurile au fost approximate ca medii continui, motiv pentru care poartă denumirea de *teoria microscopică clasică a electromagnetismului*. Ea mai poartă și denumirea de teoria lui Maxwell când se aplică corpurilor în repaus în raport cu sistemul de referință ales și teoria Maxwell-Hertz, când se aplică corpurilor mobile.

Experiențele ce au fost făcute de oameni de știință au scos însă în evidență unele laturi ale fenomenelor electrice și magnetice care nu pot fi explicate în lumina teoriei macroscopice, pentru că ele sînt strîns legate de structura corpurilor (descărcările electrice în gaze, fenomenele legate de electroliză etc). Asemenea experiențe au dat indicații asupra structurii discontinue a materiei, în opoziție cu concepția de continuitate admisă de teoria macroscopică.

**Teoria microscopică clasică (teoria electronilor).** Această nouă teorie, a cărei baze au fost puse de *Lorentz*, păstrează conceptul de câmp, dar, în același timp, *admite și o structură discontinuă a corpurilor, recunoscîndu-se și caracterul discontinuu al sarcinii electrice*. Cuanta elementară de sarcină electrică negativă este atribuită particulei elementare numită electron :

$$q = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}. \quad (2)$$

În această teorie, electronul ocupă o poziție centrală, determinînd prin mișcarea sa o serie de fenomene electrice și magnetice. În formularea legilor intervine viteza cu care se mișcă particulele elementare încărcate electric.

Pentru că viteza este o mărime ce trebuie dată în raport cu un sistem de referință, a fost necesară introducerea unui singur sistem de referință, numit *sistem de referință inerțial, Lorentzian*. În raport cu acest sistem se definesc mărimile microscopice de stare ale câmpului și corpurilor, precum și legile ce guvernează fenomenele electromagnetice.

Deoarece teoria electronilor se referă la scara microscopică, în legile sale nu intervin constante fizice de material.

Un mare număr de fenomene stabilite experimental și în special o serie de proprietăți electrice și magnetice de material au fost explicate în cadrul teoriei electronilor. Teoria electronilor a explicat în parte și unele fenomene privitoare la electrodinamica corpurilor încărcate electric ce sînt în mișcare, care contraziceau teoria lui Maxwell-Hertz.

**Teoria relativității restrînse (electrodinamica relativistă).** Experiența a arătat că în cazul corpurilor în mișcare, cu viteze relative foarte mari, comparabile cu viteza de propagare a luminii în vid, legile stabilite în teoria clasică



macroscopică și în teoria clasică a electronilor nu sînt valabile cu destulă precizie. Necesitatea de a încadra teoretic și aceste noi experiențe a dus la o nouă teorie, numită electrodinamica relativistă, care se bazează pe legile mecanicii relativiste. În mecanica relativistă, unele mărimi ca lungimea, masa, timpul sînt „relative” și nu „absolute”, cum sînt considerate în mecanica clasică a lui Newton. Ele depind de starea cinematică a sistemului de referință.

De remarcat că *legile acestei teorii sînt valabile în raport cu oricare sistem de referință inerțial.*

**Teoria cuantică.** Experiențele au arătat că nici legile electrodinamicii relativiste nu sînt valabile cu destulă precizie în cazul fenomenelor legate de schimbul de energie și impuls ce au loc între microparticulele ce constituie corpurile materiale, cînd acest schimb se face în cantități extrem de mici (cuante de energie). Pentru a explica și aceste fenomene, se elaborează în prezent electrodinamica cuantică, care folosește conceptele fundamentale ale fizicii cuantice.

În stadiul actual al tehnicii industriale, cunoștințele date de teoria clasică macroscopică, completate în parte cu cunoștințe din teoria electronilor, sînt suficiente pentru a interpreta și înțelege fenomenele electrice, magnetice și electromagnetice, precum și aplicațiile lor tehnice.

În decursul timpului, numeroși oameni de știință au adus contribuții de seamă la dezvoltarea cunoștințelor din domeniul electrotehnicii.

*Lomonosov* și *Franklin* au efectuat în secolul al XVIII-lea studii asupra electricității atmosferice.

*Coulomb* a stabilit în 1785 forțele de interacțiune exercitate între corpuri încărcate cu sarcini electrice.

*Galvani* și *Volta* descoperă la sfîrșitul secolului al XVIII-lea pilele electrice.

*Oersted* descoperă în 1819 forțele exercitate de un conductor străbătut de curent asupra acului magnetic.

*Ampère* studiază cîmpul magnetic produs de un solenoid și explică starea de magnetizare a corpurilor prin curenții moleculari (1820).

*Faraday* descoperă în 1831 fenomenul inducției electromagnetice și introduce conceptul de cîmp.

*Maxwell* elaborează teoria macroscopică a cîmpului electromagnetic, expusă în lucrarea clasică „Tratat despre electricitate și magnetism” (1873).

*Hertz* confirmă experimental existența undelor electromagnetice (1887 — 1889).

*Lebedev* pune în evidență experimental presiunea luminii (1900 — 1910).

La baza teoriei circuitelor electrice stau lucrările lui *Ohm* (1827) și *Kirchhoff* (1845).

Și oameni de știință din țara noastră au adus contribuții importante la studiul teoretic și experimental al electrotehnicii. În acest sens se remarcă lucrările profesorilor D. Hurmuzescu, Șt. Procopiu, Vasilescu Carpen, C. Budeanu, etc.

La Institutul politehnic din Timișoara, sub conducerea profesorului Pl. Andronescu, s-a creat o adevărată școală de studiu a electrotehnicii moderne.

Merite deosebite, recunoscute pe plan internațional, le are școala condusă de acad. R. Răduleț de la Institutul politehnic din București, care a adus contribuții importante la progresul teoriei macroscopice a cîmpului electromagnetic și la studiul parametrilor circuitelor electrice în regim tranzistoriu.

### 3. MĂRIMI FIZICE

Stările și fenomenele fizice, care înglobează și fenomenele electrice și magnetice, se caracterizează și se studiază cu ajutorul mărimilor fizice. Mărimia fizică caracterizează o proprietate a unei stări sau fenomen fizic.

Introducerea unei mărimi fizice implică precizarea unității sale de măsură și indicarea explicită a procedurii univoc și invariant de măsurare.

Procedura de măsurare este o operație experimentală reproductibilă, efectuată în anumite condiții, prin care se asociază fiecărei mărimi fizice o „valoare” sau „măsură”, în raport cu unitatea de măsură a mărimii fizice respective. Valoarea unei mărimi se exprimă cantitativ printr-un număr care arată de câte ori unitatea de măsură aleasă se cuprinde în mărimea dată.

O mărime fizică este complet determinată când se cunosc : unitatea sa de măsură, procedura de măsurare și valoarea sa ca rezultat al măsurării. În acest sens, se precizează că în cadrul cursului de electrotehnică și măsurări electrice se folosesc unitățile de măsură din sistemul de unități MKSA raționalizat, care constituie partea pentru electromagnetism a sistemului de unități internațional (S.I.).

Relațiile dintre mărimile fizice se deosebesc de relațiile dintre mărimile matematice prin aceea că trebuie să fie satisfăcute atât din punct de vedere al valorilor numerice, cât și din punct de vedere al dimensiunilor.

După felul cum mărimile fizice se introduc în fizică, acestea se împart în două categorii : *mărimi derivate*, care se pot defini cu ajutorul altor mărimi presupuse cunoscute, și *mărimi primitive*, care se introduc direct, pe cale experimentală, indicând în concret unitatea de măsură și procedura de măsurare. Într-o teorie a unui domeniu al fizicii, mărimile primitive se aleg în așa fel ca numărul lor să fie minim. Această alegere este relativă în sensul că, într-o anumită formă a teoriei, se pot considera anumite mărimi ca primitive, iar, în altă formă, ele ar putea apare ca derivate. Odată cu progresul științei, numărul mărimilor primitive poate să scadă.

În teoria microscopică a fenomenelor electromagnetice este nevoie de șase mărimi primitive specifice electromagnetismului, pe lângă mărimile primitive specifice altor domenii ale fizicii (exemplu : lungime, masă, timp, temperatură etc.). Dintre aceste șase mărimi, patru caracterizează starea electromagnetică a corpurilor, iar două caracterizează starea câmpului electromagnetic.

*Starea electromagnetică a corpurilor* se caracterizează cu următoarele *mărimi primitive* :

- sarcina electrică,  $q$  ;
- momentul electric,  $\vec{p}$  ;
- intensitatea curentului electric de conducție,  $i$  ;
- momentul magnetic,  $\vec{m}$ .

*Starea locală (punctuală) a câmpului electromagnetic* se caracterizează macroscopic cu ajutorul următoarelor *mărimi vectoriale* :

- intensitatea câmpului electric,  $\vec{E}$  ;
- inducția electrică,  $\vec{D}$  ;
- intensitatea câmpului magnetic,  $\vec{H}$  ;
- inducția magnetică,  $\vec{B}$ ,

din care, ca *mărimi primitive* se poate alege perechea  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ , întrucît între cele două mărimi electrice ( $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ), respectiv cele două mărimi magnetice ( $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ) exista cîte o relație de legătură.

În afară de mărimile primitive menționate mai sus, în teoria fenomenelor electromagnetice se folosesc și mărimi derivate, dintre care menționăm : fluxul electric, tensiunea electrică, fluxul magnetic, capacitatea electrică, rezistența electrică, inductanța etc.

Trebuie atrasă atenția asupra faptului că mărimile fizice reprezintă proprietăți ale materiei care sînt reproductibile experimental și că nu este necesar și nici admisibil să li se asocieze nici o substanță sau fluid străin de sistemul fizic descris prin mărimile considerate. Sarcina electrică, spre exemplu, nu este o substanță specială, ci o mărime de stare a corpurilor, ca și temperatura sau alte mărimi.

*Mărimile fizice pot fi scalare, vectoriale sau tensoriale.* În studiul electrotehnicii este necesar să se facă o distincție clară între mărimile scalare și cele vectoriale, anumite mărimi ca : masa, sarcina electrică, potențialul electric sînt mărimi scalare, iar altele ca : forța, viteza, intensitatea cîmpului sînt mărimi vectoriale. Mărimile scalare se caracterizează prin valoarea lor numerică, iar cele vectoriale au, pe lîngă valoare, o direcție și un sens. O mărime vectorială se exprimă prin produsul dintre valoarea sa (scalară) și *vectorul unitar (versorul)* :

$$\vec{A} = A \vec{u}_A. \quad (3)$$

Se numesc *mărimi fizice fundamentale* cele ale căror unități sînt alese fundamentale — independente de altele — în cadrul unui sistem de unități. Mărimile fizice fundamentale fac parte, de obicei, din grupa mărimilor primitive. Numărul mărimilor fundamentale este mai mic, cel mult egal, cu cel al mărimilor primitive.

#### 4. LEGI ȘI TEOREME

Se numesc *legi*, în fizică, relațiile exprimate între mărimi fizice prin propoziții sau analitic, care descriu sub forma cea mai generală cunoștințele despre fenomenele domeniului la care se referă. Relațiile ce exprimă legile sînt fundamentale experimental și nu pot fi stabilite printr-o deducție logică din alte relații.

Unele relații între mărimile fizice, care se pot deduce prin analiză logică din altele, în ultimă instanță din legi, se numesc *teoreme*.

Există relații care la data enunțării lor au avut rol de legi, ulterior devenind teoreme datorită descoperirii unor legi mai generale, din care relațiile inițiale au putut fi deduse (exemplu : legea lui Coulomb, devenită teoremă).

În electrotehnică, legile se exprimă fie sub formă integrală, fie sub formă diferențială (locală). În cadrul prezentului curs se va folosi forma integrală a legilor.

Studiul fenomenelor electromagnetice, ca de altfel al fenomenelor oricărui domeniu al fizicii, se face în următoarea succesiune :

- se introduc mărimile primitive și principalele mărimi derivate ;
- se expun legile și teoremele aferente acestor fenomene ;
- se verifică practic consecințele legilor, în limitele aproximației dată de teoria adoptată.

## 5. REGIMURILE MĂRIMILOR ELECTRICE ȘI MAGNETICE

În teoria macroscopică fenomenologică, mărimile primitive sau derivate ce intervin în studiul fenomenelor electromagnetice sînt, în general, funcții de spațiu și de timp. După modul de variație în raport cu timpul a acestor mărimi se disting mai multe regimuri. •

*Regimul static* se caracterizează, pe de o parte, prin particularitatea că toate mărimile sînt constante în timp, adică derivatele lor în raport cu timpul sînt nule, iar, pe de altă parte, prin lipsa posibilității de a transforma energia din formele electrică sau magnetică, în alte forme de energie. De asemenea, acest regim se caracterizează prin starea de imobilitate relativă a corpurilor. Există un regim static pentru cîmpul electric, numit *regim electrostatic*, și un regim static pentru cîmpul magnetic, produs de magnetii permanenți, numit *regim magneto-static*.

*Regimul staționar* presupune toate mărimile constante în timp, dar cu posibilitatea transformării energiei cîmpului electric și magnetic în alte forme de energie.

*Regimul cvazistaționar* se caracterizează prin variații suficient de lente ale mărimilor în raport cu timpul, în așa fel încît curentul de deplasare este neglijabil față de curentul de conducție, peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor.

*Regimul nestaționar* corespunde situației în care mărimile electrice și magnetice variază rapid în timp.

Partea I

---

**ELECTROSTATICA**  
**ELECTRODINAMICA**  
**ELECTRODINAMICA**  
**CIRCUITE ȘI REȚELE ELECTRICE**

## Capitolul 1

### ELECTROSTATICA

Electrostatica se ocupă cu studiul stărilor și fenomenelor determinate de prezența sarcinilor electrice constante în timp, situate pe corpuri în stare de repaus în raport cu un sistem de referință. Cu alte cuvinte, electrostatica este partea electrotehnicii care se referă la regimul static al câmpului electromagnetic, caracterizat, pe de o parte, prin particularitatea că *toate mărimile electrice de stare sînt constante în timp* (derivatele lor în raport cu timpul sînt nule) iar *mărimile magnetice sînt nule* și, pe de altă parte, prin *lipsa posibilității de transformare a energiei electrice în alte forme de energie*.

Mărimile fizice primitive necesare și suficiente pentru caracterizarea stării electrice a corpurilor sînt : sarcina electrică  $Q$  și momentul electric  $\bar{p}$ . Mărimile de stare locală (punctuală) ale câmpului electric sînt : intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și inducția electrică  $\vec{D}$ , dintre care numai una este mărime primitivă.

Pe lângă mărimile primitive, se folosesc în cadrul electrostaticii și anumite mărimi derivate ca : densitatea de sarcină electrică, potențialul electric, capacitatea electrică etc.

#### 1.1. SARCINA ELECTRICĂ

##### 1.1.1. EXISTENȚA ȘI NATURA SARCINILOR ELECTRICE

Sarcina electrică este o mărime fizică scalară ce intervine în studiul stării de electrizare a corpurilor.

Starea de electrizare a corpurilor prin încărcarea lor cu sarcini electrice poate fi pusă în evidență prin experiențe simple. Astfel, dacă se freacă o vergea de sticlă sau o bară de ebonită cu o bucată de postav din lînă și apoi se separă cele două corpuri frecate, se constată că între ele, precum și asupra altor copuri ușoare din apropiere, se exercită forțe și cupluri (acțiuni ponderomotoare) care înainte de frecare nu existau. Sistemul format din cele două corpuri frecate se spune că se găsește în *stare de electrizare*, respectiv că, în urma frecării, corpurile s-au încărcat cu sarcini electrice. Vergeaua de sticlă se încarcă cu sarcini electrice pozitive, iar bara de ebonită se încarcă cu sarcini electrice negative.

Experiența arată că, în afară de frecare, corpurile mai pot fi aduse în stare de electrizare și prin alte metode, cum ar fi : prin atingerea (contactul) corpului



neelectrizat de un corp electrizat, prin apropierea corpului neelectrizat de un corp electrizat (influență electrostatică), prin acțiuni electrochimice (pile electrice), prin iradiere cu radiații luminoase sau alte radiații (efect fotoelectric, ionizare etc.), prin încălzirea conductoarelor (emisiune electronică) etc.

Pentru a înțelege trecerea corpurilor în stare de electrizare, respectiv încărcarea lor cu sarcini electrice, este necesar să ne referim la structura atomului material.

Sarcina electrică negativă elementară (cuanta de sarcină electrică) aparține electronului, avînd valoarea :  $q = -1,602 \cdot 10^{-19}$  C. Protonul din nucleu conține sarcina electrică pozitivă elementară, egală ca valoare cu sarcina electronului.

Un corp este încărcat cu sarcini electrice negative atunci cînd are un surplus de electroni și, este încărcat cu sarcini electrice pozitive cînd are un deficit de electroni. Acest surplus sau deficit de electroni se obține prin oricare din mijloacele de electrizare amintite mai sus.

Ionii pozitivi, sau negativi sînt molecule electrizate, care au lipsă un număr de electroni sau care au un surplus de electroni.

În *teoria macroscopică* a fenomenelor electrice și magnetice se admite că *sarcina electrică* a unui corp are *structură continuă*, ceea ce înseamnă că poate obține orice valoare pozitivă sau negativă. În schimb, în *teoria microscopică* (teoria electronilor) se ține seama de *structura discontinuă* a sarcinii electrice, valoarea absolută a acesteia fiind egală cu un multiplu al cuantei de sarcină electrică (sarcina electronului).

Unitatea de măsură a sarcinii electrice, în sistemul de unități MKSA, se numește *coulomb* (simbolul C) și nu depinde de operația de raționalizare a sistemului de unități.

Subliniem faptul că *sarcina electrică este o mărime fizică de stare a corpurilor* și nicidecum un „fluid” care ar putea exista în corpuri sau în afara lor.

### 1.1.2. REPARTIȚIA SARCINILOR ELECTRICE

Repartiția sarcinii electrice în corpuri și pe corpuri se descrie cu ajutorul unei mărimi fizice derivate, denumită densitatea de sarcină electrică. Se deosebesc următoarele densități ale sarcinilor electrice :

*Densitatea de volum* a sarcinilor electrice, corespunzătoare situației cînd sarcinile au o repartiție volumetrică, se definește prin relația :

$$\rho_o = \lim_{\Delta o \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta o} = \frac{dQ}{do} \left[ \frac{C}{m^3} \right], \quad (1-1)$$

unde  $\Delta Q$  este sarcina electrică cuprinsă în volumul  $\Delta o$ .

Cunoscînd densitatea de volum a sarcinii electrice, sarcina conținută de volumul  $O$  al întregului corp este :

$$Q = \int_O \rho_o \, do. \quad (1-2)$$

*Densitatea de suprafață* a sarcinilor electrice se referă la situația cînd sarcinile sînt distribuite pe suprafața corpurilor :

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds} \left[ \frac{C}{m^2} \right], \quad (1-3)$$

unde  $\Delta Q$  este sarcina electrică de pe suprafața  $\Delta s$ .

Sarcina electrică existentă pe toată suprafața  $S$  a corpului este :

$$Q = \int_S \rho_s ds. \quad (1-4)$$

Densitatea de linie a sarcinilor electrice se definește prin relația :

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \left[ \frac{C}{m} \right]. \quad (1-5)$$

Această mărime se folosește atunci când sarcinile electrice sînt repartizate pe corpuri filiforme (fire subțiri). Un corp este filiform atunci când raza  $r_0$  a secțiunii sale transversale este foarte mică (neglijabilă) în raport cu distanța  $r$  de la care se privește corpul (fig. 1-1).

Cantitatea totală de sarcină electrică conținută de un corp filiform de lungime  $l$  este :

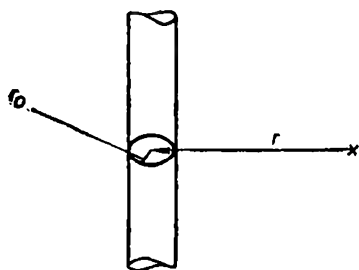


Fig. 1-1. Corp filiform.

$$Q = \int_l \rho_l dl. \quad (1-6)$$

Sarcina electrică poate fi situată și pe corpuri a căror dimensiuni geometrice sînt neglijabile în raport cu distanța ce le separă de alte corpuri, sau în raport cu distanța de la care sînt privite. Astfel

de corpuri se numesc *punctiforme*, iar sarcinile respective se numesc uneori, impropriu, *sarcini electrice punctiforme*.

Dacă într-un domeniu oarecare se găsește un sistem de corpuri încărcate cu sarcini electrice volumetrice, superficiale, lineiforme și punctiforme, sarcina electrică totală din acest domeniu este :

$$Q = \int_V \rho_v dv + \int_S \rho_s ds + \int_l \rho_l dl + \sum_{v=1}^n Q_v, \quad (1-7)$$

unde  $n$  este numărul de corpuri cu sarcini punctiforme. Sarcina electrică totală a unui sistem izolat de corpuri (sistem de corpuri înconjurat de medii izolatoare) este constantă.

Sarcinile electrice pozitive, respectiv negative, se însumează algebric. Un corp este în stare neutră dacă suma algebrică a sarcinilor electrice pe care le posedă este egală cu zero.

### 1.1.3. DIPOLUL ELECTRIC

Prin dipol electric (sau dublet electric) se înțelege sistemul format din două corpuri mici, încărcate cu sarcini electrice punctiforme egale și de semne contrare,  $+Q$  și  $-Q$ , situate la o distanță  $\Delta l$  foarte mică (fig. 1-2). Mărima fizică vectorială care caracterizează dipolul electric este *momentul electric* al dipolului :

$$\vec{p} = Q\Delta\vec{l}, \quad (1-8)$$

unde  $\Delta\vec{l}$  este vector orientat de la sarcina negativă spre sarcina pozitivă.

Sarcinile electrice ale dipolului se numesc sarcini dipolare (duble) și pot apare în volumul unui dielectric sau pe anumite suprafețe de discontinuitate,

aşa cum este cazul suprafeţelor de separaţie dintre electrozi şi electroliţi la elementele galvanice. În acest ultim caz (fig. 1-3), se foloseşte mărimea *densitatea de suprafaţă a momentelor electrice*, definită prin relaţia :

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta S} = \tau \vec{n}, \quad (1-9)$$

unde  $\vec{n}$  este vectorul unitar, normal la suprafaţă, orientat de la sarcinile negative spre cele pozitive.

## 1.2. TEOREMA LUI COULOMB

Folosind balanţa electrică de torsiune şi generalizând datele experienţelor efectuate, Coulomb a stabilit forţa de interacţiune dintre două sarcini electrice punctiforme,  $Q_1$  şi  $Q_2$ , imobile, situate în vid la distanţa  $r$ , care este direct proporţională cu produsul sarcinilor şi invers proporţională cu pătratul distanţei :

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}, \quad (1-10)$$

factorul de proporţionalitate fiind  $\frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$ , unde  $\epsilon_0$  este *constanta dielectrică* (permitivitatea) vidului, o constantă fizică cu dimensiuni, a cărei valoare depinde de sistemul de unităţi folosit. În sistemul de unităţi MKSA raţionalizat

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi \cdot 9 \cdot 10^9} [\text{F/m}].$$

Experienţele efectuate au arătat că corpurile încărcate cu sarcini electrice de acelaşi semn se resping iar cele încărcate cu sarcini de semne contrarii se atrag.

Forma vectorială de exprimare a teoremei lui Coulomb rezultă din fig. 1-4 :

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{r12}, \quad \vec{F}_{21} = \frac{Q_2 Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{21}^2} \vec{u}_{r21}, \quad (1-11)$$

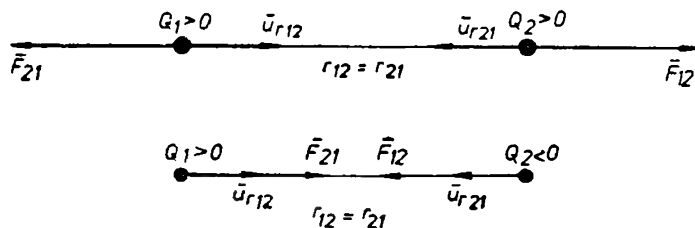


Fig. 1-4. Forţe coulombiene.

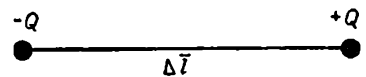


Fig. 1-2. Dipolul electric.

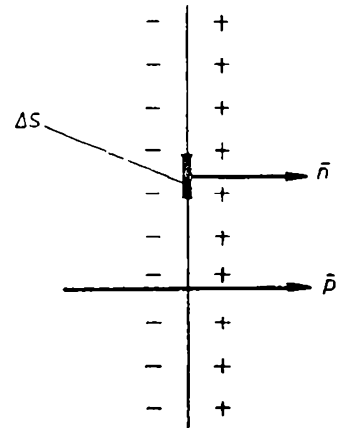


Fig. 1-3. Sarcini electrice duble repartizate pe o suprafaţă.

unde  $\vec{u}_{r12}$  și  $\vec{u}_{r21}$  sînt vectorii unitari (versorii). Avînd în vedere că  $r_{12}=r_{21}$  și că  $\vec{u}_{r12}=-\vec{u}_{r21}$ , rezultă  $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$ , iar ca valoare  $F_{12}=F_{21}$ , ceea ce ne permite să exprimăm cele două forțe din (1-11) printr-o relație vectorială unică :

$$\vec{F} = -\frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \quad (1-12)$$

În cazul cînd interacționează între ele mai mult decît două sarcini electrice punctiforme, situate pe corpuri în vid, pentru a determina cu ajutorul teoremei lui Coulomb forța rezultantă ce acționează asupra unui corp, se aplică *princi-*

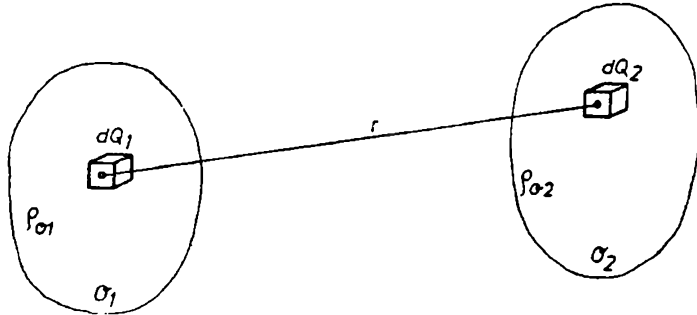


Fig. 1-5. Figură explicativă pentru teorema lui Coulomb generalizată.

*piul superpoziției*, adică se determină forțele dintre toate perechile posibile de sarcini electrice, apoi se însumează geometric (vectorial) forțele ce acționează asupra unui corp.

*Generalizarea teoremei lui Coulomb* pentru sarcini electrice care nu sînt punctiforme, ci repartizate cu densitățile  $\rho_{O1}$  și  $\rho_{O2}$  în corpurile de volum  $O_1$  și  $O_2$  (fig. 1-5) se obține considerînd sarcinile elementare punctiforme  $dQ_1=\rho_{O1}dO_1$ ,  $dQ_2=\rho_{O2}dO_2$  între care se exercită forța

$$d^2\vec{F} = -\frac{dQ_1 dQ_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\frac{\rho_{O1}\rho_{O2} dO_1 dO_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, \quad (1-13)$$

de unde rezultă formula generalizată :

$$\vec{F} = \int_{O_1} \int_{O_2} -\frac{\rho_{O1}\rho_{O2} dO_1 dO_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \quad (1-14)$$

Teorema lui Coulomb prezentată mai sus se încadrează în teoria acțiunii la distanță asupra fenomenelor electrice, care nu presupune existența cîmpului electric în spațiul înconjurător sarcinilor electrice. Azi este unanim acceptată existența cîmpului electric ca o formă obiectivă a materiei, iar acțiunile ponderomotoare se transmit, nu instantaneu, ci prin intermediul cîmpului, din aproape în aproape.

**Aplicația 1-1.** Două sarcini electrice punctiforme și pozitive, de valori egale,  $Q_1=Q_2=4$  C, sînt situate în vid la distanța de 2 m. Să se determine sarcina punctiformă  $Q_3$  ce trebuie așezată la jumătatea distanței dintre sarcinile  $Q_1$  și  $Q_2$ , astfel ca sistemul celor trei sarcini să fie în echilibru (forțele rezultante ce acționează asupra lor să fie nule).

**Rezolvare.** Forța ce acționează asupra sarcinii  $Q_1$  este :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{21}^2} \vec{u}_{r21} + \frac{Q_1 Q_3}{4 \pi \epsilon_0 r_{31}^2} \vec{u}_{r31} = 0,$$

de unde, ținând seama că  $\vec{u}_{r21} = \vec{u}_{r31}$ , rezultă :

$$Q_3 = -\frac{r_{31}}{r_{21}} Q_2 = -2 \text{ C.}$$

Aceeași valoare se obține pentru  $Q_3$  punind condiția ca  $\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = 0$ . De asemenea, în aceste condiții rezultă :  $\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0$

**Aplicația 1-2.** Se suspendă în același punct, cu ajutorul a două fire de mătase inextensibile, de greutate neglijabilă și de lungime  $l=10$  cm fiecare, două corpuri punctiforme de aceeași masă  $m=10^{-3}$  kg, încărcate cu sarcini electrice egale și de același semn,  $Q=1,5 \cdot 10^{-7}$  C. Să se determine unghiul de deviație  $\alpha$  dintre un fir și verticală, corespunzător poziției de echilibru a corpurilor (fig. 1-6).

*Rezolvare.* Asupra fiecărui corp acționează două forțe: forța electrică de respingere dintre sarcini  $\vec{F}_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} \vec{u}_a$  și forța gravitației  $\vec{F}_g = m\vec{g}$ . Corpul este în echilibru dacă forța rezultantă  $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_g$ , are direcția firului de suspensie, cînd este echilibrată de forța  $\vec{T}$  din fir. Din figură rezultă :

$$F_e = F_g \operatorname{tg} \alpha,$$

adică

$$\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha} = mg \operatorname{tg} \alpha,$$

în care s-a înlocuit  $a = l \sin \alpha$ .

Înlocuind valorile numerice date, se obține o ecuație trigonometrică care, rezolvată în raport cu  $\alpha$ , are soluția :  $\alpha = 45^\circ$ .

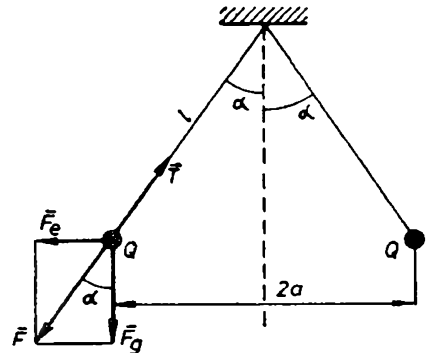


Fig. 1-6. Poziția de echilibru a două corpuri punctiforme suspendate și încărcate cu sarcini electrice egale.

## 1.3. CÎMPUL ELECTRIC ÎN VID

### 1.3.1. NOȚIUNEA DE CÎMP

În sens general, prin noțiunea de cîmp se înțelege o formă obiectivă de existență a materiei în mișcare, deosebită față de forma substanță. În urma studiului efectuat la scară macroscopică și microscopică asupra diverselor stări și fenomene din natură, s-a stabilit existența obiectivă a unor forme de cîmp total deosebite între ele și anume: cîmpul gravitațional, cîmpul electromagnetic, cîmpul unor particule elementare etc. Existența acestor forme de cîmp se pune în evidență prin intermediul acțiunilor ponderomotoare exercitate, în anumite condiții, asupra unor corpuri situate în zona de manifestare a cîmpului.

*Cîmpul electromagnetic* constituie o unitate între cîmpul electric variabil în timp și cîmpul magnetic variabil în timp. Experiența a dovedit că, în cazul stărilor variabile în timp, variația în timp a cîmpului magnetic determină un cîmp electric variabil în timp și, de asemenea, variația în timp a cîmpului elec-

tric determină un câmp magnetic variabil în timp (v. legea inducției electromagnetice).

*Cîmpul electrostatic* este una din stările limită ale cîmpului electromagnetic, determinată de sarcini electrice invariabile în timp, situate pe corpuri în repaus. *Cîmpul magnetostatic* constituie o altă stare limită a cîmpului electromagnetic, determinată de magneți permanenți în repaus.

Studiul unui cîmp de  $\epsilon$  natură sau alta se face cu ajutorul unor mărimi fizice de stare ale cîmpului care, în general, sînt mărimi vectoriale dependente de spațiu și timp. Astfel, starea locală și instantanee a cîmpului electromagnetic este descrisă complet de patru mărimi vectoriale: intensitatea cîmpului electric  $\vec{E}$ , inducția electrică  $\vec{D}$ , intensitatea cîmpului magnetic  $\vec{H}$  și inducția magnetică  $\vec{B}$ . Primele două mărimi  $\vec{E}$  și  $\vec{D}$  descriu cîmpul electromagnetic din punctul de vedere al proprietăților sale electrice, adică cîmpul electric, iar ultimele două mărimi  $\vec{H}$  și  $\vec{B}$  descriu cîmpul electromagnetic din punctul de vedere al proprietăților sale magnetice, adică cîmpul magnetic.

Cîmpul electric și cîmpul magnetic, respectiv cîmpul electromagnetic, pot exista atît în interiorul corpurilor, cît și în exteriorul lor (în vid). Aceste cîmpuri sînt sediul unor forme ale energiei și anume: energia electrică, energia magnetică și energia electromagnetică. Forțele și cuplurile cu care aceste cîmpuri acționează asupra unor corpuri arată posibilitatea transformării energiei conținute de ele în alte forme de energie, prin intermediul lucrului mecanic.

### 1.3.2. INTENSITATEA CÎMPULUI ELECTRIC ÎN VID

Cauzele care produc cîmpul electric în sens larg sînt sarcinile electrice ale corpurilor și cîmpul magnetic variabil în timp. Cîmpul electric produs de sarcinile electrice se mai numește și cîmp electric columbian.

În cele ce urmează, ne referim la cîmpul electrostatic în vid pe care, pentru omogenitatea exprimării, îl numim și cîmp electric în vid.

Mărimea fizică vectorială denumită *intensitatea cîmpului electric în vid*, notată cu  $\vec{E}_0$ , se definește cu ajutorul legii acțiunii ponderomotoare, adică a forței exercitate asupra unui „corp de probă” situat în cîmpul electric.

*Corpul de probă* este un mic corp electrizat, care îndeplinește următoarele calități:

- starea de electrizare a corpului de probă trebuie să fie invariabilă, astfel încît, în condiții exterioare date, forța ce acționează asupra lui să nu se modifice. Aceasta înseamnă o izolare perfectă a corpului de probă față de alte corpuri;

- sarcina electrică  $Q_p$  a corpului de probă trebuie astfel aleasă încît, prin introducerea lui în cîmpul electric, să nu aibă loc o modificare a acestui cîmp;

- dimensiunile corpului de probă trebuie să fie mici (corp punctiform), astfel încît forța ce acționează asupra lui să nu fie rezultanta forțelor din diferite puncte ale corpului, ci forța din centrul său.

Forma adecvată a corpului de probă este o mică sferă metalică sau metalizată, electrizată și suspendată de un fir izolant.

Experiența a dovedit că forța  $\vec{F}$ , ce acționează asupra corpului de probă, este direct proporțională cu sarcina  $Q_p$  a acestui corp. De asemenea, s-a constatat că modificînd poziția corpului de probă în cîmp, forța ce acționează asupra lui se schimbă atît ca valoare, cît și ca orientare, ceea ce înseamnă că această



forță depinde și de o mărime vectorială ce caracterizează starea câmpului electric în punctul respectiv, numită *intensitatea câmpului electric în vid*. Deci :

$$\vec{F} = Q_p \vec{E}_0, \quad (1-15)$$

unde sarcina electrică  $Q_p$  este o mărime scalară pozitivă sau negativă.

Din relația (1-15), cunoscută și sub denumirea de *legea acțiunii ponderomotore în câmpul electric*, rezultă că intensitatea câmpului electric în vid este numeric egală cu forța ce acționează asupra unității de sarcină electrică pozitivă :

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}}{Q_p}. \quad (1-16)$$

Deoarece sarcina electrică  $Q_p$  a corpului de probă trebuie să fie mică, este mai corect ca intensitatea câmpului electric să se definească prin limita raportului dintre forță și sarcină, când sarcina tinde către zero :

$$\vec{E}_0 = \lim_{Q_p \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q_p} = \frac{d\vec{F}}{dQ_p}. \quad (1-17)$$

Unitatea de măsură a intensității câmpului electric în sistemul de unități MKSA se numește volt pe metru [V/m].

Folosind teorema lui Coulomb (relația 1-12) și legea acțiunii ponderomotore în câmpul electrostatic (relația 1-15) se poate stabili relația de calcul a intensității câmpului electric determinat într-un punct din spațiu de o sarcină electrică punctiformă. În acest scop se consideră sarcina punctiformă  $Q$  care produce câmpul (fig. 1-7) și  $Q_p$  sarcina corpului de probă situat în punctul  $P$  din spațiu. Se obține :

$$\vec{F} = \frac{QQ_p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = Q_p \vec{E}_0,$$

de unde rezultă :

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \quad (1-18)$$

Se reține faptul că vectorul de poziție  $\vec{r} = r\vec{u}_r$  este orientat de la sarcina  $Q$  spre punctul  $P$  din spațiu și că valoarea intensității câmpului electric este invers proporțională cu patratul distanței de la sarcină la punct. În punctele de la infinit, intensitatea câmpului electric rezultă egală cu zero.

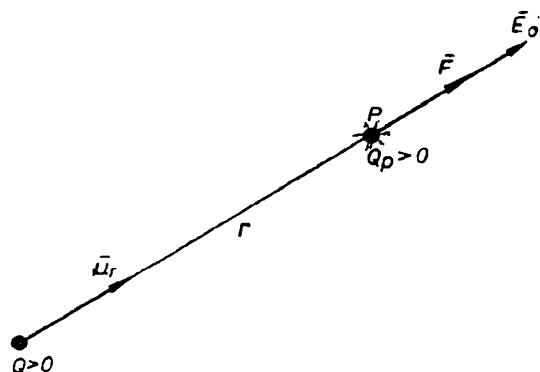


Fig. 1-7. Figură explicativă pentru calculul intensității câmpului electric produs în vid de un corp punctiform încărcat cu sarcină electrică pozitivă.

### 1.3.3. INDUCȚIA ELECTRICĂ ÎN VID

Inducția electrică  $\vec{D}$  este o mărime fizică vectorială care, alături de intensitatea  $\vec{E}$  a câmpului electric, caracterizează starea locală a câmpului electric.

În cazul cînd cîmpul electric are loc în vid, adică într-un spațiu în care nu apare fenomenul de polarizare electrică, inducția electrică se exprimă în funcție de intensitatea cîmpului electric prin relația :

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0, \quad (1-19)$$

unde  $\epsilon_0$  este constanta dielectrică sau permitivitatea vidului.

Unitatea de măsură pentru inducția electrică, în sistemul de unități MKSA, este coulomb pe metru patrat [ $C/m^2$ ], adică aceeași ca și unitatea de măsură pentru densitatea de suprafață a sarcinii electrice.

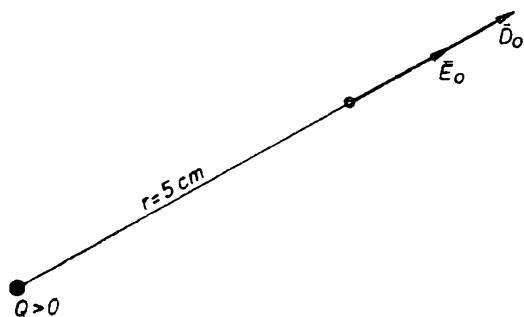


Fig. 1-8. Intensitatea cîmpului electric și inducția electrică în vid produse de un corp punctiform încărcat cu sarcină electrică pozitivă.

**Aplicația 1-3.** Să se determine intensitatea cîmpului electric și inducția electrică produse de sarcina electrică punctiformă  $Q = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  într-un punct  $P$  situat în vid la distanța  $r = 5 \text{ cm}$  de sarcină.

**Rezolvare.** Sarcina electrică care produce cîmpul fiind pozitivă, vectorii  $\vec{E}_0$  și  $\vec{D}_0$  au orientarea de la sarcină spre infinit (fig. 1-8). Folosind relațiile (1-18) și (1-19) se obțin valorile :

$$E_0 = \frac{2,5 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3,14 \cdot \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 5^2 \cdot 10^{-4}} = 9 \cdot 10^4 \text{ V/m},$$

$$D_0 = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 9 \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2.$$

### 1.3.4. LINIILE CÎMPULUI ELECTRIC

Liniile cîmpului electric sînt acele linii fictive din spațiu, drepte sau curbe, la care vectorul intensității cîmpului electric este tangent în orice punct.

Sensul liniilor de cîmp este același cu sensul vectorului intensității cîmpului electric, adică sensul în care se deplasează în cîmp corpul de probă încărcat cu sarcină electrică pozitivă.

În cîmpul electrostatic liniile de cîmp sînt deschise, adică au un început și un sfîrșit ; liniile cîmpului electrostatic încep din punctele unde sînt situate sarcini electrice pozitive și se sfîrșesc în punctele unde sînt situate sarcini electrice negative. Un astfel de cîmp, care are liniile de cîmp deschise, se numește *cîmp potențial*.

Există și cîmpuri cu liniile de cîmp închise, de exemplu cîmpul magnetic din jurul conductoarelor parcurse de curent. Un astfel de cîmp se numește *cîmp solenoidal* ( rotațional).

În vid și în alte medii izotrope (la care constanta dielectrică nu se modifică de la o direcție la alta) vectorul inducției magnetice  $\vec{D}$  este coliniar cu vectorul intensității cîmpului electric  $\vec{E}$ . În acest caz, liniile cîmpului  $\vec{E}$  sînt aceleași cu liniile cîmpului  $\vec{D}$ .

Reprezentînd totalitatea liniilor de cîmp dintr-un plan, se obține *spectrul cîmpului*, care permite formarea unei imagini intuitive asupra cîmpului respectiv. În zonele unde liniile de cîmp sînt mai apropiate între ele, intensitatea cîmpului este de valoare mai mare în raport cu valoarea intensității din zonele unde liniile de cîmp sînt mai îndepărtate.

Liniile cîmpului electric nu se intersectează între ele deoarece ar însemna ca, în punctul de intersecție, să existe două intensități distincte ale cîmpului electric, ceea ce nu ar corespunde realității, intensitatea cîmpului electric fiind univoc determinată în fiecare punct din cîmp.

Spectrele cîmpurilor electrostatice se pot obține experimental cu ajutorul unor cristale mici de gips care, presărate pe o coală de hîrtie ce se scutură încet în cîmp, se distribuie în oarecare măsură după liniile de cîmp.

În fig. 1-9 sînt reprezentate cîteva exemple de spectre ale cîmpului electrostatic.

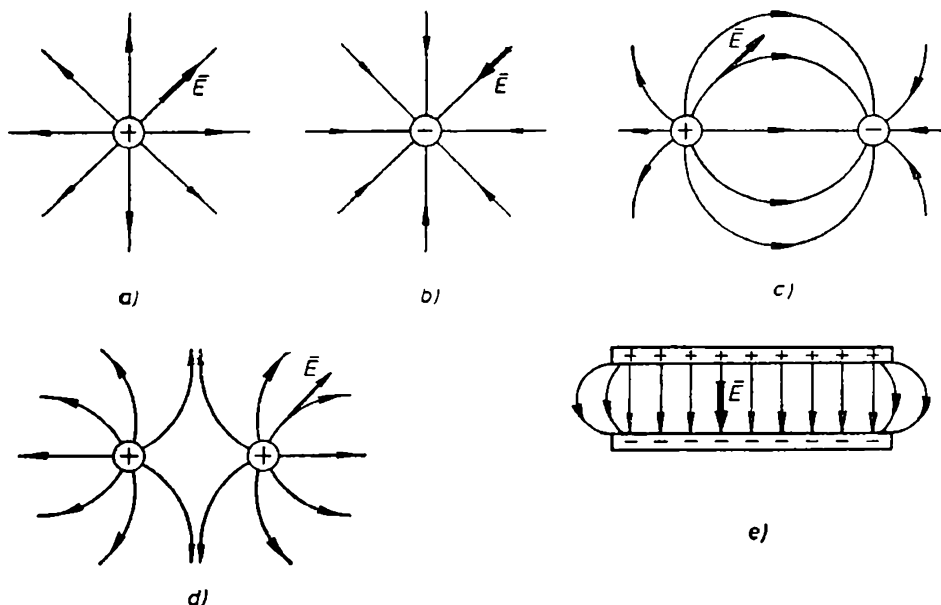


Fig. 1-9. Liniile intensității cîmpului electric :

a și b — corp punctiform încărcat cu sarcină electrică pozitivă, respectiv negativă;  
c — două corpuri punctiforme încărcate cu sarcini electrice de semne opuse; d — două corpuri punctiforme încărcate cu sarcini electrice de același semn (pozitive); e — condensatorul plan.

Dependent de forma liniilor cîmpului electric se disting :

*Cîmpul electric complet* este acel cîmp determinat de sarcini electrice egale ca valoare dar de semne contrarii, situate pe două corpuri, astfel încît toate liniile cîmpului încep de pe corpul cu sarcini electrice pozitive și se sfîrșesc pe corpul cu sarcini electrice negative.

*Cîmpul electric* este *omogen* (uniform) atunci cînd intensitatea sa este aceeași în toate punctele (ca valoare și ca orientare). Liniile cîmpului electric omogen sînt drepte paralele echidistante. Un astfel de cîmp există între armăturile unui condensator plan (fig. 1-9, e), excluzînd părțile marginale. Cîmpurile care nu îndeplinesc această condiție sînt *neomogene* (neuniforme).

*Cîmpul electric* este *plan-paralel* dacă spectrul său este același în diverse planuri paralele, așa cum este, de exemplu, cîmpul determinat de sarcinile

electrice uniform distribuite în lungul unui conductor drept situat în vid (sau aer) la distanță mare de alte corpuri.

*Cîmpul electric este plan-meridian* dacă spectrul său este același în diverse planuri meridiane, așa cum este, de exemplu, cîmpul determinat de sarcinile electrice uniform distribuite pe o sferă situată în vid (sau aer) departe de alte corpuri.

*Tubul de cîmp* este constituit din totalitatea liniilor de cîmp cuprinse în interiorul unei suprafețe ce se sprijină pe un contur închis și are o anumită secțiune transversală  $\Delta S$  (fig. 1-10). Tubul de cîmp este elementar dacă secțiunea sa transversală  $\Delta S$  este atît de mică încît în toate punctele acestei sec-

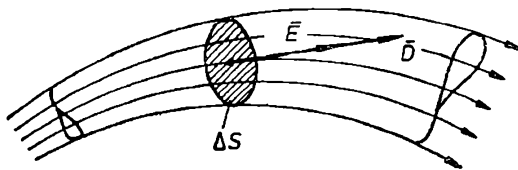


Fig. 1-10. Tubul de cîmp electric.

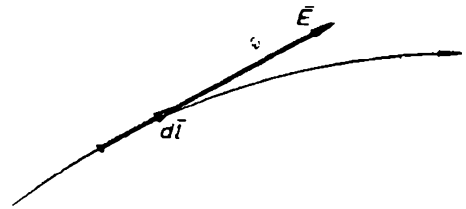


Fig. 1-11. Coliniaritatea între  $\vec{E}$  și  $d\vec{l}$ .

țiuni vectorul intensității cîmpului electric  $\vec{E}$  și vectorul inducției electrice  $\vec{D}$  sînt constanți, adică au aceeași valoare și aceeași orientare.

*Ecuția diferențială a liniilor de cîmp* se obține avînd în vedere că vectorii  $\vec{E}$  și  $d\vec{l}$  sînt coliniari (fig. 1-11), ceea ce înseamnă că produsul lor vectorial este nul :  $\vec{E} \times d\vec{l} = 0$ . În coordonate carteziene avem :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k},$$

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k},$$

$$\vec{E} \times d\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (E_y dz - E_z dy) \vec{i} + (E_z dx - E_x dz) \vec{j} + (E_x dy - E_y dx) \vec{k} = 0.$$

Avînd în vedere că un vector este nul cînd sînt nule componentele sale după cele trei axe, rezultă :

$$E_y dz - E_z dy = 0 ; E_z dx - E_x dz = 0 ; E_x dy - E_y dx = 0, \text{ adică :}$$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (1-20)$$

care reprezintă ecuația diferențială a liniilor cîmpului electric în spațiu (intersecția a două suprafețe).

În plan, ecuația diferențială a liniilor de cîmp este :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}. \quad (1-21)$$

În relațiile de mai sus nu s-a mai pus și indicele zero la vectorul  $\vec{E}$ , deoarece explicațiile prezentate sînt valabile atît pentru cazul cînd cîmpul electric are loc în vid, cît și într-un mediu dielectric izotrop și fără polarizare electrică permanentă.

### 1.3.5. FLUXUL INTENSITĂȚII CÎMPULUI ELECTRIC

Fluxul  $\psi_{E0}$  al vectorului intensității cîmpului electric în vid se definește prin integrala de suprafață a acestui vector :

$$\psi_{E0} = \int_S \vec{E}_0 \, d\vec{s}. \quad (1-22)$$

Acest flux poate fi calculat pentru o suprafață  $S$  deschisă, ce se sprijină pe un contur  $r$  (fig. 1-12, *a*), sau pentru o suprafață închisă  $S_i$  (fig. 1-12, *b*). În ambele cazuri trebuie precizat sensul elementului de suprafață ca vector,  $d\vec{s}$ .

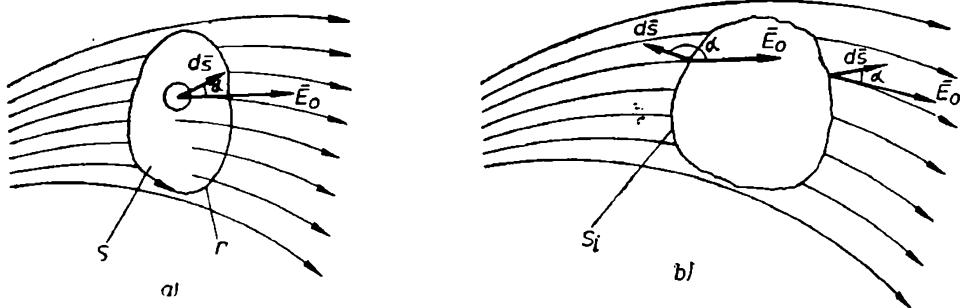


Fig. 1-12. Fluxul intensității cîmpului electric în vid :  
a — prin suprafața deschisă; b — prin suprafața închisă.

Pentru suprafețele deschise, sensul lui  $d\vec{s}$  se stabilește cu regula burghiului drept, în funcție de sensul pozitiv ales arbitrar pe conturul  $\Gamma$ . În cazul suprafețelor închise, sensul lui  $d\vec{s}$  se alege întotdeauna orientat spre exteriorul suprafeței, normal la suprafață.

Unghiul  $\alpha$  dintre vectorii  $\vec{E}_0$  și  $d\vec{s}$  poate fi mai mic sau mai mare decît  $90^\circ$ , conducînd la valori pozitive sau negative ale produsului scalar  $\vec{E}_0 \, d\vec{s}$ , respectiv la valori pozitive sau negative ale fluxului  $\psi_{E0}$ .

### 1.3.6. TEOREMA LUI GAUSS

Teorema lui Gauss se referă la fluxul vectorului intensității cîmpului electric în vid calculat pentru o suprafață închisă (forma integrală a teoremei). Conform acestei teoreme, fluxul lui  $\vec{E}_0$  printr-o suprafață închisă este proporțional cu suma algebrică a sarcinilor electrice existente pe corpuri în interiorul

acestei suprafețe, factorul de proporționalitate fiind  $\frac{1}{\epsilon_0}$ , adică :

$$\int_{S_i} \vec{E}_0 \, d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q. \quad (1-23)$$

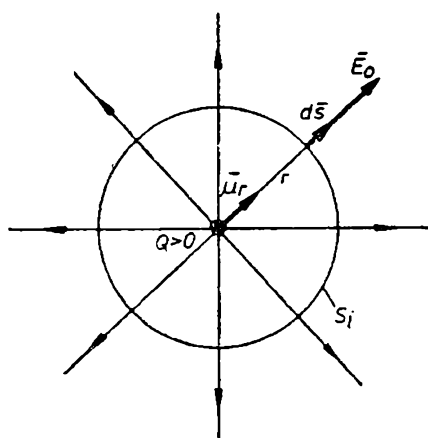
Dacă în interiorul suprafeței închise nu există corpuri încărcate cu sarcini electrice, teorema lui Gauss se exprimă prin relația :

$$\int_{S_i} \vec{E}_0 \, d\vec{s} = 0, \quad (1-24)$$

care se explică intuitiv prin aceea că numărul liniilor de câmp ce intră în interiorul suprafeței închise este egal cu numărul liniilor de câmp ce ies din aceeași suprafață. Cu alte cuvinte, în interiorul suprafeței nu se găsesc sarcini electrice unde să se termine sau de unde să înceapă linii de câmp.

**Aplicația 1-4.** Folosind teorema lui Gauss, să se determine intensitatea câmpului electric produs de o sarcină punctiformă  $Q > 0$ , într-un punct  $P$  situat în vid la distanța  $r$  de sarcină.

**Rezolvare.** Se consideră suprafața sferică (închisă) de rază  $r$  în centrul căreia se găsește sarcina  $Q$  (fig. 1-13). Datorită simetriei punctelor sferei față de sarcina  $Q$ , în toate aceste



puncte vectorii  $\vec{E}_0$  și  $d\vec{s}$  sînt coliniari, iar  $E_0 = \text{const.}$  Rezultă :

$$\int_{S_i} \vec{E}_0 \, d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

adică

$$\int_{S_i} E_0 \, ds = E_0 \int_{S_i} ds = E_0 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

de unde se obține valoarea intensității câmpului electric :

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Sau, sub formă vectorială :

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r,$$

Fig. 1-13. Suprafață sferică de rază  $r$  în jurul corpului punctiform încărcat cu sarcina  $Q$ .

unde  $\vec{u}_r$  este versorul vectorului de poziție  $r$  orientat de la sarcina  $Q$  spre punctul  $P$ .

Se remarcă identitatea dintre această ultimă relație, dedusă cu ajutorul teoremei lui Gauss, și relația (1-18), obținută pentru intensitatea câmpului electric în vid pe baza teoremei lui Coulomb și a legii acțiunii ponderomotoare în câmpul electric.

**Aplicația 1-5.** O sferă metalică situată în vid, departe de alte corpuri și de pământ, are raza  $R = 0,1$  m și este încărcată cu sarcina electrică superficială  $Q$  uniform distribuită, cu densitatea  $\rho_s = 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup>. Folosind teorema lui Gauss, să se determine intensitatea câmpului electric într-un punct situat la distanța  $r = 0,2$  m de centrul sferei.

**Rezolvare.** Se consideră suprafața sferică  $S_i$  de rază  $r$  concentrică cu sfera metalică (figura 1-14). În baza teoremei lui Gauss avem :

$$\int_{S_i} \vec{E}_0 \, d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

unde

$$Q = 4\pi R^2 \rho_s.$$

Având în vedere că vectorii  $\vec{E}_0$  și  $d\vec{s}$  sînt coliniari și că valoarea  $E_0$  a intensității cîmpului electric este aceeași în toate punctele suprafeței  $S_i$ , rezultă :

$$E_0 4 \pi r^2 = Q,$$

adică

$$E_0 = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}.$$

de unde se observă că intensitatea cîmpului electric are aceeași relație de calcul ca și cum sarcina  $Q$  ar fi punctiformă, situată în centrul sferei metalice.

Înlocuind valorile, se obține :

$$E_0 = \frac{R^2 \rho_s}{\epsilon_0 r^2} = \frac{10^{-2} 10^{-6}}{\frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^9} 4 \cdot 10^{-2}} = 28,26 \cdot 10^3 \text{ V/m.}$$

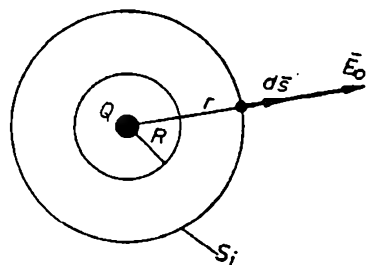


Fig. 1-14. Sferă metalică de rază  $R$  încărcată cu sarcină electrică superficială uniform distribuită.

### 1.3.7. POTENȚIALUL ELECTRIC ȘI TENSIUNEA ELECTRICĂ

*Potențialul electric*, notat cu  $V$ , este o mărime fizică de natură scalară ce caracterizează nivelul local (punctual) de electrizare, a cărei valoare, în cazul general al regimului nestăionar, se modifică atât de la un punct la altul al cîmpului electric, cît și în timp. În regimul electrostatic potențialul electric (electrostatic) este funcție numai de spațiu,  $V(x, y, z)$ , deci invariabil în timp.

Este cunoscut că în cîmpul gravitațional energia potențială a unui corp se stabilește în funcție de poziția corpului în raport cu o cotă de referință, de exemplu, față de nivelul mării (cota zero). Tot așa, valoarea potențialului într-un punct din cîmpul electric se poate stabili numai în raport cu un potențial electric de referință. Se consideră ca potențiale electrice de referință potențialul pămîntului sau potențialul în punctele situate la distanță foarte mare de corpurile electrizate (la infinit). Valoarea potențialului pămîntului, precum și a tuturor corpurilor metalice legate la pămînt se consideră convențional egală cu zero. De asemenea, este convențional egal cu zero și potențialul în punctele situate la infinit.

Diferența de potențial  $V_1 - V_2$  între puncte  $P_1$  și  $P_2$  din cîmpul electrostatic în vid (aer), sau din alt mediu, se poate defini prin intermediul lucrului mecanic corespunzător forței exercitate exclusiv de cîmp asupra corpului de probă ce se deplasează lent, după o traiectorie oarecare, din punctul  $P_1$  în punctul  $P_2$  (fig. 1-15). Deci,  $\vec{F} = Q_p \vec{E}_0$  și  $dL = \vec{F} d\vec{l} = Q_p \vec{E}_0 d\vec{l}$ ,

$$L_{1-2} = \int_{P_1}^{P_2} Q_p \vec{E}_0 d\vec{l},$$

unde  $d\vec{l}$  este elementul de traiectorie luat în sensul deplasării. Raportînd acest lucru mecanic la sarcina  $Q_p$  a corpului de probă, care se menține constantă tot timpul deplasării, se obține diferența de potențial între cele două puncte :

$$V_1 - V_2 = \frac{L_{1-2}}{Q_p} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_0 d\vec{l}. \quad (1-25, a)$$

Evident, diferența de potențial între cele două puncte  $P_1$  și  $P_2$  din câmp nu depinde de drumul (traectoria) parcursă de la un punct la celălalt, ci numai de coordonatele celor două puncte și de sensul de parcurgere al traiectoriei (sensul pozitiv de integrare), precizat prin sensul elementului de linie  $d\vec{l}$ . În cazul considerat, sensul pozitiv de integrare este de la punctul  $P_1$  la punctul  $P_2$  (fig. 1-16).

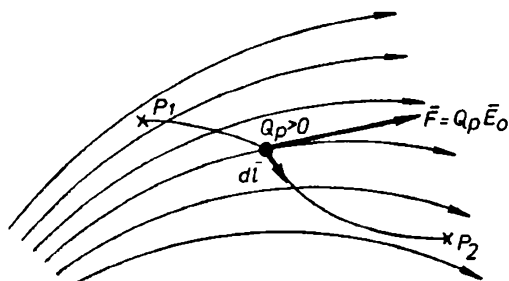


Fig. 1-15. Figură explicativă pentru calculul potențialului electric pe baza lucrului mecanic.

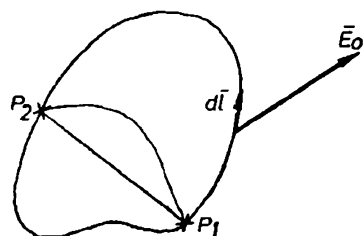


Fig. 1-16. Traectorii între punctele  $P_1$  și  $P_2$  din câmpul electric.

Dacă cele două puncte  $P_1$  și  $P_2$  sînt foarte aproape unul de celălalt, la limită se obține diferențiala potențialului electric :

$$dV = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} (V_2 - V_1) = -\vec{E}_0 d\vec{l}. \quad (1-26)$$

Dacă potențialul unuia din cele două puncte este potențial electric de referință, de exemplu  $V_2 = V_0$ , atunci potențialul electric în celălalt punct: este

$$V_1 = V_0 + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E}_0 d\vec{l}. \quad (1-25, b)$$

Considerînd  $P_0$  situat la infinit, iar corpurile încărcate cu sarcini ce produc câmpul situate într-un domeniu limitat, potențialul de referință este egal cu zero și

$$V_1 = \int_P^\infty \vec{E}_0 d\vec{l}. \quad (1-25, c)$$

Conform acestei relații, potențialul într-un punct din câmpul electrostatic este numeric egal cu lucrul mecanic corespunzător forței exercitate de câmp asupra corpului de probă încărcat cu sarcina electrică unitară și pozitivă, cînd acest corp se deplasează din punctul respectiv la infinit.

Dacă câmpul electrostatic este produs în vid de un singur corp punctiform încărcat cu sarcina electrică  $Q$ , potențialul electric într-un punct  $P$  situat la distanța  $r$  de corp este :

$$V = \int_P^\infty \vec{E}_0 d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$$

adică

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1-27)$$

unde s-au înlocuit  $d\vec{l} = d\vec{r}$ ,  $\vec{u}_r d\vec{r} = dr$ .



Din relația (1-27) se remarcă faptul că potențialul electric într-un punct al câmpului produs de o sarcină electrică punctiformă este direct proporțional cu sarcina și invers proporțional cu distanța de la sarcină la punct. La infinit, potențialul electric rezultă egal cu zero.

Unitatea de măsură pentru potențialul electric, folosită în cadrul sistemului de unități MKSA, se numește volt (simbol V).

Cu ajutorul voltmetrului se măsoară în câmpul electrostatic întotdeauna, o diferență de potențial (tensiune electrică) între două puncte (borne) :  $U = V_1 - V_2$ . Chiar și atunci când unul din cele două puncte este legat la pământ (masă), voltmetrul măsoară, nu potențialul electric, ci diferența de potențial față de pământ. De fapt, *tensiunea electrică* se definește, în general, prin integrala de linie a intensității câmpului electric în lungul unei curbe deschise sau închise :  $u = -\int_C \vec{E} d\vec{l}$ . În cazul câmpului electrostatic (coulombian) tensiunea electrică în lungul unei curbe deschise coincide cu diferența de potențial între punctele extreme ale curbei.

### 1.3.8. GRADIENTUL POTENȚIALULUI ELECTRIC

Ținând seama că potențialul electrostatic este o funcție de spațiu,  $V(x, y, z)$ , variația potențialului pe distanța orientată  $d\vec{l}$  se poate exprima cu ajutorul gradientului potențialului în felul următor :

$$dV = \nabla V d\vec{l} = |\nabla V| d\vec{l} \cos \alpha = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz, \quad (1-28)$$

unde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1-29)$$

este operatorul vectorial a lui Hamilton (nabla),

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (1-30)$$

iar

$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad (1-31)$$

este gradientul potențialului electric.

*Vectorul gradient,  $\nabla V$ , este orientat în sensul în care potențialul are o creștere maximă pe unitate de lungime. Valoarea  $|\nabla V|$  a gradientului reprezintă variația maximă pe unitatea de lungime a potențialului electric.*

Cu relația (1-28) se calculează variația de potențial după o direcție oarecare  $d\vec{l}$ , care poate fi deosebită de direcția vectorului gradient  $\nabla V$  (fig. 1-17). Evident că, dacă vectorul  $d\vec{l}$  este perpendicular pe vectorul  $\nabla V$ , se obține  $dV=0$ , deoarece unghiul dintre cei doi vectori este  $\alpha=90^\circ$ .

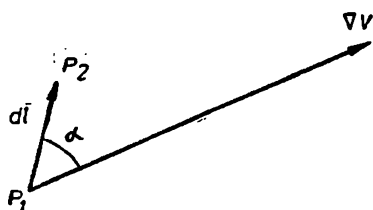


Fig. 1-17. Figură explicativă pentru calculul lui  $dV$ .

Comparind relațiile (1-26) și (1-28) rezultă :

$$\vec{E}_0 = -\nabla V, \quad (1-32)$$

ceea ce înseamnă că intensitatea cîmpului electrostatic se poate exprima prin gradientul cu semn schimbat al potențialului electrostatic.

Ținînd seama că vectorul gradient este orientat întotdeauna, în sensul în care funcția scalară (potențialul) crește, conform relației (1-32) *vectorul intensității cîmpului electric este, întotdeauna, orientat în sensul în care potențialul electric scade.*

**Aplicație.** Să se calculeze intensitatea cîmpului electric produs în vid de o sarcină electrică punctiformă prin intermediul gradientului potențialului electric.

**Rezolvare.** Se consideră potențialul determinat într-un punct  $P$  din spațiu de o sarcină electrică punctiformă  $Q > 0$  situată în punctul  $P_0$  (fig. 1-18). Rezultă :

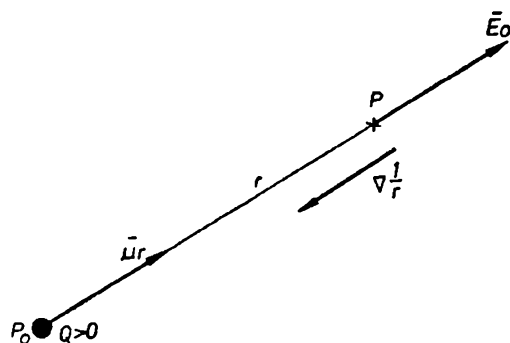


Fig. 1-18.  $E_0$  și gradientul lui  $\frac{1}{r}$  în extremitatea lui  $r$ .

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

$$\vec{E}_0 = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r,$$

unde gradientul funcției scalare de spațiu  $\frac{1}{r}$ , calculat în extremitatea  $P$  a vectorului  $\vec{r}$ , este :

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}.$$

Se remarcă faptul că expresia obținută mai sus pentru  $\vec{E}_0$  este aceeași cu cea dată de relația (1-18).

### 1.3.9. TEOREMA POTENȚIALULUI ELECTROSTATIC

Se consideră un cîmp electric de intensitate  $\vec{E}_0$ , în vid și în el un contur  $\Gamma$  închis (fig. 1-19), de-a lungul căruia se deplasează încet un corp punctiform încărcat cu sarcina electrică  $Q_p > 0$ , în așa fel încît în nici un moment să nu fie depășite limitele regimului electrostatic. Forța columbiană ce acționează asupra corpului este  $\vec{F} = Q_p \vec{E}_0$ .

Lucrul mecanic al forței columbiene  $\vec{F}$ , atunci cînd corpul încărcat cu sarcina  $Q_p$  se deplasează de-a lungul conturului închis  $P-P_1-P_2-P_3-P$ , este egal cu zero, respectiv diferența de potențial între punctul de început și punctul de sfîrșit a traiectoriei este nulă :

$$V_p - V_p = 0 = \oint \vec{E}_0 d\vec{l}. \quad (1-33)$$

Această relație exprimă teorema potențialului electrostatic sub formă integrală, adică *circulația vectorului intensității cîmpului  $\vec{E}_0$  pe un contur închis este nulă.*

În sens fizic, teorema potențialului electrostatic precizează că în câmpul electrostatic nu are loc o transformare de energie dintr-o formă în alta prin intermediul lucrului mecanic. Cu alte cuvinte, câmpul electrostatic se întreține fără un aport de energie din exterior.

Teorema potențialului electrostatic nu este valabilă în cazul câmpului electric variabil (v. legea inducției electromagnetice).

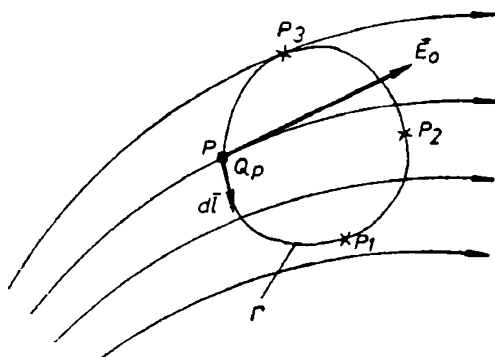


Fig. 1-19.

### 1.3.10. LINII ȘI SUPRAFEȚE ECHIPOTENȚIALE. ORTOGONALITATEA DINTRE LINIILE DE CÎMP ȘI LINIILE ECHIPOTENȚIALE

Suprafața echipotențială este acea suprafață fictivă din spațiu ce unește toate punctele în care potențialul electric are aceeași valoare ( $V = \text{const.}$ ). Intersecția dintre suprafața echipotențială și oricare altă suprafață determină o linie echipotențială.

Pentru aprecierea regiunilor de câmp mai intens sau mai puțin intens, se trasează liniile echipotențiale, astfel încât diferența de potențial între două linii vecine să fie aceeași. Acolo unde liniile echipotențiale sînt mai apropiate, câmpul este mai intens și este mai puțin intens unde sînt mai depărtate.

În fig. 1-20 sînt reprezentate spectrele liniilor echipotențiale și liniilor de câmp pentru câmpul produs de o sarcină electrică punctiformă pozitivă, respectiv de două sarcini electrice punctiforme egale și de semne opuse.

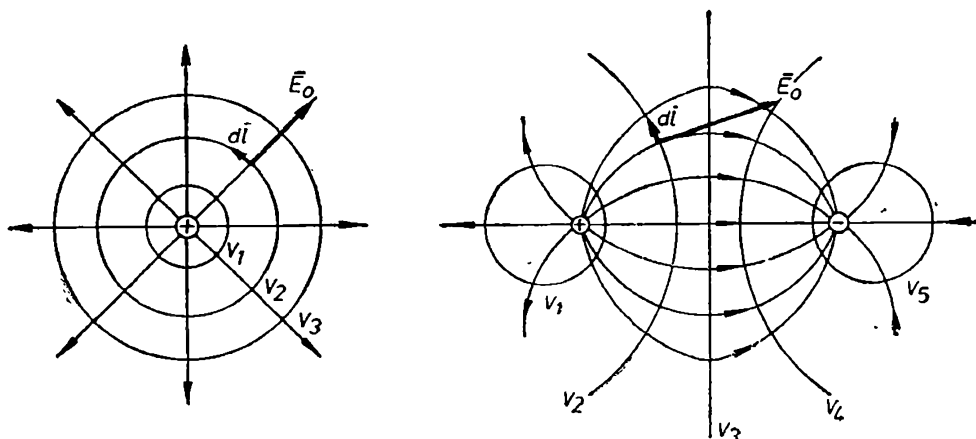


Fig. 1-20. Liniile de câmp și linii echipotențiale.

Liniile de câmp și liniile echipotențiale sînt ortogonale între ele, ceea ce se justifică simplu considerînd elementul de linie  $dl$  în lungul liniei echipotențiale ( $V = \text{const.}$ ) și calculînd variația potențialului de-a lungul acestei

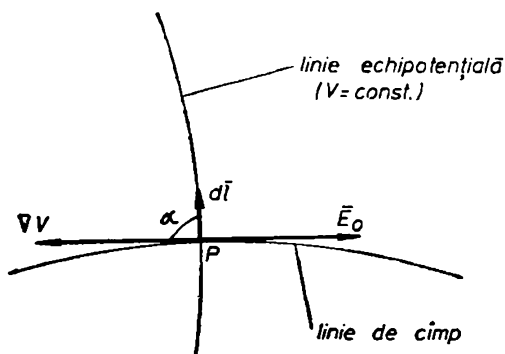


Fig. 1-21. Ortogonalitatea între linia de câmp electric și linia echipotențială.

distanțe infinit mici (fig. 1-21). Rezultă (relația 1-28):

$$dV = 0 = \nabla V d\vec{l} = |\nabla V| dl \cos \alpha,$$

adică unghiul  $\alpha$  dintre vectorul  $d\vec{l}$  și vectorul gradient  $\nabla V$  trebuie să fie  $90^\circ$ . Cum vectorul  $\vec{E}_0 = -\nabla V$  este tangent la linia de câmp, înseamnă că linia echipotențială și linia de câmp, ce trec prin punctul  $P$  (fig. 1-21), sînt ortogonale.

La aplicația 1-11 se prezintă un exemplu de stabilire a ecuației liniilor echipotențiale.

### 1.3.11. EXEMPLE DE CALCUL A CÎMPULUI ELECTRIC COULOMBIAN ÎN VID

În cele ce urmează se arată cum se calculează intensitatea cîmpului electric și potențialul electric în diferite puncte din spațiu, atunci cînd cîmpul este produs de:

- sarcini electrice aparținînd unor corpuri punctiforme;
- sarcini electrice cu repartiție volumetrică;
- sarcini electrice cu repartiție superficială;
- sarcini electrice repartizate pe corpuri filiforme;
- dipolul electric;
- sarcini electrice duble, repartizate pe o suprafață.

Mai întîi se precizează că, pentru calculul cîmpului electric coulombian existent în vid și medii liniare se aplică principiul superpoziției, adică al suprapunerii efectelor. Conform acestui principiu, dacă există  $n$  corpuri încărcate cu sarcini electrice care produc cîmpul, determinarea intensității cîmpului electric (ca vector) într-un punct din spațiu se face calculînd intensitatea cîmpului electric produs de fiecare corp (sarcină electrică) în parte și însumînd geometric (vectorial) rezultatele. Analog se procedează și la determinarea potențialului electric numai că, în acest caz, însumarea se face algebric deoarece potențialul electric este o mărime scalară (pozitivă sau negativă).

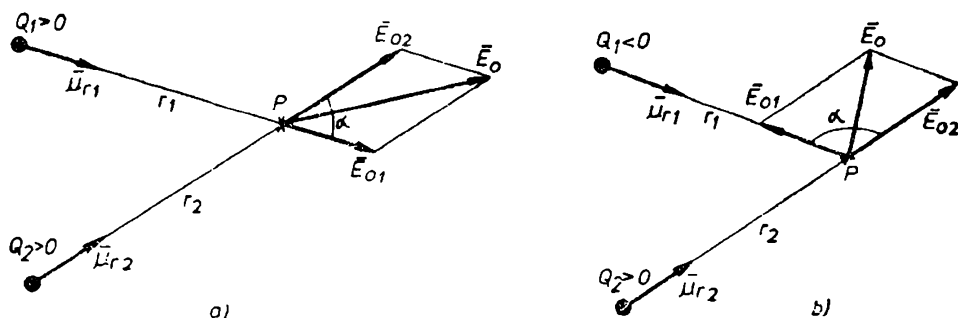


Fig. 1-22. Cîmpul determinat în vid de două corpuri punctiforme :  
a — încărcate cu sarcini de același semn (pozitive); b — încărcate cu sarcini de semne opuse.

a. **Cîmpul coulombian determinat de sarcini electrice ce aparțin corpurilor punctiforme.** Se consideră cîmpul electric determinat de două corpuri punctiforme, încărcate cu sarcinile electrice  $Q_1$  și  $Q_2$ , ambele pozitive (figura 1-22, a), respectiv de semne contrarii (fig. 1-22, b).

Potențialul  $V$  și intensitatea cîmpului electric  $\vec{E}_0$  în punctul  $P$  se determină cu relațiile :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_1^2} + \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_2^2},$$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02} = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_1^2} \vec{u}_{r1} + \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_2^2} \vec{u}_{r2},$$

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos \alpha}.$$

În general, dacă cîmpul electric este determinat de  $n$  sarcini punctiforme  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ , avem :

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{v=1}^n \frac{Q_v}{r_v}, \quad (1-34)$$

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{v=1}^n \frac{Q_v}{r_v^2} \vec{u}_r. \quad (1-35)$$

b. **Cîmpul coulombian determinat de sarcini electrice cu repartiție volumetrică.** Fie  $O$  volumul corpului încărcat cu sarcini electrice volumetrice cu densitatea  $\rho_0$  (fig. 1-23). Un cub elementar, de volum  $dQ$ , conține sarcina  $dQ = \rho_0 dQ$ , care este punctiformă față de punctul  $P$  situat la distanța  $r$ , în exteriorul corpului.

Potențialul electric și intensitatea cîmpului electric determinate în punctul  $P$  de sarcina elementară  $dQ$  sînt :

$$dV = \frac{dQ}{4 \pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 dQ}{4 \pi \epsilon_0 r}, \quad (1-36)$$

$$d\vec{E}_0 = \frac{dQ}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho_0 dQ}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \quad (1-37)$$

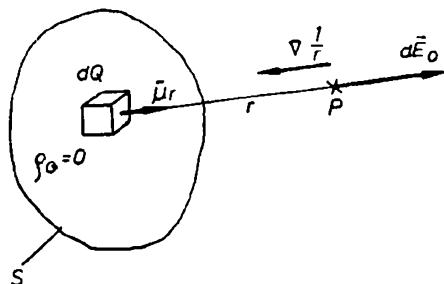


Fig. 1-23. Corp încărcat cu sarcini electrice volumetrice.

Între aceste două mărimi există legătura

$$d\vec{E}_0 = -\nabla (dV) = -\frac{dQ}{4 \pi \epsilon_0} \nabla \frac{1}{r},$$

unde

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}.$$

Întreaga sarcină a corpului

$$Q = \int_O \rho_0 dQ$$

determină în punctul  $P$  potențialul electric și intensitatea câmpului electric deduse din relațiile (1-36) și (1-37) :

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0 \frac{\rho_0 d\omega}{r}, \quad (1-38)$$

$$\vec{E}_0 = \int d\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0 \frac{\rho_0 d\omega}{r^2} \vec{u}_r. \quad (1-39)$$

În aceste două relații  $r \neq \text{const.}$  deoarece corpul nu este punctiform. Ca urmare,  $r$  nu poate fi scos de sub semnul integral. De asemenea, în cazul mai general  $\rho_0 \neq \text{const.}$  Numai în cazul când sarcinile electrice sînt uniform distribuite în volumul corpului rezultă  $\rho_0 = \text{const.}$  și această mărime poate fi scoasă în fața integralei.

Dacă vectorul de poziție este orientat de la punctul  $P$  la sarcină, expresiile (1-37) și (1-39) rezultă cu semn minus iar  $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$  (calculat în originea vectorului de poziție).

**c. Câmpul coulombian determinat de sarcini electrice cu repartiție superficială.** Analog cu cele explicate la punctul b) de mai sus și ținînd seama de notațiile din fig. 1-24, rezultă :

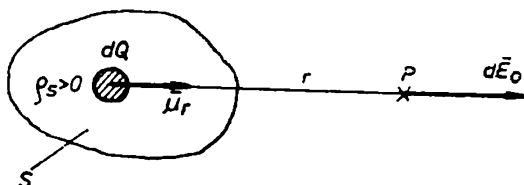


Fig. 1-24. Suprafață încărcată cu sarcini electrice.

$$dQ = \rho_s ds,$$

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1-40)$$

$$d\vec{E}_0 = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, \quad (1-41)$$

unde  $ds$  este elementul de suprafață, iar  $\rho_s$  este densitatea superficială a sarcinii electrice.

Prin integrarea relațiilor (1-40) și (1-41) se obțin  $V$  și  $\vec{E}_0$  :

$$V = \int_S dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s ds}{r}. \quad (1-42)$$

$$\vec{E}_0 = \int_S d\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s ds}{r^2} \vec{u}_r. \quad (1-43)$$

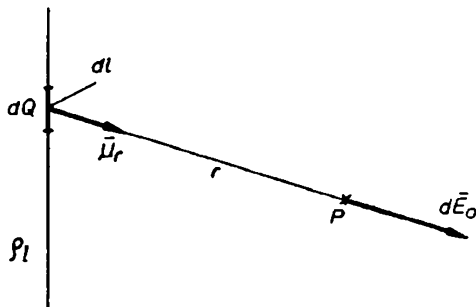


Fig. 1-25. Corp filiform încărcat cu sarcină electrică.

**d. Câmpul coulombian determinat de sarcini electrice ce aparțin corpurilor filiforme.** Se consideră în fig. 1-25 un corp filiform în lungul căruia este repartizată sarcina electrică cu densitatea liniară  $\rho_l$ . Potențialul electric

și intensitatea cîmpului electric într-un punct  $P$  din cîmpul creat de această sarcină sînt :

$$dQ = \rho_l dl,$$

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1-44)$$

$$d\vec{E}_0 = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r, \quad (1-45)$$

$$V = \int_l dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l dl}{r}, \quad (1-46)$$

$$\vec{E}_0 = \int_l d\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l dl}{r^3} \vec{u}_r, \quad (1-47)$$

unde  $dl$  este elementul de linie.

La aplicația 1-10 se prezintă formula logaritmică a potențialului electric determinat de sarcini electrice lineiforme, uniform distribuite în lungul unui conductor drept, infinit de lung.

**e. Cîmpul dipolului electric.** Se consideră în fig. 1-26 dipolul electric format din sarcinile punctiforme  $+Q$  și  $-Q$ , situate la distanța  $\Delta l$  între ele. Momentul electric al dipolului este :

$$\vec{p} = Q\Delta\vec{l}. \quad (1-48)$$

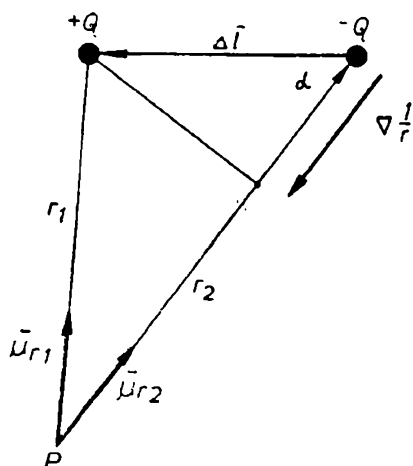


Fig. 1-26. Dipolul electric.

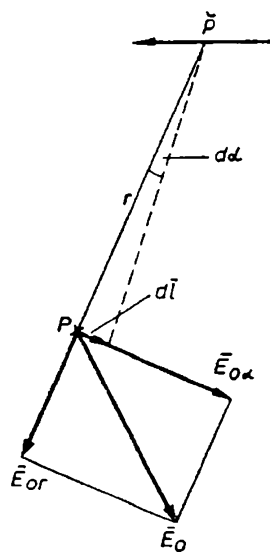


Fig. 1-27. Componentele intensității cîmpului electric determinat în vid de dipol.

Potențialul în punctul  $P$  se calculează astfel :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r_1} + \frac{-Q}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

unde se ține seama că  $r_1 \cong r_2 = r$ , deci

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r^2} = \frac{\Delta l \cos \alpha}{r^2}.$$

Prin urmare :

$$V = \frac{Q \Delta l \cos \alpha}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \alpha}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad (1-49)$$

sau

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \bar{p} \nabla \frac{1}{r}, \quad (1-50)$$

unde

$$\left| \nabla \frac{1}{r} \right| = \frac{1}{r^2}.$$

Se remarcă faptul că, la dipolul electric, potențialul electric scade în funcție de distanță cu  $\frac{1}{r^2}$ , în timp ce la o sarcină punctiformă scade cu  $\frac{1}{r}$ .

Intensitatea cîmpului electric în punctul  $P$  se determină prin gradientul exprimat în coordonate polare al potențialului electric :

$$\vec{E}_\eta = -\nabla V = \vec{E}_{0r} + \vec{E}_{0\alpha}, \quad (1-51)$$

unde, conform fig. 1-27, valorile componentelor  $\vec{E}_{0r}$  și  $\vec{E}_{0\alpha}$  se obțin din expresia (1-49) a potențialului astfel :

$$E_{0r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p \cos \alpha}{2 \pi \epsilon_0 r^3}, \quad (1-52)$$

$$E_{0\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial l} = -\frac{\partial V}{r \partial \alpha} = \frac{p \sin \alpha}{4 \pi \epsilon_0 r^3}. \quad (1-53)$$

Componentele  $\vec{E}_{0r}$  și  $\vec{E}_{0\alpha}$  fiind în cuadratură, rezultă :

$$E_0 = \sqrt{E_{0r}^2 + E_{0\alpha}^2}.$$

Se remarcă faptul că intensitatea cîmpului electric determinat de dipol scade în funcție de distanță cu  $\frac{1}{r^3}$ , spre deosebire de cazul sarcinilor electrice punctiforme, pentru care scade cu  $\frac{1}{r^2}$ .

**f. Cîmpul coulombian al sarcinilor electrice duble repartizate pe o suprafață.** Sarcini electrice duble repartizate pe o suprafață se întîlnesc la suprafețele de contact dintre două medii conductoare diferite, așa cum este cazul suprafeței de separație dintre electrod și electrolit la un element galvanic etc. În fig. 1-28 se consideră o astfel de suprafață avînd densitatea momentelor electrice :

$$\bar{\tau} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\sum \bar{p}}{\Delta S}, \quad (1-54)$$



unde  $\Sigma \bar{p}$  este suma geometrică a momentelor electrice elementare de pe suprafața  $\Delta s$ .

Momentul electric al dipolilor situați pe suprafața elementară  $ds$  este :

$$d\bar{p} = \bar{\tau} ds = \tau d\bar{s} = \tau ds \bar{n}, \quad (1-55)$$

unde  $\bar{n}$  este versorul normal la suprafața  $S$ , orientat de la sarcina negativă spre cea pozitivă.

Potențialul în punctul  $P_1$  situat de partea sarcinilor pozitive se determină cu o expresie analoagă relației (1-50) stabilită pentru dipolul electric, adică

$$dV_{P1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau ds \bar{n} \nabla \frac{1}{r}, \quad (1-56)$$

unde

$$\bar{n} \nabla \frac{1}{r} = \frac{\cos \alpha}{r^2}. \quad (1-57)$$

Prin înlocuirea relației (1-57) în (1-56) rezultă :

$$dV_{P1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \frac{ds \cos \alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau d\Omega, \quad (1-58)$$

unde  $d\Omega = \frac{ds \cos \alpha}{r^2}$  este unghiul solid sub care se vede suprafața  $ds$  din punctul  $P_1$ .

Potențialul determinat de toate sarcinile electrice duble, situate pe suprafața  $S$  este :

$$V_{P1} = \int dV_{P1} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \Omega, \quad (1-59)$$

în care s-a presupus  $\tau = \text{const.}$

Dacă punctul  $P_1$  este situat pe suprafața  $S$ , atunci unghiul solid  $\Omega = 2\pi$  și rezultă :

$$V_1 = \frac{\tau}{2\epsilon_0}. \quad (1-60)$$

Potențialul într-un punct  $P_2$ , simetric cu punctul  $P_1$  față de suprafața  $S$ , dar situat de partea sarcinilor electrice negative, se calculează în mod analog, cu deosebirea că în expresii intervine unghiul  $\alpha' = 180 - \alpha$ , adică :

$$dV_{P2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \frac{ds \cos \alpha'}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \frac{ds \cos \alpha}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau d\Omega, \quad (1-61)$$

$$V_{P2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \Omega. \quad (1-62)$$

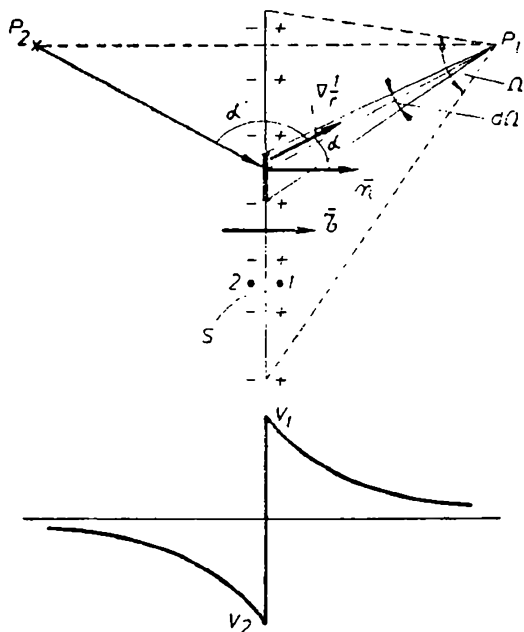


Fig. 1-28. Potențialul electric determinat de sarcini electrice duble, uniform distribuite pe o suprafață plană.

Dacă punctul  $P_2$  este situat pe suprafața  $S$ , unghiul solid  $\Omega=2\pi$  și se obține :

$$V_2 = -\frac{\tau}{2\epsilon_0}. \quad (1-63)$$

Deci, diferența de potențial între potențialele punctelor situate pe o parte și pe alta a suprafeței  $S$  este :

$$V_1 - V_2 = \frac{\tau}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\tau}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\tau}{\epsilon_0}. \quad (1-64)$$

Rezultă de aici concluzia importantă că de-a lungul unei linii ce trece prin suprafața  $S$ , ce conține sarcini electrice duble, potențialul electric suferă o discontinuitate, adică se modifică brusc de la valoarea  $-\frac{\tau}{2\epsilon_0}$  la valoarea  $+\frac{\tau}{2\epsilon_0}$  (fig. 1-28).

**Aplicația 1-6.** Un fir în formă de cerc cu raza  $R$  este încărcat cu o sarcină electrică liniiformă, uniform distribuită, de densitatea  $\rho_l$ . Să se determine potențialul electric și intensitatea cîmpului electric într-un punct  $P$ , situat la distanța  $x$  de centrul cercului, pe dreapta ce trece prin centru și este perpendiculară pe planul cercului.

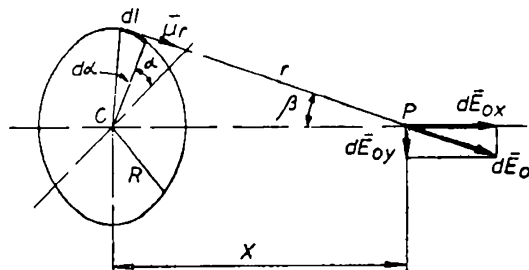


Fig. 1-29. Intensitatea cîmpului electric într-un punct de pe axa unei spire circulare, filiforme, încărcată cu sarcini electrice uniform distribuite.

**Rezolvare.** Cu notațiile din fig. 1-29 se obține potențialul electric :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} = \\ &= \frac{\rho_l R d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}, \\ V &= \int dV = \frac{\rho_l R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \\ &= \frac{\rho_l R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}. \end{aligned}$$

Intensitatea cîmpului electric

$$d\vec{E}_0 = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho_l R d\alpha}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)} \vec{u}_r,$$

are două componente :

$$d\vec{E}_0 = d\vec{E}_{0x} + d\vec{E}_{0y}.$$

Rezultanta componentelor  $d\vec{E}_{0y}$  determinate de sarcinile elementare  $\rho_l dl$  diametral opuse este egală cu zero, ceea ce conduce la  $\vec{E}_{0y} = 0$ . Prin urmare, intensitatea cîmpului electric în punctul  $P$  se obține prin însumarea geometrică a tuturor componentelor  $d\vec{E}_{0x}$ . Rezultă :

$$\begin{aligned} dE_{0x} &= dE_0 \cos \alpha = \frac{\rho_l R d\alpha}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\rho_l R x d\alpha}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}, \\ E_{0x} &= \int dE_{0x} = \frac{\rho_l R x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\rho_l R x}{2\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Pentru  $x=0$ , adică în centrul cercului, se obține :

$$V_c = \frac{\rho_l}{2\epsilon_0} \quad \text{și} \quad E_{0c} = 0$$

## 1.4. CÎMPUL ELECTRIC ÎN CORPURI METALICE

### 1.4.1. CARACTERIZAREA CORPURILOR METALICE

Corpurile metalice se caracterizează prin faptul că în structura lor cristalină există electroni „liberi” care, sub acțiunea unor forțe exterioare, se pot deplasa în interiorul metalului pe distanțe nelimitate. Acesta este motivul pentru care se afirmă, impropriu, că metalele sînt bune conducătoare de electricitate.

Numărul de electroni liberi din unitatea de volum diferă de la un metal la altul și depinde de temperatură. De exemplu, la temperatură normală, numărul de electroni liberi la cupru și la germaniu pur este :

- cupru :  $N = 8 \cdot 10^{28}$  electroni liberi/ $m^3$  ;
- germaniu pur :  $N = 6,2 \cdot 10^{19}$  electroni liberi / $m^3$  ;

Conducătoarele metalice străbătute de curent electric pot fi imaginate ca niște „țevi” prin care circulă „gazul” electronic.

Spre deosebire de metale, corpurile izolatoare (dielectrice) nu dispun de electroni liberi care, sub acțiunea unor forțe exterioare, să se poată deplasa pe distanțe nelimitate. Dacă ar exista astfel de purtători mobili de sarcini electrice, corpul respectiv și-ar pierde calitățile izolatoare, devenind conductor.

În continuare se urmărește comportarea corpurilor metalice introduse în cîmpul electric.

### 1.4.2. ECHILIBRUL ELECTROSTATIC

Se consideră un cîmp electrostatic de intensitate  $\vec{E}_0$ , omogen, adică cu linii de cîmp drepte paralele (fig. 1-30, a), în care se introduce un corp metalic  $M$ , de formă sferică (fig. 1-30, b), neîncărcat electric și izolat față de pămînt și față de alte corpuri.

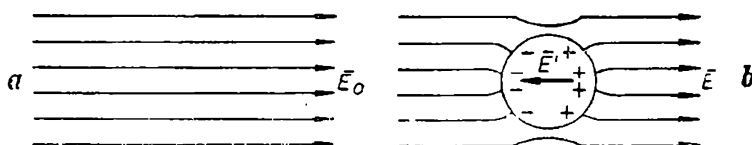


Fig. 1-30. Liniile cîmpului electric uniform în vid (a) și în prezența unei sfere metalice (b).

Asupra electronilor liberi din metal acționează forța  $\vec{F} = q\vec{E}$  orientată în sens opus față de intensitatea cîmpului electric  $\vec{E}$  deoarece  $q < 0$ , sub acțiunea căreia electronii se deplasează în sens opus cîmpului electric, avînd loc în felul acesta o separare a sarcinilor electrice în sfera metalică. Pe suprafața opusă intensității cîmpului electric se acumulează sarcini electrice negative, iar pe suprafața din direcția intensității cîmpului electric rămîn sarcini electrice pozitive necompensate.

Datorită separării sarcinilor electrice din interiorul sferei, apare un nou cîmp electric coulombian,  $\vec{E}'$ , determinat de aceste sarcini și opus cîmpului inițial  $\vec{E}_0$ . Cîmpul rezultat din sfera metalică este :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

Problema care se pune este de a stabili pînă cînd sarcinile electrice din interiorul sferei metalice vor continua să se separe ?. Sarcinile electrice se vor separa pînă în momentul cînd se stabilește *echilibrul electrostatic*, caracterizat prin *intensitatea cîmpului electric rezultant în corpur metalice egală cu zero* :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0. \quad (1-65)$$

În această situație, forța  $\vec{F} = q\vec{E} = 0$  și mișcarea electronilor liberi în metal încetează.

Deoarece

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right),$$

înseamnă că în regim electrostatic (echilibru electrostatic) potențialul electric în metal este constant :

$$V_{metal} = \text{const.} \quad (1-66)$$

Deci, suprafața corpului metalic introdus în cîmpul electrostatic este echipotențială. În consecință, *liniile cîmpului electrostatic vor fi întotdeauna perpendiculare pe suprafața corpurilor metalice*. De asemenea, în regim de echilibru electrostatic, în interiorul corpului metalic nu există linii de cîmp, deoarece  $E=0$ , deci nu pot exista nici sarcini electrice volumetrice unde să se sfîrșească sau de unde să înceapă astfel de linii. Din această constatare rezultă că *în regim electrostatic sarcinile electrice ale corpurilor metalice sînt repartizate pe suprafața acestora, adică sînt sarcini electrice superficiale*.

Dacă, cu ajutorul unui mîner izolat, corpul metalic  $M$  (fig. 1-30,  $b$ ) este scos din cîmpul  $\vec{E}_0$ , în corp rămîne cîmpul  $\vec{E}'$  care determină forța  $\vec{F}' = q\vec{E}'$ , sub acțiunea căreia electronii revin în poziția lor inițială, iar corpul devine neutru.

Electrizarea corpului metalic după procedeul arătat mai sus este cunoscută și sub denumirile improprie de *electrizare prin influență*, respectiv *electrizare prin inducție electrostatică*.

Spre deosebire de regimul electrostatic al corpurilor metalice, caracterizat prin  $E=0$  și  $V=\text{const.}$ , există și *regimul electrocinetic*, caracterizat prin  $E \neq 0$  și  $V \neq \text{const.}$  în interiorul metalelor (conductoarelor).

### 1.4.3. SARCINI ELECTRICE LIBERE ȘI LEGATE

Se face următoarea experiență : un baston de ebonită  $A$ , electrizat prin frecare, se așază pe un suport metalic  $B$  legat la pămînt (fig. 1-31). În spațiul înconjurător bastonului de ebonită există un cîmp electric de intensitate  $\vec{E}_0$ , cu liniile de cîmp orientate de la potențialul mai ridicat (pămînt) spre potențialul mai scăzut (bastonul de ebonită încărcat cu sarcini electrice negative).

Cu ajutorul unui mîner izolat se introduce în cîmpul electric  $\vec{E}_0$  o placă metalică  $C$  care, așa cum s-a explicat la paragraful precedent, se electricează.

Potențialul constant ce se stabilește în punctele plăcii metalice  $C$  este mai mic decît potențialul pămîntului, considerat egal cu zero, deoarece ea se găsește în cîmpul electric al sarcinilor negative de pe bastonul de ebonită. În această situație, dacă se închide întreruptorul  $K$ , prin care corpul metalic  $C$  se leagă la pămînt,

electronii din placă se deplasează la pământ. Apoi, deschizând întreruptorul  $K$  și scoțind, cu ajutorul mînerului izolant, corpul metalic  $C$  din cîmp, el rămîne încărcat cu sarcini electrice pozitive, oriunde ar fi așezat acest corp în spațiu. Astfel de sarcini electrice, care se mențin pe corp independent de poziția lui în cîmp (spațiu), se numesc *sarcini electrice libere*.

Dacă, înainte de a închide întreruptorul  $K$ , corpul metalic  $C$  se scoate din cîmpul electric, sub acțiunea forței  $\vec{F}' = q\vec{E}'$  electronii se deplasează și compensează sarcinile electrice pozitive, corpul devenind neutru. Astfel de sarcini care se mențin pe corp, dependent de poziția sa în cîmp (spațiu) se numesc *sarcini electrice legate*.

În general, un corp poate conține atît sarcini electrice libere, cît și sarcini electrice legate, sarcina electrică totală fiind  $Q + Q'$ , respectiv densitatea de sarcină  $\rho_0 + \rho'_0$ ,  $\rho_s + \rho'_s$  etc. Indicele „prim” se referă la sarcinile electrice legate.

Conform procedeului explicat mai sus, sarcinile electrice legate pot fi transformate în sarcini electrice libere.

**Aplicația 1-7.** În centrul unei sfere metalice goale, se găsește sarcina electrică liberă, punctiformă,  $Q > 0$ . Să se evalueze potențialul electric și intensitatea cîmpului electric într-un punct exterior sferei pentru situațiile în care sfera nu este legată la pământ (masă) și sfera este legată la pământ.

#### Rezolvare

a. Sfera metalică, în stare inițială neutră, nu este legată la pământ (fig. 1-32, a). Datorită cîmpului electric determinat de sarcina electrică  $Q > 0$ , sfera metalică se încarcă cu sarcini electrice superficiale legate, uniform distribuite, negative pe suprafața interioară și pozitive pe suprafața exterioară.

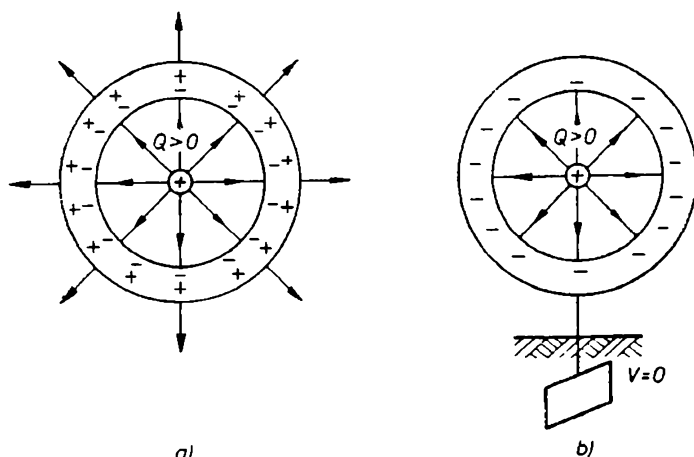


Fig. 1-32. Ecran electrostatic :

a — nelegat la pământ; b — legat la pământ.

În exteriorul sferei există un câmp electric determinat de sarcinile electrice superficiale, pozitive, de pe suprafața exterioară. Potențialul electric și intensitatea câmpului electric într-un punct din acest câmp exterior se determină după procedeul indicat la paragrafele anterioare.

b. Prin legarea sferei metalice la pământ (fig. 1-32, b), sarcinile electrice legate pozitive sînt compensate de sarcini negative (electroni) proveniți din pământ, astfel încît potențialul sferei devine nul (același cu potențialul pămîntului).

În exteriorul sferei nu există un câmp electric, deci în orice punct din exterior potențialul electric și intensitatea câmpului electric sînt egale cu zero. În această situație sfera metalică devine un *ecran electrostatic* pentru câmpul electric existent în interiorul său, determinat de sarcina  $Q$ .

Dacă sarcina electrică  $Q$  ar fi situată în exteriorul sferei metalice, aceasta ecranează spațiul din interiorul său față de câmpul electric exterior, indiferent dacă este legată la pământ sau nu. Pe acest principiu este realizată cușca lui Faraday.

## 1.5. CÂMPUL ELECTRIC ÎN MEDII DIELECTRICE

### 1.5.1. CARACTERIZAREA MEDIILOR (CORPURILOR) DIELECTRICE

Mediile dielectrice (izolatoare) se caracterizează prin faptul că nu conțin decît un număr neînsemnat (neglijabil) de purtători liberi de sarcini electrice care, sub acțiunea câmpului electric, să se poată deplasa pe distanțe nelimitate. Aceasta înseamnă că astfel de medii au conductivitatea electrică egală practic cu zero.

Sub acțiunea unui câmp electric exterior, electronii din *mediul dielectric*, ce gravitează în jurul unor formații structurale (atomi, molecule), execută numai o deplasare pe distanță limitată, denumită *deplasare elastică*, fără să se desprindă de formațiunile cărora le aparțin. Dacă intensitatea câmpului electric din dielectric depășește o anumită limită, *electronii* sînt „desprinși” din formații, devenind *liberi*, respectiv *mediul* își pierde calitățile izolatoare, devenind *conductor*.

În industria electrotehnică se folosesc diverse materiale izolatoare. Calitățile acestor materiale sînt determinate în primul rînd de comportarea lor în câmpul electric.

### 1.5.2. POLARIZAREA DIELECTRICILOR ÎN CÂMPUL ELECTRIC

Un atom sau o moleculă dintr-un material izolant sînt neutre din punct de vedere electric, în sensul că conțin același număr de sarcini electrice elementare negative și pozitive.

Electronii ce aparțin formațiilor structurale ale substanței izolante execută o permanentă mișcare. Sarcinile electronilor în mișcare se manifestă în exterior ca și cum ar fi amplasate într-un centru echivalent de acțiune al sarcinilor negative care, în lipsa câmpului electric exterior, se suprapune, sau nu, peste centrul de acțiune al sarcinilor pozitive situate în nucleeele atomilor.

O moleculă la care, în lipsa câmpului electric exterior, centrul echivalent de acțiune al sarcinilor electrice negative se suprapune cu centrul de acțiune al

sarcinilor electrice pozitive se numește *moleculă nepolară*, avînd momentul electric  $\bar{p}=0$ . În caz contrar, cînd cele două centre nu se suprapun, *molecula este polară*, avînd momentul electric  $\bar{p}\neq 0$ .

Cel mai simplu atom nepolar este cel al hidrogenului, format din nucleul cu sarcina electrică elementară pozitivă  $Q_+$  și un electron cu sarcina electrică elementară negativă  $Q_- = -q$ . În lipsa cîmpului electric exterior, electronul execută aproximativ o mișcare circulară în jurul nucleului, astfel încît centrul echivalent de acțiune al sarcinii sale coincide cu centrul sarcinii pozitive din nucleu (fig. 1-33, a).

Dacă atomul de hidrogen se găsește într-un cîmp electric exterior de intensitate  $\vec{E}_0$ , orbita electronului se deformează, devenind eliptică (fig. 1-33, b),

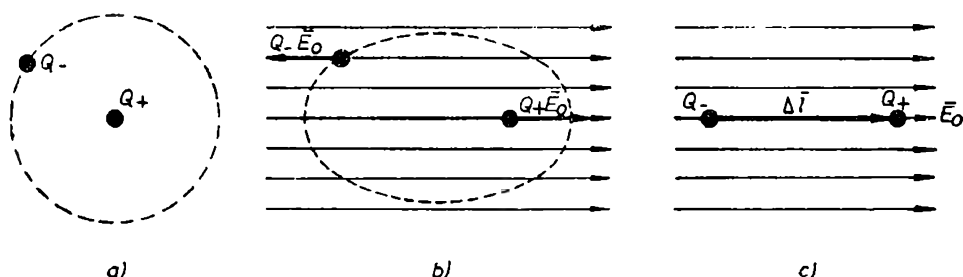


Fig. 1-33. Traectoria electronului la atomul de hidrogen în absența cîmpului electric exterior (a), în prezența cîmpului electric exterior (b) și dipolul electric corespunzător (c).

astfel încît centrul echivalent de acțiune al sarcinii negative nu se mai suprapune peste sarcina pozitivă. Se spune, că atomul de hidrogen s-a polarizat electric, comportîndu-se în exterior ca un dipol electric, caracterizat prin momentul electric  $\bar{p} = Q_+ \Delta \vec{l}$ , orientat în direcția liniilor cîmpului electric  $\vec{E}_0$  (fig. 1-33, c).

Fenomenul de constituire și orientare a dipolilor la un dielectric cu molecule nepolare, situat într-un cîmp electric exterior, se numește *polarizare electrică de deformare*.

La dielectricii cu molecule polare, în prezența unui cîmp electric exterior are loc fenomenul de *polarizare electrică de orientare* a dipolilor existenți.

În general, polarizarea electrică a unui dielectric constă atît din polarizarea de deformare, cît și din polarizarea de orientare.

Polarizarea electrică a unui dielectric poate fi *temporară* sau *permanentă*. În primul caz, starea de polarizare se menține numai în prezența unui cîmp electric exterior, iar în al doilea caz, această stare se menține independent de cîmpul electric exterior. Materialele care prezintă polarizare electrică permanentă se numesc *electreți*.

În cele ce urmează se fac referiri numai la dielectricii care prezintă polarizare electrică temporară.

### 1.5.3. INTENSITATEA CÎMPULUI ELECTRIC ÎN MEDIUL DIELECTRIC. SARCINILE ELECTRICE DE POLARIZARE

Se consideră un corp dielectric omogen și fără polarizare electrică permanentă, introdus într-un cîmp electric uniform, de intensitate  $\vec{E}_0$  (fig. 1-34). Datorită cîmpului electric exterior, dielectricul se polarizează, adică se formează și se orientează dipolii electrice moleculari.

Considerînd un volum  $\Delta o$  oricît de mic din dielectric, sarcinile electrice ale dipolilor situate în acest volum, denumite *sarcini electrice de polarizare*, se compensează reciproc, rămînînd necompensate numai sarcinile electrice pozitive  $Q'_+$  de pe fața corpului dielectric din direcția intensității cîmpului și sarcinile electrice negative  $Q'_-$  de pe fața corpului dielectric din direcția opusă intensității cîmpului. Deci, în această situație a corpului dielectric omogen situat într-un cîmp electric uniform, nu există sarcini electrice de polarizare volumetrice, ci numai sarcini electrice de polarizare superficiale.

Dacă corpul dielectric este neomogen, situat într-un cîmp electric uniform sau neuniform, atunci apar și sarcini electrice de polarizare volumetrice.

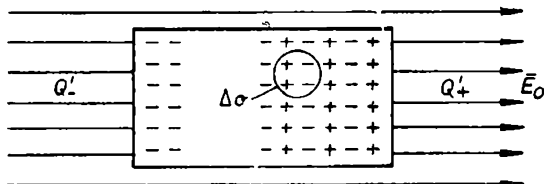


Fig. 1-34. Polarizarea electrică a corpului dielectric

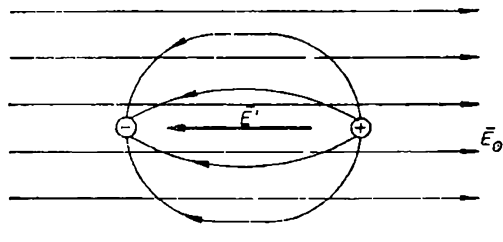


Fig. 1-35. Liniile cîmpului unui dipol electric molecular.

Dacă se scoate corpul dielectric din cîmpul electric, el revine în starea neutră inițială, ceea ce înseamnă că sarcinile electrice de polarizare sînt legate, adică depind de poziția corpului dielectric în cîmp (spațiu).

Sarcinile electrice de polarizare determină un cîmp electric de intensitate  $\vec{E}'$  orientat în sens opus cîmpului electric exterior  $\vec{E}_0$  (fig. 1-35), astfel încît în mediul dielectric intensitatea cîmpului electric rezultat este :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad (E < E_0). \quad (1-67)$$

În concluzie, *intensitatea cîmpului electric în dielectric se micșorează datorită sarcinilor electrice de polarizare*. În nici un caz însă, această intensitate de cîmp nu devine nulă, așa ca la metale, deoarece, dacă, prin absurd, se presupune că intensitatea cîmpului electric în dielectric este egală cu zero, starea de polarizare a dielectricului dispare, nemaexistînd un cîmp electric care să o întrețină. Ar rezulta  $\vec{E}' = 0$  și  $\vec{E} = \vec{E}_0$ , adică se revine la cîmpul electric inițial.

Dacă cîmpul electric cu intensitatea  $\vec{E}_0$  este creat numai de sarcini electrice libere  $Q$ , atunci cîmpul electric în dielectric este determinat atît de sarcinile electrice libere  $Q$ , cît și de sarcinile electrice de polarizare  $Q'$ . Considerînd aceste sarcini cu repartiție volumetrică, cu densitățile  $\rho_0$  și  $\rho'_0$ , rezultă :

$$\vec{E} = \int \frac{(\rho_0 + \rho'_0) d o}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \int \frac{\rho_0 d o}{4 \pi \epsilon r^2} \vec{u}_r, \quad (1-68)$$

unde

$$\frac{\rho_0 + \rho'_0}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon}; \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho'_0} > 1, \quad (1-69)$$

$\epsilon$  fiind permitivitatea absolută (constanta dielectrică) a mediului dielectric ( $\epsilon > \epsilon_0$ ).

În consecință, *intensitatea cîmpului electric produs în mediul dielectric de sarcinile libere  $Q$  este mai mică decît intensitatea cîmpului electric produs în vid de aceleași sarcini*.



### 1.5.4. PERMITIVITATEA RELATIVĂ ȘI ABSOLUTĂ

Pe baza celor explicate la paragraful precedent, permitivitatea relativă a unui mediu dielectric se definește prin raportul :

$$\epsilon_r = \frac{E_0}{E} > 1, \quad (1-70)$$

fiind o mărime adimensională, a cărei valoare depinde de natura mediului dielectric.

Permitivitatea electrică absolută (constanta dielectrică) este :

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad (1-71)$$

unde  $\epsilon_0$  este permitivitatea vidului.

În tabela 1-1 sînt prezentate valorile permitivității relative pentru cîteva materiale izolatoare mai des întîlnite și folosite în practică. Se remarcă faptul că permitivitatea relativă a aerului este foarte apropiată de cea a vidului ( $\epsilon_{0r}=1$ ).

### 1.5.5. RIGIDITATEA DIELECTRICĂ

Introducînd un dielectric într-un cîmp electric a cărui intensitate  $\vec{E}$  se măsoară treptat, la o anumită valoare a intensității cîmpului forța  $\vec{F}=q\vec{E}$  ce acționează asupra electronilor devine atît de mare încît învinge forțele interne, de natură elastică, care se opun desprinderii electronilor de formațiunile structurale cărora le aparțin. Electronii sînt smulși din aceste formațiuni și devin liberi, putîndu-se mișca în spațiul interatomic ca la metale. În această situație, dielectricul pierde proprietatea de izolatant, fenomenul fiind cunoscut sub denumirea de *străpungere dielectrică*.

Valoarea maximă a intensității cîmpului electric, la care poate fi supus materialul fără a se produce străpungere, se numește *rigiditate dielectrică*.

Practic, rigiditatea dielectrică reprezintă raportul dintre tensiunea aplicată la electrozi și grosimea plăcii dielectrice introdusă între electrozi și se măsoară în V/m sau kV/cm.

Tabela 1-1

Permitivitatea relativă și rigiditatea dielectrică a unor medii dielectrice.

Materialul	$\epsilon_r$	Rigiditatea la 20 °C și 50 Hz [kV/cm]
Aer	1,006 (0 °C ; 760 mm Hg)	22...30
Apă distilată	80...81	—
Ulei de transformator	2,2...2,5	125...150
Cauciuc	2,6...3	150...250
Sticlă	5...10	160...400
Lemn uscat	2,5...4,5	50...70
Mica	4,5...7,5	600...700
Porțelan	5,5...8	300...400
Hirtie impregnată în ulei	3...4,3	300...600
Prespan	3...5	1 000

*Tensiunea de străpungeră*, respectiv rigiditatea dielectrică a unui material, depinde de calitățile lui naturale și de condițiile de fabricație și conservare, cum ar fi: porozitatea, densitatea, conținutul de umiditate, temperatură, îmbătrânire etc. De asemenea, valoarea rigidității măsurate depinde și de condițiile de încercare, de grosimea dielectricului, de forma și dimensiunea electrozilor aparatului de încercat, de forma și distribuția cîmpului electric, de durata încercării etc.

Valorile rigidității dielectrice la temperatura de 20 °C și frecvența de 50 Hz ale principalelor materiale izolante folosite în tehnică sînt date în tabela 1-1.

**Aplicația 1-8:** Ștîind că rigiditatea dielectrică a aerului, în anumite condiții de presiune și temperatură, este 30 kV/cm, să se determine raza minimă a unei sfere metalice ce se găsește la potențialul de 100 kV pentru ca intensitatea cîmpului electric în aer, în imediata vecinătate a sferei, să nu depășească rigiditatea dielectrică.

*Rezolvare.* Se consideră că potențialul electric  $V=100$  kV al punctelor de pe suprafața sferei metalice și intensitatea cîmpului electric  $E=30$  kV/cm în punctele din aer din vecinătatea acestei suprafețe sînt produse de o sarcină electrică punctiformă,  $Q$ , situată în centrul sferei. Sfera fiind departe de pămînt și de alte corpuri, se obțin :

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r_{min}}, \quad E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r_{min}^2},$$

$$\frac{V}{E} = r_{min} = \frac{100 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^3 \cdot 10^2} = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Dacă raza sferei este mai mică decît  $r_{min}$ , rigiditatea dielectrică a aerului este depășită și în stratul de aer din jurul sferei apar descărcări electrice luminescente. Acest fenomen este cunoscut sub denumirea de *efect corona* și prezintă importanță la liniile de înaltă și foarte înaltă tensiune, la care, pentru a se evita acest efect, diametrul conductoarelor liniei trebuie să fie mai mare decît o valoare minimă.

### 1.5.6. VECTORUL DE POLARIZARE ELECTRICĂ

Pentru caracterizarea locală a stării de polarizare a unui mediu dielectric se folosește mărimea fizică vectorială  $\vec{P}$ , denumită vectorul de polarizare electrică, definită prin relația :

$$\vec{P} = \lim_{\Delta o \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta o}, \quad (1-72)$$

unde  $\sum \vec{p}$  este suma vectorială a momentelor electrice ale dipolilor situați în elementul de volum  $\Delta o$ .

Evident că vectorul de polarizare depinde exclusiv de sarcinile electrice de polarizare și, pentru un singur dipol, are același sens cu  $\vec{p}$ .

Dacă mediul dielectric are atît polarizare electrică temporară, cît și polarizare electrică permanentă, vectorul de polarizare constă din două componente aditive, corespunzătoare celor două polarizări, adică :

$$\vec{P} = \vec{P}_t + \vec{P}_p. \quad (1-73)$$

Se arată în continuare că vectorul de polarizare  $\vec{P}$  depinde de sarcinile electrice de polarizare  $Q'$ , luate cu semn schimbat. Pentru aceasta, se calculează fluxul vectorului  $\vec{P}$  printr-o suprafață închisă  $S_i$ , de formă cilindrică, cu înălțimea  $\Delta l$  foarte mică și suprafața bazei  $\Delta s$ , situată parte în dielectricul polarizat și parte în vid sau în aer (fig. 1-36, a). În vid (aer) nu apare fenomenul de

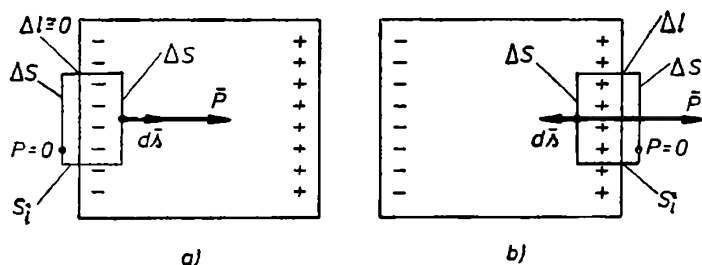


Fig. 1-36. Figură explicativă pentru calculul fluxului vectorului  $\vec{P}$ :

- a -  $S_i$  închide sarcini de polarizare superficiale negative;  
b -  $S_i$  închide sarcini de polarizare superficiale pozitive.

polarizare electrică, deci  $\vec{P}=0$ . Sarcina electrică de polarizare, situată în volumul  $\Delta o = \Delta s \Delta l$  închis de suprafața  $S_i$ , este negativă,  $\Delta Q' < 0$ . Se poate scrie :

$$-\Delta Q' = |\Delta Q'| = \frac{|\Delta Q'| \Delta l}{\Delta o} \Delta s = \frac{\sum \vec{P}}{\Delta o} \Delta s,$$

de unde, prin trecere la limită, cînd  $\Delta o \rightarrow 0$ , și ținînd seama de relația (1-72), rezultă :

$$-dQ' = \vec{P} d\vec{s}, \quad (1-74)$$

unde produsul scalar  $\vec{P} d\vec{s}$  este pozitiv și diferit de zero numai pentru suprafața  $\Delta s$  din dielectric, iar vectorii  $\vec{P}$  și  $d\vec{s}$  sînt coliniari. De asemenea,  $-dQ' > 0$ .

Prin integrarea relației (1-74) se obține :

$$\int_{S_i} \vec{P} d\vec{s} = -\Delta Q', \quad (1-75)$$

de unde rezultă că fluxul vectorului  $\vec{P}$  printr-o suprafață închisă este egal cu suma sarcinilor de polarizare situate în interiorul acelei suprafețe, luate cu semn schimbat.

Se subliniază faptul că relația (1-75) își păstrează valabilitatea și dacă suprafața  $S_i$  închide sarcini de polarizare pozitive (fig. 1-36, b). În acest caz  $-\Delta Q' < 0$  și  $\vec{P} d\vec{s} < 0$  deoarece vectorii  $\vec{P}$  și  $d\vec{s}$  sînt în opoziție pentru suprafața  $\Delta s$  din dielectric.

Dacă sarcina de polarizare  $Q'$  este volumetrică, cu densitatea  $\rho_0$ , relația (1-75) devine :

$$\int_{S_i} \vec{P} d\vec{s} = -\int_0 \rho_0 d\vec{o}. \quad (1-76)$$

Dimensiunea vectorului  $\vec{P}$  rezultă din (1-75), adică C/m<sup>2</sup>.

### 1.5.7. LEGEA POLARIZĂRII ELECTRICE TEMPORARE

Starea locală a polarizării electrice temporare a unui dielectric este dependentă de intensitatea câmpului electric ce se stabilește în dielectric.

Legea polarizării electrice temporare precizează că vectorul de polarizare  $\vec{P}_t$ , corespunzător polarizării electrice temporare, este proporțional cu intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  ce se stabilește în dielectric :

$$\vec{P}_t = \epsilon_0 \eta_e \vec{E}, \quad (1-77)$$

unde  $\eta_e$  este *susceptibilitatea electrică*, o constantă de material adimensională. Pentru vid (și aer)  $\eta_e = 0$ .

### 1.6. LEGEA LEGĂTURII DINTRE $\vec{D}$ , $\vec{E}$ și $\vec{P}$

În orice punct al unui mediu dielectric și în orice moment, experiența dovedește că este valabilă următoarea relație (lege) de legătură între vectorii  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  și  $\vec{P}$  :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1-78)$$

În mediile dielectrice izotrope, vectorii  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  și  $\vec{P}$  sînt coliniari (fig. 1-37, a), iar în mediile anizotrope nu sînt coliniari (fig. 1-37, b).

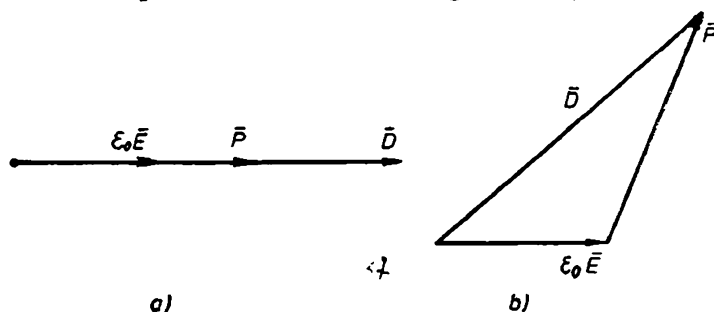


Fig. 1-37. Vectorii  $\epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{D}$  și  $\vec{P}$  coliniari (a) și necoliniari (b).

Pentru medii dielectrice izotrope și fără polarizare electrică permanentă avem  $\vec{P}_p = 0$  și  $\vec{P}_t = \vec{P}$  și din relațiile (1-77) și (1-78) rezultă :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \eta_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \eta_e) \vec{E}$$

sau

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (1-79)$$

unde

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 (1 + \eta_e) = \epsilon_0 \epsilon_r, \\ \epsilon_r &= 1 + \eta_e. \end{aligned} \quad (1-80)$$

Prin înlocuirea relației (1-79) în (1-78) se obține :

$$\epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E},$$

de unde rezultă că în vid  $\vec{P} = 0$ , deoarece  $\epsilon = \epsilon_0$ .

Dacă mediul dielectric are și polarizare electrică permanentă, legea legăturii dintre  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  și  $\vec{P}$  se exprimă prin relația :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P}_p, \quad (1-81)$$

unde s-a avut în vedere că  $\vec{P} = \vec{P}_i + \vec{P}_p = \epsilon_0 \eta_e \vec{E} + \vec{P}_p$ .

Dimensiunile vectorului inducției electrice  $\vec{D}$  sînt aceleași ca și dimensiunile vectorului de polarizare  $\vec{P}$ , adică C/m<sup>2</sup> (relația 1-78).

La mediile dielectrice liniare permitivitatea  $\epsilon$  este constantă, independentă de intensitatea cîmpului electric  $\vec{E}$ . În această situație, legătura dintre valorile inducției electrice  $\vec{D}$  și valorile intensității cîmpului electric  $\vec{E}$  este o dreaptă (fig. 1-38, a).

La mediile dielectrice neliniare, permitivitatea depinde de intensitatea cîmpului electric,  $\epsilon(\vec{E})$ . În această situație, legătura dintre valorile lui  $\vec{D}$  și  $\vec{E}$  este o curbă (fig. 1-38, b).

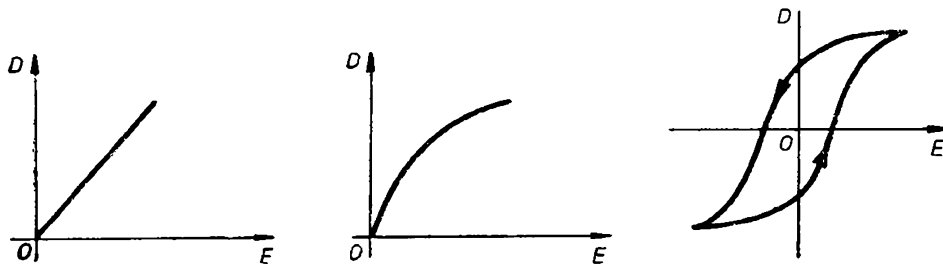


Fig. 1-38. Dependența dintre  $D$  și  $E$  :

a — pentru medii liniare; b — pentru medii neliniare; c — pentru medii cu histerezis electric.

Există și dielectrici la care starea de polarizare la un moment dat depinde de starea de polarizare anterioară (ex. titanat de bariu), adică apare fenomenul de *histerezis electric* (fig. 1-38, c).

**Aplicația 1-9.** Într-un punct dintr-un mediu dielectric izotrop, cu permitivitatea relativ  $\epsilon_r = 4$ , fără polarizare electrică permanentă, se stabilește un cîmp electric de intensitate  $E = 2 \cdot 10^6$  V/m. Să se determine valorile inducției electrice  $D$  și a vectorului de polarizare  $P$  în punctul considerat.

**Rezolvare.** Susceptivitatea electrică a mediului considerat este:  $\eta_e = \epsilon_r - 1 = 3$  (relația 1-80).

Din legea legăturii dintre  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  și  $\vec{P}$  exprimată pentru medii izotrope și fără polarizare electrică permanentă (relația 1-79) se obține:  $D = \epsilon_0 \epsilon_r E = 71 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup>.

Din legea polarizării electrice temporare (relația 1-77) rezultă:  $P = \epsilon_0 \eta_e E = 53,2 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup>.

## 1.7. LEGEA FLUXULUI ELECTRIC

Prin flux electric se înțelege integrala de suprafață a vectorului inducției electrice :

$$\psi = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}. \quad (1-82)$$

Acest flux poate fi calculat pentru o suprafață  $S$  deschisă, ce se sprijină pe un contur  $\Gamma$  (fig. 1-39, *a*), sau pentru o suprafață închisă  $S_i$  (fig. 1-39, *b*). În ambele cazuri trebuie precizat sensul elementului de suprafață  $d\vec{s}$ , așa cum s-a explicat la paragraful 1.3.5.

În funcție de unghiul  $\alpha$  dintre vectorii  $\vec{D}$  și  $d\vec{s}$ , care se înmulțesc scalar, fluxul electric poate obține valori pozitive sau negative.

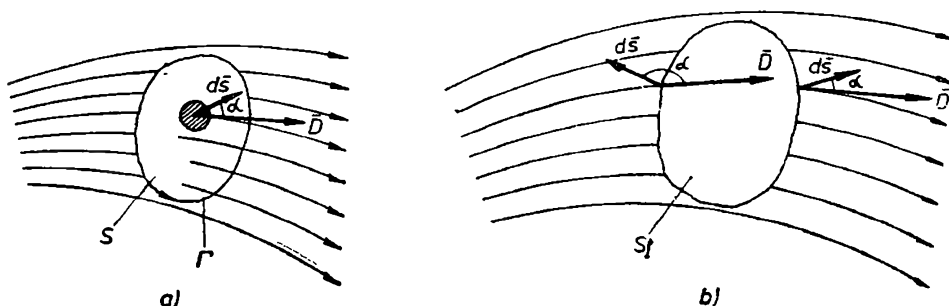


Fig. 1-39. Fluxul electric :

*a* — prin suprafață deschisă; *b* — prin suprafață închisă.

Legea fluxului electric sub formă integrală precizează că pentru orice suprafață închisă din câmpul electric și în orice moment fluxul electric este egal cu suma algebrică a sarcinilor electrice libere existente în interiorul acelei suprafețe, adică :

$$\int_{S_i} \vec{D} \, d\vec{s} = \Sigma Q. \quad (1-83)$$

Dacă în interiorul suprafeței închise  $S_i$  se găsesc numai sarcini electrice volumetrice cu densitatea  $\rho_0$ , relația (1-83) devine :

$$\int_{S_i} \vec{D} \, d\vec{s} = \int_O \rho_0 dO, \quad (1-84)$$

unde  $O$  este volumul închis de suprafața  $S_i$ .

Legea fluxului electric este o lege generală a câmpului electromagnetic, deci valabilă atât în regimul static, cât și în regimul variabil al câmpului electric.

Din legea fluxului electric sub formă integrală se poate deduce teorema lui Gauss (v. paragraful 1.3.5). Astfel, din relațiile (1-83) și (1-78) se obține :

$$\int_{S_i} \vec{D} \, d\vec{s} = \Sigma Q = \int_{S_i} \epsilon_0 \vec{E} \, d\vec{s} + \int_{S_i} \vec{P} \, d\vec{s},$$

de unde, ținând seama că  $\int_{S_i} \vec{P} \, d\vec{s} = -\Sigma Q'$  (relația (1-75), rezultă :

$$\int_{S_i} \vec{E} \, d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma (Q + Q') \quad (1-85)$$

sau

$$\int_{S_i} \vec{E} \, d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon} \Sigma Q. \quad (1-86)$$

Deci, integrala de suprafață închisă a vectorului intensității câmpului electric este proporțională cu suma algebrică a sarcinilor electrice libere ( $Q$ ) și legate ( $Q'$ ).

## Precizări

1. Vectorul  $\vec{P}$  depinde numai de sarcinile legate (de polarizare) luate cu semn schimbat (relația 1-75).

2. Vectorul  $\vec{D}$  depinde de sarcinile electrice libere (relația 1-82). Fie un condensator electric plan încărcat cu sarcinile electrice libere  $+Q$  și  $-Q$ , între armăturile căruia există un câmp electric uniform. Spațiul dintre armături se consideră ocupat de trei dielectrici omogeni, de grosime constantă, cu permitivitățile  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$  (fig. 1-40). Dacă armăturile condensatorului sînt izolate față de alte corpuri și dacă se modifică natura dielectricului dintre armături, sarcinile electrice libere de încărcare a condensatorului nu se modifică. Deoarece inducția electrică depinde exclusiv de sarcinile electrice libere, se obține :

$$\vec{D}_0 = \vec{D}_1 = \vec{D}_2$$

sau

$$\epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_2 \vec{E}_2, \quad (1-87)$$

unde  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$  sînt intensitățile câmpului electric în cele trei medii dielectrice, invers proporționale cu constantele dielectrice ale acestor medii (v. paragraful 1.8.6).

3. Intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  într-un mediu dielectric depinde atît de sarcinile electrice libere, cît și de cele legate (de polarizare) (relația 1-85).

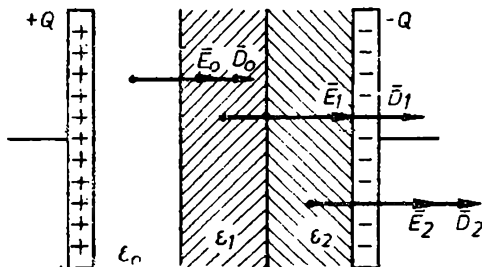


Fig. 1-40. Condensator plan cu trei straturi dielectrice.

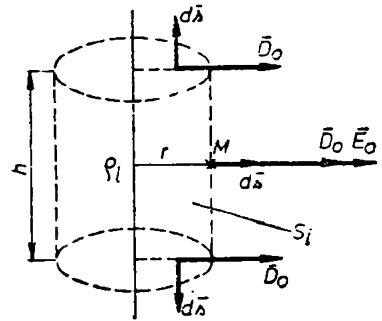


Fig. 1-41. Figură explicativă pentru calculul fluxului electric.

**Aplicația 1-10.** Un conductor filiform drept, infinit de lung, situat în vid (sau aer), este încărcat cu sarcina electrică lineiformă, uniform distribuită, de densitate  $\rho_l$ . Să se determine inducția electrică  $\vec{D}_0$ , intensitatea câmpului electric  $\vec{E}_0$  și potențialul  $V$  într-un punct  $M$  situat la distanța  $r$  de conductor.

**Rezolvare.** Se aplică legea fluxului electric sub formă integrală (relația 1-83). Pentru aceasta se consideră o suprafață închisă  $S_i$  de formă cilindrică, de rază  $r$  și înălțimea  $h$ , care trece prin punctul  $M$  (fig. 1-41). Rezultă :

$$\int_{S_i} \vec{D}_0 \cdot d\vec{s} = \rho_l h.$$

Se ține seama că produsul scalar  $\vec{D}_0 \cdot d\vec{s} = 0$  pentru suprafețele bazelor cilindrului, unde vectorii  $\vec{D}_0$  și  $d\vec{s}$  sînt ortogonali, și  $\vec{D}_0 \cdot d\vec{s} = D_0 ds$ ,  $D_0 = \text{const.}$  pentru suprafața laterală. Deci

$$D_0 \int_{S_{lat}} ds = \rho_l h \text{ sau } D_0 2\pi rh = \rho_l h,$$

de unde se obține :

$$D_0 = \frac{\rho_l}{2 \pi r}.$$

Intensitatea cîmpului electric în punctul  $M$  are valoarea :

$$E_0 = \frac{D_0}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0 r}.$$

Din observația că vectorul  $\vec{E}_0$  are o orientare radială (de la conductor spre infinit), rezultă :

$$\vec{E}_0 = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \quad \text{sau} \quad E_0 = -\frac{dV}{dr}.$$

Înlocuind aici valoarea obținută mai sus pentru  $E_0$ , se obține :

$$\frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0 r} = -\frac{dV}{dr} \quad \text{sau} \quad dV = -\frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0} \frac{dr}{r}$$

sau, prin integrare, rezultă următoarea expresie pentru potențialul electric :

$$V = -\frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0} \ln r + C.$$

Constanta de integrare  $C$  se determină din condiția ca la o distanță  $r_0$  foarte mare de conductor, potențialul electric să fie nul, adică

$$0 = -\frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0} \ln r_0 + C; \quad C = \frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0} \ln r_0.$$

Înlocuind această valoare a constantei de integrare în expresia potențialului electric, se obține așa-numita *formulă logaritmică a potențialului* :

$$V = \frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (1-88)$$

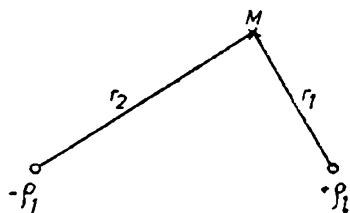


Fig. 1-42. Două conductoare filiforme, paralele, încărcate cu sarcini electrice de semne opuse.

Dacă cîmpul electric este produs de două conductoare filiforme, paralele și infinit de lungi, încărcate cu sarcini electrice uniforme distribuite și de semne opuse (fig. 1-42), se obține:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_1} + \frac{-\rho_l}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_2}$$

sau

$$V = \frac{\rho_l}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1-89)$$

## 1.8. CONDENSATOARE. CAPACITATEA ELECTRICĂ A CONDENSATOARELOR

Ansamblul format din două corpuri metalice (armături), separate între ele printr-un mediu dielectric neîncărcat cu sarcini electrice libere, între care se stabilește un cîmp electric complet se numește *condensator electric*.

Parametrul prin care se caracterizează un condensator electric este *capacitatea electrică*.



### 1.8.1. CAPACITATEA TUBULUI DE CÎMP ELECTRIC

Se consideră un tub de cîmp din cîmpul electric existent în spațiul dintre două corpuri metalice  $M_1$  și  $M_2$  încărcate cu sarcini electrice superficiale libere,  $Q_1$  și  $Q_2$ , de semne opuse (fig. 1-43). Potențialele la care se găsesc cele două corpuri metalice sînt  $V_1$  și  $V_2$ .

Mai întîi se justifică faptul că sarcinile electrice  $\Delta Q_1$  și  $\Delta Q_2$ , de pe suprafețele  $\Delta S_1$  și  $\Delta S_2$  de la capetele tubului de cîmp, sînt egale și de semne opuse. În adevăr, din legea fluxului electric se obține :

$$\int_{S_i} \vec{D} \, d\vec{s} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0 \quad (1-90)$$

deoarece pentru suprafața laterală a tubului de cîmp vectorii  $\vec{D}$  și  $d\vec{s}$  sînt ortogonali, iar în punctele suprafețelor  $\Delta S_1$  și  $\Delta S_2$  situate în metal avem  $\vec{D} = 0$  ( $S_i$  este suprafața închisă a tubului de cîmp, compusă din suprafața laterală și suprafețele  $\Delta S_1$  și  $\Delta S_2$ ). Rezultă deci,  $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$ .

În general, dacă toate liniile de cîmp care încep de pe corpul metalic încărcat cu sarcinile electrice pozitive  $Q_1$  se sfîrșesc pe corpul metalic încărcat cu sarcinile electrice negative  $Q_2$ , atunci :  $Q_1 + Q_2 = 0$  ( $Q_1 > 0$ ), iar cîmpul electric dintre cele două corpuri metalice (armături) este un *cîmp electric complet*.

Dacă suprafața  $S_i'$  închide în interiorul său numai sarcina electrică  $\Delta Q_1$ , tubul de cîmp sfîrșindu-se cu suprafața  $\Delta S$  situată în dielectricul dintre armăturile metalice (fig. 1-43), atunci :

$$\int_{S_i'} \vec{D} \, d\vec{s} = \Delta Q_1$$

sau

$$\int_{\Delta S} D \, ds = \Delta Q_1, \quad (1-91)$$

unde s-a ținut seama de cele precizate mai sus referitoare la valoarea nulă a integralei pentru suprafața laterală și pentru suprafața  $\Delta S_1$ .

*Rezistența dielectrică* a unui tub elementar de cîmp electric, de lungime  $l$ , se definește prin relația :

$$R_d = \int_l \frac{\vec{E} \, d\vec{l}}{\int_{\Delta S} \vec{D} \, d\vec{s}} = \int_l \frac{E \, dl}{D \, \Delta S} = \int_l \frac{E \, dl}{\epsilon E \, \Delta S} = \int_l \frac{dl}{\epsilon \, \Delta S}, \quad (1-92)$$

în care s-a ținut seama că vectorii  $\vec{E}$ ,  $d\vec{l}$ ,  $\vec{D}$  și  $d\vec{s}$  sînt coliniari și că  $D = \text{const.}$  în toate punctele suprafeței  $\Delta S$ .

Pentru tubul de cîmp dintre corpurile metalice  $M_1$  și  $M_2$  se obține :

$$R_{d12} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dl}{\epsilon \, \Delta S} \quad (1-93)$$

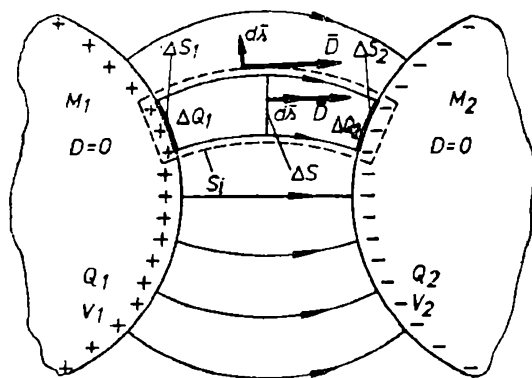


Fig. 1-43. Cîmpul electric între două corpuri metalice încărcate cu sarcini superficiale de semne opuse.

sau, în alt fel :

$$R_{d12} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\bar{E} d\vec{l}}{\int_{\Delta S} \bar{D} d\vec{s}} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\bar{E} d\vec{l}}{\Delta Q_1} = \frac{1}{\Delta Q_1} \int_{M_1}^{M_2} \bar{E} d\vec{l} = \frac{V_1 - V_2}{\Delta Q_1}, \quad (1-94)$$

unde s-a ținut seama de relația (1-91), precum și de relația cunoscută :

$$\int_{M_1}^{M_2} \bar{E} d\vec{l} = V_1 - V_2.$$

Capacitatea electrică a tubului de câmp este definită astfel :

$$C_{12} = \frac{1}{R_{d12}} = \frac{\Delta Q_1}{V_1 - V_2}. \quad (1-95)$$

Experiența a dovedit că pentru orice condensator electric constituit din două armături metalice, separate prin dielectricul de permitivitate  $\epsilon$ , între care se stabilește un câmp electric complet, raportul dintre sarcina electrică liberă, pozitivă,  $Q_1$ , cu care este încărcată una dintre armături și diferența de potențial  $V_1 - V_2$  dintre cele două armături se păstrează constant, fiind denumit *capacitatea electrică a condensatorului* :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}. \quad (1-96)$$

Capacitatea electrică este un parametru (mărime fizică) ce depinde de forma, dimensiunile și poziția reciprocă a armăturilor, precum și de permitivitatea dielectricului dintre armături.

Unitatea de măsură pentru capacitatea electrică, în sistemul de unități MKSA, se numește farad (simbol F) :  $1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$ . Această unitate este foarte mare, motiv pentru care în practică se folosesc submultipli : microfaradul, nanofaradul și picofaradul.

### 1.8.2. CAPACITATEA ELECTRICĂ A CONDENSATORULUI PLAN

Condensatorul plan are armăturile plane și paralele, despărțite printr-un dielectric cu permitivitatea  $\epsilon$  și grosime relativ mică (fig. 1-44). Suprafața armăturilor este  $S$ , sarcinile electrice de pe armături sînt  $Q_1$  și  $Q_2$  ( $Q_1 + Q_2 = 0$ ,  $Q_1 > 0$ ) iar diferența de potențial dintre armături este  $V_1 - V_2$ .

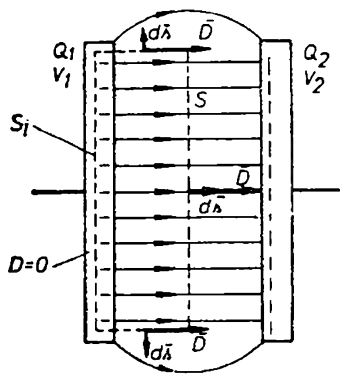


Fig. 1-44. Condensatorul plan.

Exceptînd zonele marginale, în spațiul dintre armături câmpul electric este omogen, ceea ce înseamnă :  $\bar{E} = \text{const.}$  și  $\bar{D} = \text{const.}$

Pentru a stabili relația de calcul a capacității condensatorului, se determină fluxul electric prin suprafața închisă  $S_i$ , desenată punctat în figură, care închide în interiorul său sarcina electrică  $Q_1$ . Conform legii fluxului electric, se obține :

$$\int_{S_i} \bar{D} d\vec{s} = Q_1. \quad (1-97)$$

Efectuind produsele  $\vec{D} d\vec{s}$ , se constată că acestea sînt diferite de zero numai pentru porțiunea de suprafață din dielectric, paralelă și egală cu suprafața  $S$  a armăturii, deoarece pe părțile laterale  $\vec{D} \perp d\vec{s}$ , iar în armătura metalică  $\vec{D} = 0$ .

Avînd în vedere că în spațiul dintre armături  $\vec{D} = \text{const.}$  și coliniar cu  $d\vec{s}$ , relația (1-97) devine :

$$DS = Q_1 \quad \text{sau} \quad \epsilon ES = Q_1. \quad (1-98)$$

Pe de altă parte, cîmpul electric fiind omogen, se obține :

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}, \quad (1-99)$$

unde  $d$  este distanța dintre armături.

Înlocuind relația (1-99) în (1-98), rezultă :

$$\epsilon \frac{V_1 - V_2}{d} S = Q_1,$$

de unde se deduce relația de calcul a capacității condensatorului plan :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (1-100)$$

Se observă că valoarea capacității este cu atît mai mare cu cît suprafața  $S$  a armăturilor este mai mare, cu cît permitivitatea  $\epsilon$  a dielectricului este mai mare și cu cît distanța  $d$  dintre armături este mai mică.

### 1.8.3. CAPACITATEA ELECTRICĂ A CONDENSATORULUI CILINDRIC

Condensatorul cilindric are armăturile formate din doi cilindri metalici concentrici, cu razele  $r_1$  și  $r_2$  (fig. 1-45).

Ca și în cazul precedent al condensatorului plan, se calculează fluxul electric prin suprafața închisă  $S_i$  de formă cilindrică, cu raza  $r$ , desenată punctat în figură. Deoarece produsul scalar  $\vec{D} d\vec{s}$  este diferit de zero numai pentru punctele de pe suprafața laterală a cilindrului, unde  $\vec{D} \parallel d\vec{s}$ , și avînd în vedere că, din motive de simetrie  $D$  are aceeași valoare pentru toate punctele acestei suprafețe laterale, rezultă :

$$\int_{S_i} \vec{D} d\vec{s} = D 2\pi rh = Q_1, \quad (1-101)$$

unde  $h$  este lungimea condensatorului cilindric.

Din relația (1-101) se deduce :

$$D = \frac{Q_1}{2\pi rh} \quad \text{sau} \quad E = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon rh},$$

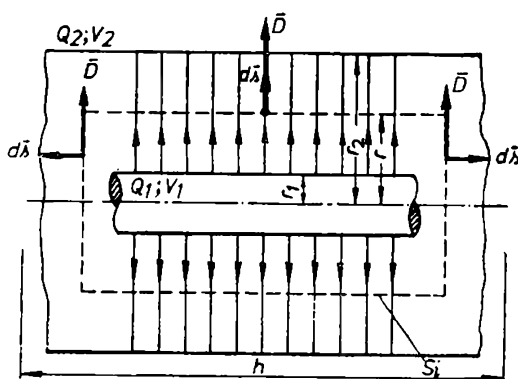


Fig. 1-45. Condensatorul cilindric.

cu care se obține diferența de potențial dintre armături :

$$V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \, d\vec{l} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon h} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (1-102)$$

unde s-a ținut seama că  $d\vec{l} = d\vec{r}$  și  $d\vec{r} \parallel \vec{E}$ .

Expresia de calcul a capacității electrice a condensatorului cilindric rezultă din (1-102) în forma :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (1-103)$$

#### 1.8.4. CAPACITATEA ELECTRICĂ A CONDENSATORULUI SFERIC

În fig. 1-46 este schițat condensatorul sferic. Calculînd fluxul electric prin suprafața sferică cu raza  $r$ , rezultă :

$$\int_{S_i} \vec{D} \, d\vec{s} = D \, 4\pi r^2 = Q_1, \quad (1-104)$$

deoarece, din motive de simetrie,  $D$  are aceeași valoare în toate punctele suprafeței sferice și  $\vec{D} \parallel d\vec{s}$ .

Din relația (1-104) se deduce :

$$D = \frac{Q_1}{4\pi r^2}, \text{ respectiv } E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r^2}.$$

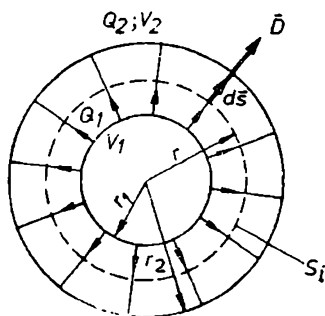


Fig. 1-46. Condensatorul sferic.

Diferența de potențial dintre cele două armături este :

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \, d\vec{l} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \end{aligned} \quad (1-105)$$

deoarece  $d\vec{l} = d\vec{r}$  și  $\vec{E} \parallel d\vec{r}$ .

Pentru relația de calcul a capacității electrice a condensatorului sferic se obține din (1-105) forma :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (1-106)$$

Dacă  $r_2 \rightarrow \infty$ , atunci se obține capacitatea unei sfere metalice cu raza  $r_1$  situată în vid (sau aer) :

$$C_{sf} = 4\pi\epsilon_0 r_1, \quad (1-107)$$

care în sistemul de unități neraționalizat, este :

$$C_{sf} = \epsilon'_0 r_1, \quad (1-108)$$

deoarece

$$\epsilon'_0 = 4 \pi \epsilon_0.$$

Pe baza relației (1-108) s-a introdus la timpul său unitatea de măsură pentru capacitatea electrică denumită centimetru [cm], considerându-se  $\epsilon'_0 = 1$  și fără dimensiuni. S-a spus: sfera metalică cu raza de 1 cm are capacitatea electrică de 1 cm ( $1 \text{ F} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}$ ).

### 1.8.5. GRUPAREA CONDENSATOARELOR

Condensatoarele electrice se pot grupa prin legarea lor în serie, în paralel, mixt sau complex. Aceasta cu scopul de a se obține o anumită capacitate a grupului de condensatoare.

Problema care se pune este de a determina capacitatea echivalentă a condensatoarelor grupate într-un anumit mod, valorile capacităților condensatoarelor din grup fiind cunoscute.

**Gruparea în serie.** Se consideră condensatoarele cu capacitățile  $C_1, C_2, \dots, C_n$  legate în serie (fig. 1-47, a). Capacitatea echivalentă a grupului de condensatoare este  $C_e$  (fig. 1-47, b).

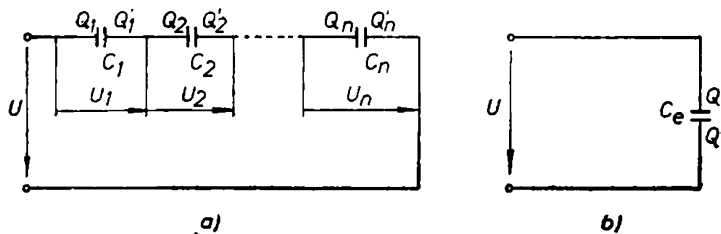


Fig. 1-47. Condensatoare grupate în serie (a) și capacitatea echivalentă (b).

Deoarece  $Q_1 + Q'_1 = 0, Q_2 + Q'_2 = 0, \dots$  și, de asemenea,  $Q'_1 + Q_2 = 0, Q'_2 + Q_3 = 0, \dots$ , rezultă:  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q, Q'_1 = Q'_2 = \dots = Q'_n = Q'$ . Pe de altă parte:  $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  sau  $\frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$ , de unde rezultă:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{C_v}. \quad (1-109)$$

Dacă  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$ , se obține:

$$C_e = \frac{C}{n}. \quad (1-110)$$

Deci, prin legarea în serie a condensatoarelor, se obține o capacitate echivalentă de valoare mai mică. Pentru două condensatoare  $C_1$  și  $C_2$  legate în serie rezultă:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad (1-111)$$

adică capacitatea echivalentă este mai mică decât cea mai mică dintre cele două capacități și tinde către cea mai mică când cea mai mare tinde spre infinit :

$$\lim_{C_2 \rightarrow \infty} C_e = \lim_{C_2 \rightarrow \infty} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = C_1. \quad (1-112)$$

**Gruparea în paralel.** Se consideră condensatoarele cu capacitățile  $C_1, C_2, \dots, C_n$  legate în paralel (fig. 1-48, a). Capacitatea echivalentă a grupului de condensatoare este  $C_e$  (fig. 1-48, b) și se determină după cum urmează :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

sau

$$C_e U = C_1 U + C_2 U + \dots + C_n U,$$

de unde rezultă :

$$C_e = \sum_{v=1}^n C_v. \quad (1-113)$$

Dacă se leagă în paralel  $n$  condensatoare de aceeași capacitate  $C$ , capacitatea echivalentă este :

$$C_e = nC. \quad (1-114)$$

Deci, prin legarea în paralel a condensatoarelor se obține o capacitate echivalentă de valoare mai mare.

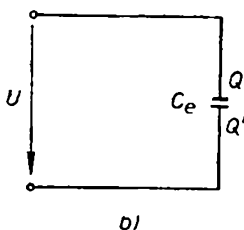
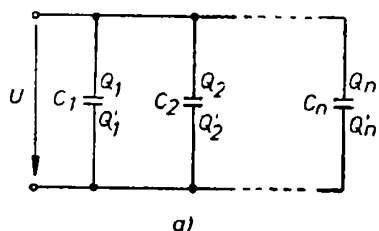


Fig. 1-48. Condensatoare grupate în paralel (a) și capacitatea echivalentă (b).

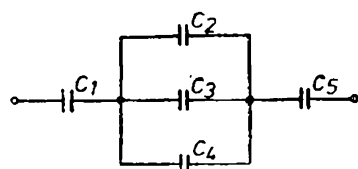


Fig. 1-49. Condensatoare grupate mixt.

**Gruparea mixtă a condensatoarelor.** Capacitatea echivalentă a unui grup de condensatoare legate atât în serie cât și în paralel se calculează avîndu-se în vedere cele arătate mai sus la legarea în serie, respectiv în paralel. De exemplu, capacitatea echivalentă a grupului de condensatoare legate ca în fig. 1-49 se obține din :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3 + C_4} + \frac{1}{C_5}.$$

### 1.8.6. CAPACITATEA UNUI CONDENSATOR CU DOI DIELECTRICI

Există situații când spațiul dintre armăturile unui condensator este ocupat de doi dielectrici, cu permitivitățile  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  și de grosime  $d_1$ ,  $d_2$  (fig. 1-50). Capacitatea unui astfel de condensator se calculează ca și cum ar fi două condensatoare cu capacități:

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{d_2}$$

legate în serie, adică

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}. \quad (1-115)$$

Relația de mai sus a capacității condensatorului cu doi dielectrici se poate obține și ca valoare inversă a rezistenței dielectrice (v. relația 1-95)

$$\frac{1}{C} = R_d = \int_l \frac{dl}{\epsilon S} = \int_{d_1} \frac{dl}{\epsilon_1 S} + \int_{d_2} \frac{dl}{\epsilon_2 S} = \frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}.$$

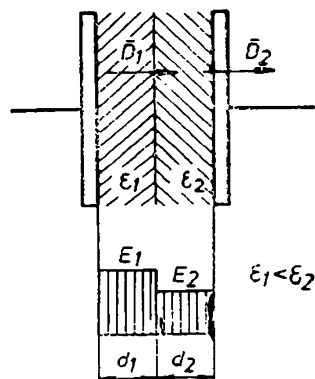


Fig. 1-50. Condensator plan cu doi dielectrici.

Inducția electrică fiind independentă de sarcinile electrice de polarizare (legate), nu își schimbă valoarea de la un dielectric la altul al condensatorului plan cu doi dielectrici, adică  $D_1 = D_2$  sau  $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$ . Rezultă că intensitatea câmpului electric are valoarea mai mare în dielectricul cu permitivitate mai mică. În fig. 1-50 este reprezentat acest lucru pentru cazul când  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , adică  $E_1 > E_2$ .

Dacă dielectricul cu permitivitate mică este un strat subțire de aer datorit lipirii defectuoase a materialului dielectric pe armături atunci, din cauza valorii mari a intensității câmpului electric, poate avea loc depășirea rigidității dielectrice și străpungerea stratului de aer. În această situație și cel de-al doilea dielectric se poate întâmpla să se străpungă deoarece este supus unei diferențe de potențial mai mari sau este deteriorat prin descărcările electrice din primul strat. Condensatorul străpuns (clacat) este scos din funcțiune.

### 1.8.7. VERIFICAREA CONDENSATOARELOR

Un condensator este în stare bună de funcționare dacă dielectricul său nu este străpuns. Verificarea stării unui condensator se poate face prin mai multe metode, dintre care cele mai simple sînt următoarele:

**Verificarea cu ajutorul unui voltmetru.** Se realizează montajul din fig. 1-51, *a*. Se consideră condensatorul în stare inițială descărcat (descărcarea completă a condensatorului se realizează scurtcircuitînd un anumit timp bornele sale). Prin închiderea întreruptorului *K*, condensatorul se încarcă de la sursa cu tensiunea *U*. În primul moment, când condensatorul este descărcat, diferența de potențial dintre armături este egală cu zero ( $V_\alpha - V_\beta = 0$ ), iar voltmetrul *V* indică tensiunea  $U = V_\alpha - V_\beta$  ( $V_\beta = V_\alpha = U$ ).

Dacă dielectricul este în stare bună, pe măsură ce condensatorul se încarcă, diferența de potențial  $V_\alpha - V_\beta$  crește, iar tensiunea măsurată de voltmetru scade (curba 1 din fig. 1-51, b). După încărcarea completă a condensatorului, când  $V_\alpha - V_\beta = U$ , voltmetrul indică tensiune zero.

Dacă dielectricul este străpuns, condensatorul nu se încarcă, iar voltmetrul indică tot timpul tensiunea  $U$  (curba 2 din fig. 1-51, b).

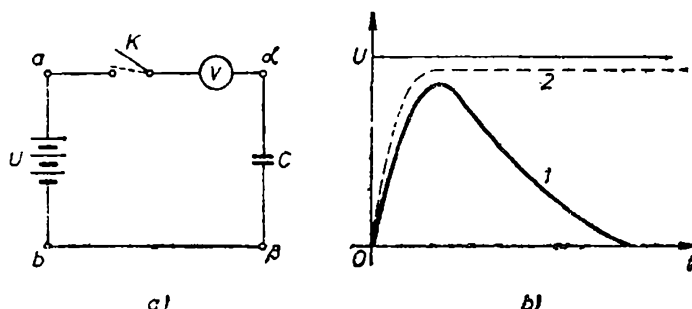


Fig. 1-51. Verificarea condensatorului cu voltmetrul :  
a — schema electrică; b — variația în timp a tensiunii măsurate.

**Verificarea cu ajutorul unui ampermetru.** Se realizează montajul din fig. 1-52, a. După închiderea întreruptorului  $K$ , curentul prin circuit, măsurat de ampermetru, poate să varieze fie după curba 1, fie după curba 2 din fig. 1-52, b. În primul caz dielectricul condensatorului este în stare bună, iar în al doilea caz, condensatorul are dielectricul străpuns, curentul măsurat tot timpul de ampermetru fiind  $\frac{U}{R}$ .

În cazul condensatorului cu dielectricul în stare bună, curentul din circuit nu ajunge la valoarea zero, ci la valoarea  $i_0$ , denumită *curent rezidual*, datorită faptului că dielectricul nu este un izolator perfect.

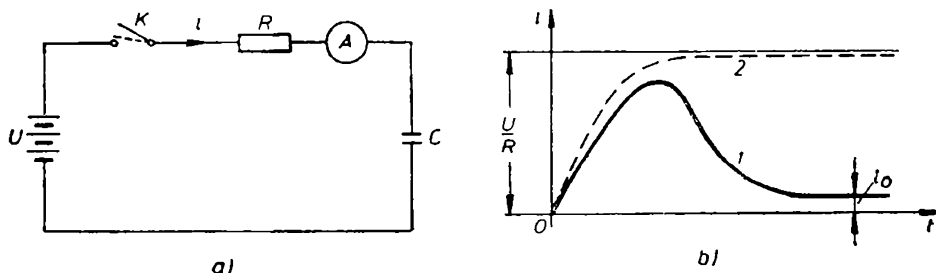


Fig. 1-52. Verificarea condensatorului cu ampermetrul :  
a — schema electrică; b — variația în timp a curentului măsurat.

Rezistența  $R$  legată în serie cu ampermetrul are rolul de a limita valoarea curentului în momentul inițial (imediat după închiderea întreruptorului  $K$ ). În lipsa acestei rezistențe, în circuit apare un șoc de curent foarte mare, a cărui valoare este limitată numai de rezistența interioară a sursei, rezistența interioară a ampermetrului și rezistența conductoarelor de legătură, care sînt foarte mici. Șocul de curent poate fi dăunător pentru ampermetru.



### 1.8.8. CONDENSATOARE INDUSTRIALE

Condensatoarele electrice își găsesc întrebuințare în instalațiile energetice, în telefonie, telegrafie, semnalizare, radio, televiziune etc.

Clasificarea condensatoarelor electrice folosite în industrie se poate face după forma armăturilor, după natura dielectricului, după posibilitatea de modificare a capacității etc.

După forma armăturilor se deosebesc: condensatoare plane, cilindrice, sferice etc.

După natura dielectricului dintre armături, se disting mai multe tipuri de condensatoare.

— Condensatoarele cu vid, de formă cilindrică, așezate în vase etanșe din sticlă în care s-a făcut vid înalt. Rigiditatea dielectrică foarte mare și pierderi practic nule le fac utilizabile la înaltă tensiune și înaltă frecvență.

— Condensatoarele cu aer, mai puțin folosite în instalațiile electrice.

— Condensatoarele cu ulei, folosite în special în instalații energetice la tensiuni de lucru până la 100 kV, ieftine și cu durată lungă de utilizare.

— Condensatoarele cu hîrtie impregnată au ca armături foițe metalice foarte subțiri, iar ca dielectric o foiță de hîrtie specială, foarte subțire și impregnată cu ulei mineral sau cu alte substanțe uleioase. Benzile formate din cele două straturi metalice și cel de hîrtie se înfășoară în rulouri, se usucă în vid, se impregnează, se închid în cutii metalice sau dielectrice și ansamblul astfel format se etanșează. Se folosesc la joasă frecvență.

— Condensatoarele cu dielectric de mase termoplastice, care tind să înlocuiască condensatoarele cu hîrtie. Dielectricul poate fi polistirol sau plasticon.

— Condensatoarele cu mică, care au dielectricul constituit din foițe naturale de mică iar armăturile din foițe de aliaj de staniu cu plumb sau cupru. Se folosesc condensatoare cu mică fixe și ajustabile, la circuite electronice de joasă și înaltă frecvență.

— Condensatoarele ceramice, constituite dintr-un disc sau un cilindru de material ceramic (dielectricul) pe suprafețele căruia se depun pelicule metalice (armăturile).

— Condensatoarele electrolitice sînt condensatoare polarizate, a căror armătură, conectată la potențialul pozitiv (anodul), este o foaie de aluminiu, iar cealaltă armătură, conectată la potențialul negativ (catodul), este constituită dintr-un electrolit care umple un vas din aluminiu în care se introduce anodul. Dielectricul este un strat molecular de oxid de aluminiu creat pe cale electrolitică la suprafața anodului. Grosimea foarte mică a dielectricului face posibilă realizarea unor condensatoare de capacități de la zeci pînă la mii de microfarazi, sub volum mic. Condensatoarele electrolitice se folosesc în special la filtrarea tensiunilor redresate și la acumularea sarcinii în instalații electroterapeutice. Nerespectarea polarității sau aplicarea unei tensiuni alternative conduce la distrugerea condensatorului electrolitic.

După posibilitatea de modificare a capacității se deosebesc: condensatoare fixe, condensatoare variabile și condensatoare ajustabile (trimere).

**Aplicația 1-11.** Două conductoare,  $A$  și  $B$ , rectilinii, filiforme și paralele, de lungime foarte mare, situate în aer la distanța  $2R$  între ele și foarte departe de alte corpuri, respectiv de pămînt, sînt încărcate cu sarcini electrice egale și de semne opuse, uniform distribuite, de densitate  $\rho_l$ . Să se determine capacitatea pe unitatea de lungime între cele două conductoare și să se stabilească ecuația liniilor echipotențiale.

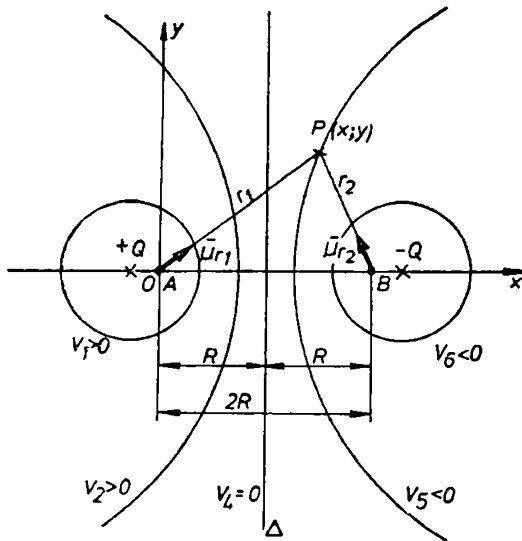


Fig. 1-53. Cercurile lui Apollonius.

Cind punctul  $P$  se găsește pe suprafața conductorului  $B$  avem:  $r_1 = 2R$ ,  $r_2 = R_0$ , cu care se obține:

$$V_B = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{2R}.$$

Deci

$$V_A - V_B = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{2R}{R_0} - \ln \frac{R_0}{2R} \right) = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2R}{R_0}.$$

Capacitatea pe unitatea de lungime este:

$$C = \frac{\rho_l}{V_A - V_B} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2R}{R_0}}.$$

Ecuția liniilor echipotențiale se obține ca loc geometric al punctelor în care potențialul electric este constant ( $V = \text{const.}$ ). Alegînd axele de coordonate ca în fig. 1-53, condiția ca  $V = \text{const.}$  se exprimă prin:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(2R-x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = m^2 \quad (\text{const.})$$

Din acest raport se obține ecuația cercului:

$$x^2 + y^2 + \frac{4R}{m^2 - 1}x = \frac{4R^2}{m^2 - 1}.$$

care are raza  $\frac{2Rm}{m^2 - 1}$  și centrul  $O \left[ -\frac{2R}{m^2 - 1}, 0 \right]$ .

Prin urmare, liniile echipotențiale sînt în formă de cercuri, cunoscute sub denumirea de *cercurile lui Apollonius*. Pentru  $m=1$  ( $r_1=r_2$ ), adică  $V=0$ , cercul obține rază infinită (dreapta  $\Delta$  din fig. 1-53).

*Rezolvare.* Potențialul electric în punctul  $P(x, y)$  (fig. 1-53) se determină cu formula logaritmică (1-89), adică:

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(2R-x)^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

unde s-a ținut seama că  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$  și  $r_2 = \sqrt{(2R-x)^2 + y^2}$ .

Pentru calculul capacității pe unitatea de lungime, se determină potențialele  $V_A$  și  $V_B$  ale celor două conductoare, adică potențialele în punctele situate pe suprafața acestora.

Cind punctul  $P$  se găsește pe suprafața conductorului  $A$  avem:  $r_1 = R_0$ ,  $r_2 = 2R$ ,

$$V_A = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2R}{R_0},$$

unde  $R_0$  este raza secțiunii conductorului  $A$  (respectiv  $B$ ).

## 1.9. ENERGIA ELECTROSTATICĂ. FORȚE

### 1.9.1. ENERGIA ELECTROSTATICĂ

În câmpul electrostatic se înmagazinează energie, denumită energie electrostatică, care este constantă în raport cu timpul deoarece sarcinile electrice care produc câmpul electrostatic sînt invariabile în timp, iar corpurile în stare de repaus.

Energia câmpului electrostatic este egală cu lucrul mecanic total efectuat din exterior pentru a aduce sarcinile electrice de la infinit în pozițiile pe care le au în câmp, adică pentru a încărca corpurile care în stare inițială sînt neîncărcate. Se consideră că această operație se face foarte lent, astfel ca limitele regimului electrostatic să nu fie depășite adică să nu aibă loc dezvoltare de căldură. Creșterea energiei electrostatice cu  $dW_e$  este urmarea efectuării unui lucru mecanic  $dA$ , respectîndu-se principiul de conservare a energiei :

$$dW_e + dA = 0. \quad (1-116)$$

Pe această bază se stabilește expresia de calcul a energiei electrostatice.

Se consideră  $n$  corpuri în stare inițială neîncărcate și în stare finală încărcate cu sarcinile electrice  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots, Q_n$ , respectiv avînd potențialele  $V_1, V_2, \dots, V_k, \dots, V_n$ . Într-o situație intermediară de încărcare, corpurile au sarcinile electrice  $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_k, \dots, Q'_n$ , egale cu o fracțiune din sarcinile finale, adică :

$$Q'_k = \lambda Q_k \quad (0 < \lambda < 1). \quad (1-117)$$

Aceste sarcini electrice intermediare produc într-un punct din spațiu intensitatea câmpului electric  $\vec{E}'$ , iar corpurile respective vor avea potențialele  $V'_1, V'_2, \dots, V'_k, \dots, V'_n$  :

$$V'_k = \lambda V_k. \quad (1-118)$$

Pentru a trece sistemul din starea intermediară considerată în starea infinit apropiată, în care sarcinile de pe corpuri sînt  $Q'_k + dQ_k$ , iar potențialele  $V'_k + dV_k$ , trebuie aduse de la infinit pe corpurile respective sarcinile  $dQ_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), efectuîndu-se pentru aceasta lucrul mecanic :

$$dA = \sum_{k=1}^n \int_{\infty}^{M_k} dQ_k \vec{E}'_k d\vec{l} = \sum_{k=1}^n dQ_k \int_{\infty}^{M_k} \vec{E}' d\vec{l},$$

unde  $dQ_k \vec{E}'$  este forța ce acționează asupra sarcinii  $dQ_k$ . Avînd în vedere că  $\int_{\infty}^{M_k} \vec{E}' d\vec{l} = -V'_k$ , se obține :

$$dA = - \sum_{k=1}^n V'_k dQ_k,$$

respectiv ținînd seama de (1-116), se deduce :

$$dW_e = \sum_{k=1}^n V'_k dQ_k.$$

Înlocuind în această expresie relația (1-118) și avînd în vedere că  $dQ_k = Q_k d\lambda$ , rezultă :

$$dW_e = \sum_{k=1}^n V_k Q_k d\lambda,$$

din care, prin integrare, se obține :

$$W_e = \sum_{k=1}^n V_k Q_k \int_0^1 \lambda d\lambda,$$

adică

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k Q_k. \quad (1-119)$$

Ținînd seama că sarcinile electrice  $Q$  pot avea o repartiție volumetrică și superficială, relația (1-119) se poate scrie în forma :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^1 V \rho_0 d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^1 V \rho_s d\lambda. \quad (1-120)$$

Pentru exemplificare, se calculează energia electrostatică înmagazinată în câmpul electric al unui condensator încărcat. Cele două armături ale condensatorului sînt două corpuri încărcate cu sarcinile electrice  $Q_1$  și  $Q_2$  și avînd potențialele  $V_1$  și  $V_2$ . Rezultă :

$$W_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2).$$

Ținînd seama că  $Q_1 = -Q_2$  și  $U = V_1 - V_2$ , se obține :

$$W_e = \frac{1}{2} Q_1 U. \quad (1-121)$$

Capacitatea condensatorului fiind  $C = \frac{Q_1}{U}$ , din relația (1-121) se deduc și următoarele expresii de calcul a energiei la condensator :

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2, \quad (1-122)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C}. \quad (1-123)$$

Relațiile (1-119) și (1-120) de calcul a energiei electrostatice ar putea să ne conducă la concluzia greșită că această energie este înmagazinată numai în corpuri (unde există sarcina electrică). În realitate, această energie este înmagazinată în câmpul electric existent atât în corpuri, cît și în afara lor.

În cele ce urmează se stabilește o expresie de calcul a energiei electrostatice în funcție de mărimile de stare  $\vec{E}$  și  $\vec{D}$  ale câmpului electric. În acest sens,

se consideră câmpul electric omogen al unui condensator plan, pentru care se scrie :

$$U = Ed ; C = \frac{\epsilon S}{d}$$

și, prin înlocuire în relația (1-122), se obține :

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S d.$$

Energia electrostatică înmagazinată în unitatea de volum a câmpului este :

$$w_e = \frac{W_e}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (1-124)$$

sau, avînd în vedere că  $D = \epsilon E$  și că în medii izotrope vectorii  $\vec{D}$  și  $\vec{E}$  sînt coliniari, rezultă :

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}. \quad (1-125)$$

Deci, energia electrică înmagazinată în întreg câmpul este :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0 \vec{E} \vec{D} d\omega. \quad (1-126)$$

Relația (1-126) are valabilitate generală, inclusiv pentru situația cînd  $\vec{E}$  și  $\vec{D}$  variază în timp (câmpul electromagnetic).

### 1.9.2. FORȚA DE INTERACȚIUNE DINTRE PLĂCILE UNUI CONDENSATOR ELECTRIC

Se consideră un condensator plan (fig. 1-54) la care energia înmagazinată în câmpul său electric este :

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{\epsilon S} x.$$

Se observă că dacă  $Q_1 = \text{const.}$ , adică armăturile sînt izolate față de alte corpuri, energia se mărește atunci cînd armăturile se depărtează, și invers, scade cînd armăturile se apropie.

Conform principiului lui Thomson, orice sistem fizic are tendința de a se situa în starea corespunzătoare unei energii minime. Ca urmare, în cazul condensatorului, există forțe care acționează asupra armăturilor în sensul de a le apropia, astfel ca energia electrostatică să devină minimă.

Forța ce acționează asupra armăturilor se poate exprima ca o forță generalizată (Lagrange) în forma :

$$F = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_{Q_1 = \text{const.}} = - \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{\epsilon S}, \quad (1-127)$$

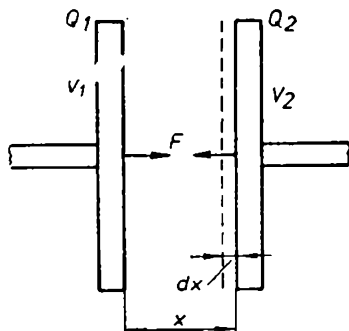


Fig. 1-54. Forța de interacțiune între armăturile condensatorului plan.

unde  $x$  este coordonata generalizată.

Cînd forța generalizată este pozitivă, înseamnă că acționează în sensul creșterii coordonatei generalizate. În cazul de față forța  $\vec{F}$  este negativă, deci acționează în sensul micșorării lui  $x$  (fig. 1-54).

Avînd în vedere că  $Q_1 = CU = \frac{\epsilon S}{x} U$ , relația (1-127) devine :

$$F = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{x^2} U^2. \quad (1-128)$$

Forța specifică ce acționează pe unitatea de suprafață a armăturii condensatorului are valoarea  $\frac{|F|}{S}$ , adică

$$f = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon} \text{ sau } f = \frac{1}{2} \epsilon \left( \frac{U}{x} \right)^2, \quad (1-129)$$

unde  $\rho_s$  este densitatea de suprafață a sarcinii  $Q_1$  de încărcare a condensatorului.

## Capitolul 2

### ELECTROCINETICA

Electrocinetica se ocupă cu studiul stărilor și fenomenelor din interiorul conductoarelor parcurse de curent electric de conducție. Purtătorii mobili de sarcini electrice, a căror mișcare ordonată determină curentul electric de conducție, sînt electronii liberi la metale (conductoare de categoria I-a) și ionii pozitivi și negativi la electroliti (conductoare de categoria II-a). La semi-conductoare, purtătorii mobili de sarcini electrice sînt electronii majoritari și golurile.

Starea electrocinetică a conductoarelor este însoțită de dezvoltare de căldură. La electroliti, formarea ionilor și deplasarea lor este însoțită de reacții chimice. La metale nu se produc reacții chimice prin deplasarea electronilor liberi.

#### 2.1. CARACTERIZAREA STĂRII ELECTROCINETICE A MEDIILOR (CORPURILOR) CONDUCTOARE

Pentru ca electronii liberi din metale, respectiv ionii din electroliti, să se deplaseze în spațiul ocupat de conductoare, trebuie ca asupra lor să acționeze forțe. În starea de echilibru electrostatic s-a văzut că sarcinile electrice sînt în repaus, iar intensitatea cîmpului electric în corpurile metalice este zero. În starea electrocinetică, sarcinile electrice se mișcă ordonat cu o anumită viteză și, pentru aceasta, este necesar ca intensitatea cîmpului electric în metale și în celelalte conductoare să aibă o valoare diferită de zero, ceea ce constituie deosebirea esențială între fenomenul electrostatic și fenomenul electrocinetic.

Menținerea unui cîmp electric  $\vec{E}$  diferit de zero în interiorul conductoarelor poate fi realizată cu ajutorul surselor de curent cum sînt: elementele galvanice, generatoarele electrice rotative etc. De exemplu, legînd capetele unui conductor metalic la două borne între care se menține o diferență de potențial  $V_1 - V_2$  constantă, în interiorul conductorului ia naștere un cîmp electric constant, vectorul  $\vec{E}$  al intensității cîmpului fiind orientat de la capătul cu potențial mai ridicat  $V_1$  spre capătul cu potențial mai scăzut  $V_2$  (fig. 2-1). Asupra unui electron liber din metal acționează forța  $\vec{F} = q\vec{E}$  orientată în sens

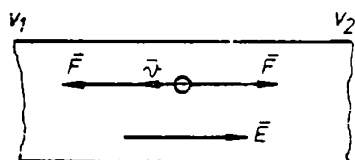


Fig. 2-1. Conductor în stare electrocinetică.

cării. În momentul când  $\vec{F} + \vec{F}_r = 0$ , are loc mișcarea cu viteză constantă a electronului.

Din cele prezentate, reiese că starea electrocinetică este însoțită și de dezvoltare de căldură în interiorul conductoarelor, datorită „frecării” ce are loc la mișcarea sarcinilor electrice.

opus față de  $\vec{E}$ , deoarece  $q < 0$ . Sub acțiunea acestei forțe, electronul se mișcă cu viteza  $\vec{v}$  de la potențialul mai scăzut spre potențialul mai ridicat.

În timpul mișcării electronilor mai apare și forța de frecare  $\vec{F}_r$ , datorită ciocnirilor dintre electron și ceilalți atomi, care se opune miș-

## 2.2. CURENTUL ELECTRIC ȘI DENSITATEA DE CURENT

### 2.2.1. CURENTUL ELECTRIC DE CONDUȚIE

S-a arătat că, sub acțiunea cîmpului electric, purtătorii de sarcini se deplasează, sarcinile negative în sens opus intensității cîmpului electric (sensul în care potențialul crește) iar sarcinile pozitive în același sens cu intensitatea cîmpului electric (sensul în care potențialul scade). Orice mișcare ordonată de sarcini electrice în interiorul unui mediu conductor determină *curentul electric de conducție*.

După natura purtătorilor de sarcini electrice, adică ioni sau electroni, curentul de conducție se numește curent de conducție *ionic* sau *electronic*, iar despre corpul respectiv se spune că prezintă conducție ionică (electrolizii) sau conducție electronică (metalele).

Proprietatea corpurilor de a fi sediul unui curent electric de conducție se numește conductibilitate electrică și se caracterizează local prin mărimea de material numită *conductivitate electrică*.

Pe lângă curentul electric de conducție mai există: curentul electric de convecție, curentul electric de deplasare, curentul electric amperian etc.

*Curentul electric de convecție* constă în mișcarea sarcinilor electrice odată cu elementele de corp care le conțin și în raport cu sistemul de referință față de care se consideră mișcarea macroscopică a acestor elemente. Un exemplu de curent electric de convecție este curentul electric în vid, constituit din mișcarea de ansamblu a electronilor în tuburile electronice.

*Curentul electric de deplasare*. Se consideră o suprafață  $S$  imobilă situată într-un cîmp electric variabil în timp. Curentul electric de deplasare este determinat de viteza de variație a fluxului electric prin suprafața respectivă. Evident că un astfel de curent există numai atunci cînd cîmpul electric este variabil în timp.

*Curentul electric amperian* (molecular) este determinat de mișcarea pe orbite închise a purtătorilor de sarcini electrice, precum și de mișcarea de rotație proprie (de spin) a particulelor elementare încărcate cu sarcini electrice.

Prin definiție, sensul pozitiv al curentului electric este sensul în care se mișcă sarcinile electrice pozitive.



Din punct de vedere cantitativ, intensitatea curentului electric de conducție este egală cu sarcina electrică, atât pozitivă cât și negativă, ce trece printr-o secțiune a conductorului în unitatea de timp :

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} . \quad (2-1)$$

În starea electrocinetică, în care sarcinile electrice se deplasează în conductor cu viteză constantă, curentul electric este constant în timp (curent continuu), adică aceeași secțiune este străbătută de cantități egale de sarcini electrice în intervale de timp egale. Deci,

$$I = \frac{Q}{t} . \quad (2-2)$$

Curentul variabil în timp se notează cu  $i$ , iar curentul continuu (constant în timp) se notează cu  $I$ .

Curentul electric este o mărime de natură scalară, deoarece este definită ca raportul a două mărimi scalare : sarcina electrică și timpul.

Din relațiile (2-1) și (2-2) se deduce sarcina electrică ce trece prin secțiunea conductorului în timpul  $t$  :

$$Q = \int_0^t i \, dt. \quad (2-3)$$

respectiv

$$Q = It. \quad (2-4)$$

Unitatea de măsură pentru curentul electric în sistemul de unități MKSA se numește amper (simbol A).

## 2.2.2. DENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC DE CONDUȚIE

Pentru caracterizarea locală a stării electrocinetice din conductoare se folosește mărimea vectorială notată cu  $\vec{J}$  și denumită densitatea curentului electric de conducție, definită astfel încît fluxul acestui vector printr-o secțiune  $S$  a conductorului să fie egal cu intensitatea curentului electric prin acea secțiune, adică :

$$i = \int_S \vec{J} \, d\vec{s}. \quad (2-5)$$

Sensul vectorului  $\vec{J}$  este același cu sensul în care se mișcă sarcinile electrice pozitive sub acțiunea forței  $\vec{F} = Q\vec{E}$ , adică  $\vec{J}$  are același sens cu intensitatea  $\vec{E}$  a cimpului electric.

Sensul vectorului elementului de suprafață  $d\vec{s}$  se stabilește cu ajutorul regulii burghiului drept după adoptarea prealabilă a sensului pozitiv pentru conturul suprafeței deschise  $S$  (fig. 2-2). Dependent de valorile unghiului  $\alpha$

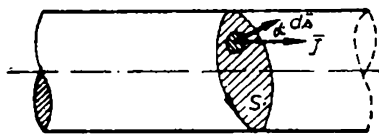


Fig. 2-2. Densitatea curentului electric de conducție într-un punct al secțiunii oarecare a conductorului.

dintre vectorii  $\vec{J}$  și  $d\vec{s}$ , curentul  $i$  poate obține valoare pozitivă sau valoare negativă. Pentru a obține un curent pozitiv prin suprafața deschisă  $S$ , sensul pozitiv pe conturul acestei suprafețe se stabilește cu regula burghiului drept, asociată sensului vectorului  $\vec{J}$ .

În cazul particular, când suprafața  $S$  este secțiunea plană, transversală, a conductorului, iar densitatea de curent  $\vec{J}$  are aceeași valoare și orientare în toate punctele acestei secțiuni, adică  $\vec{J}$  și  $d\vec{s}$  sînt vectori coliniari ( $\alpha=0$ ) și  $\vec{J}=\text{const.}$ , din relația (2-5) se obține :

$$i = JS, \quad J = \frac{i}{S}. \quad (2-6)$$

Pe baza relațiilor (2-6) și (2-1), densitatea curentului de conducție poate fi definită prin cantitatea de sarcini electrice ce străbat unitatea de suprafață în unitatea de timp.

Unitatea de măsură pentru densitatea de curent este amper pe metru patrat [ $\text{A}/\text{m}^2$ ]. Pentru că această unitate este prea mare, secțiunile conductoarelor electrice fiind exprimate, de obicei, în  $\text{mm}^2$ , practic se lucrează cu unitatea  $\text{A}/\text{mm}^2$  :

$$1 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = \frac{1 \text{ A}}{(10^3 \text{ mm})^2} = 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}.$$

Densitatea de curent la conductoarele folosite în construcția mașinilor și aparatelor electrice nu trebuie să depășească anumite valori admisibile pentru ca aceste conductoare să nu se încălzească peste limita admisibilă datorită efectului termic al curentului.

Liniiile la care vectorul densității de curent este tangent se numesc *linii de curent*.

## 2.2.3. DENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC DE DEPLASARE

Se consideră un condensator a cărui stare de încărcare este variabilă în timp (fig. 2-3). Pentru suprafața închisă și imobilă  $S_i$  ce cuprinde în interiorul său armătura încărcată cu sarcina electrică pozitivă  $Q_1$  se aplică legea fluxului electric :

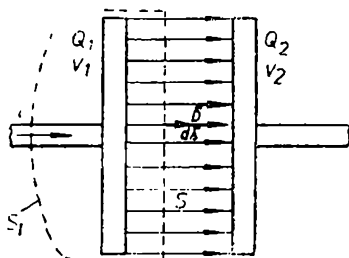


Fig. 2-3. Figură explicativă pentru calculul fluxului electric.

$$\psi = \int_{S_i} \vec{D} d\vec{s} = Q_1.$$

Întrucît  $D \neq 0$  numai în punctele suprafeței  $S$  din dielectric, iar în restul suprafeței  $S_i$  practic  $D=0$ , rezultă :

$$\psi = \int_S \vec{D} d\vec{s} = Q_1. \quad (2-7)$$

În condițiile precizate, curentul electric de deplasare prin suprafața  $S$  este egal cu derivata în raport cu timpul a fluxului electric prin aceeași suprafață :

$$i_D = \frac{d\psi}{dt} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{s}, \quad (2-8)$$

unde

$$\vec{J}_D = \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (2-9)$$

este densitatea curentului electric de deplasare.

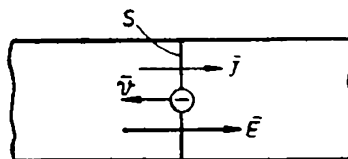
Deci, în conductorul metalic există curentul de conducție cu densitatea  $\vec{J}$ , iar în dielectric există curentul de deplasare cu densitatea  $\vec{J}_D$ , asigurându-se în acest fel continuitatea liniilor de curent în circuitul condensatorului.

Se remarcă faptul că atunci când inducția electrică  $\vec{D}$  este constantă în timp (regim static), rezultă  $\vec{J}_D = 0$ .

#### 2.2.4. LEGĂTURA DINTRE DENSITATEA CURENTULUI DE CONDUȚIE ȘI VITEZA DE MIȘCARE A SARCINILOR ELECTRICE

Se consideră un conductor metalic în care purtătorii de sarcini electrice în mișcare sînt electronii. Densitatea volumetrică a acestor sarcini se notează cu  $\rho_0$ , iar viteza lor de mișcare cu  $\vec{v}$  (fig. 2-4). Într-un interval de timp  $dt$ ,

Fig. 2-4. Densitatea curentului electric de conducție și mișcarea electronilor liberi din metal.



printr-o secțiune transversală  $S$  a conductorului va trece cantitatea de sarcini electrice :

$$dQ = \rho_0 S v dt,$$

de unde rezultă :

$$i = \frac{dQ}{dt} = \rho_0 S v.$$

Pentru densitatea de curent se obține :

$$J = \frac{i}{S} = \rho_0 v$$

sau, vectorial :

$$\vec{J} = \rho_0 \vec{v}. \quad (2-10)$$

Ținând seama că  $\vec{v}$  este în sens opus față de  $\vec{E}$  și că  $\rho_0 < 0$ , rezultă  $\vec{J}$  în același sens cu intensitatea cîmpului electric  $\vec{E}$ .

În cazul conductoarelor electrolitice, la determinarea intensității curentului printr-o suprafață  $S$ , respectiv a densității de curent, trebuie să se ia în considerare că această suprafață este străbătută într-un sens de sarcinile pozitive și în sens opus de sarcinile negative, adică

$$i = \frac{dQ_-}{dt} + \frac{dQ_+}{dt} = (\rho_- v_- + \rho_+ v_+) S,$$

$$J = \rho_- v_- + \rho_+ v_+$$

sau, vectorial :

$$\vec{J} = \rho_- \vec{v}_- + \rho_+ \vec{v}_+. \quad (2-11)$$

De fapt, trecerea unei cantități de sarcini electrice negative prin suprafață într-un sens este echivalentă cu trecerea aceleiași cantități de sarcini pozitive în sens opus, prin aceeași suprafață.

### 2.3. LEGEA CONSERVĂRII SARCINILOR ELECTRICE LIBERE

Se consideră o suprafață închisă  $S_i$  imobilă față de sistemul de referință, în interiorul căreia se găsește sarcina electrică liberă  $Q$  (fig. 2-5). Dacă sarcina electrică  $Q$  din interiorul suprafeței  $S_i$  scade în timp, înseamnă că prin suprafața respectivă trec sarcini electrice negative din exterior spre interior sau sarcini electrice pozitive din interior spre exterior. Mișcarea are loc invers dacă sarcina  $Q$  crește în timp. Deci, prin suprafața  $S_i$  există un curent de conducție. Când sarcina scade, vectorul densității de curent este orientat spre exteriorul suprafeței, iar când crește, spre interior (fig. 2-5).

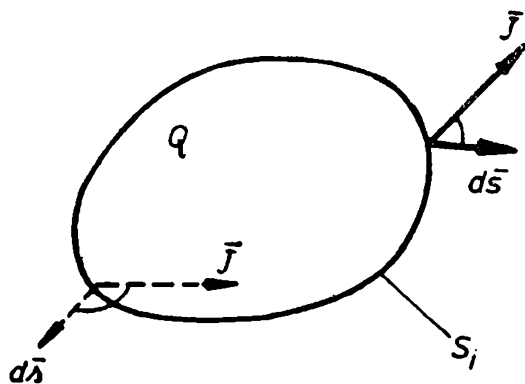


Fig. 2-5. Curentul de conducție prin suprafața închisă.

Legea conservării sarcinilor electrice libere exprimată sub formă integrală precizează că fluxul densității de curent  $\vec{J}$  (intensitatea curentului electric de conducție) prin suprafața închisă  $S_i$  este egal cu viteza de variație în timp, luată cu semn schimbat, a sarcinii electrice libere din interiorul suprafeței, adică :

$$i_{S_i} = \int_{S_i} \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (2-12)$$

Semnul minus se explică prin faptul că atunci când  $Q$  scade,  $dQ < 0$  iar  $\vec{J} \cdot d\vec{s} > 0$  ( $\alpha < 90^\circ$ ), respectiv când  $Q$  crește  $dQ > 0$  iar  $\vec{J} \cdot d\vec{s} < 0$  ( $\alpha > 90^\circ$ );  $dt$  este întotdeauna pozitiv.

În regim electrocinetic staționar, mărimile electrice și magnetice sînt invariabile în timp, deci  $Q = \text{const.}$ ,  $\frac{dQ}{dt} = 0$  și relația (2-12) devine :

$$\int_{S_i} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0, \quad (2-13)$$

adică curentul electric de conducție prin suprafața închisă  $S_i$  este egal cu zero. Același rezultat se obține și în regimul electrocinetic cvazistaționar, pentru care mărimile variază lent în timp, deci  $\frac{dQ}{dt} \cong 0$ .

Din relația (2-13) se deduce prima teoremă a lui Kirchhoff prin care se exprimă legătura dintre curenții de conducție din laturile concurente într-un nod ale unei rețele electrice ce funcționează în regim staționar (curent continuu) sau în regim cvazistaționar (curent alternativ de frecvență joasă).

## 2.4. LEGEA CONDUȚIEI ELECTRICE (LEGEA LUI OHM)

Legea conducției electrice se exprimă fie sub formă locală, fie sub formă integrală.

### 2.4.1. FORMA LOCALĂ

Legea conducției electrice sub formă locală exprimă legătura dintre densitatea curentului de conducție și intensitatea cîmpului electric dintr-un punct al conductorului :

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (2-14)$$

adică, densitatea curentului de conducție  $\vec{J}$  este proporțională cu suma dintre intensitatea cîmpului electric  $\vec{E}$  și intensitatea cîmpului electric imprimat  $\vec{E}_i$ . Factorul de proporționalitate este o mărime fizică scalară, cu dimensiunea  $1/\Omega\text{m}$ , denumită *conductivitatea electrică*, a cărei valoare depinde de natura conductorului (constantă de material).

*Intensitatea cîmpului electric imprimat*,  $\vec{E}_i$ , este o mărime prin intermediul căreia forțele de natură neelectrică ce acționează asupra purtătorilor de sarcini electrice sînt echivalate cu forța produsă de un cîmp electric, adică :

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_{ne}}{Q}. \quad (2-15)$$

Un astfel de cîmp electric imprimat apare datorită unor neomogenități fizico-chimice sau de temperatură existente în lungul conductorului, așa cum este cazul, spre exemplu, la elementele galvanice.

*Rezistivitatea electrică*, notată cu  $\rho$ , se definește prin valoarea inversă a conductivității electrice :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (2-16)$$

și se măsoară în  $\Omega\text{m}$  sau în  $\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ .

Ordonarea unor metale din punctul de vedere al valorilor crescătoare ale rezistivității electrice este : argintul, cuprul, aurul, aluminiul, molibdenul,

zincul, wolframul, tantalul, fierul, cobaltul, nichelul etc. Pentru cupru pur și aluminiu pur, rezistivitatea electrică are valorile :

$$\rho_{Cu} = \frac{1}{57} \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} ; \rho_{Al} = \frac{1}{33} \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} .$$

În tabela 2-1 sînt date valorile rezistivității electrice pentru cîteva materiale uzuale.

Tabela 2-1

Rezistivitatea și coeficientul de temperatură pentru unele conductoare

Materialul	$\rho$ $\Omega \left[ \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right]$	$\alpha_{20^\circ}$ [1/°C]	Materialul	$\rho$ $\Omega \left[ \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right]$	$\alpha_{20^\circ}$ [1/°C]
Alamă	0,07	0,002	Manganină	0,42	0,00001
Aluminiu	0,026	0,004	Mercur	0,958	0,0009
Argint	0,016	0,036	Nichel	0,07	0,006
Aur	0,024	0,0037	Oțel	0,1	0,006
Bronz fosforos	0,115	0,004	Platină	0,1	0,003
Cărbune	60...80	-0,0002... -0,0008	Plumb	0,21	0,004
Constantan	0,49	0,000004	Staniu	0,11	0,0044
Cromnichel	1,1	0,00015	Wolfram	0,055	0,005
Cupru	0,0175	0,004	Zinc	0,06	0,004

Folosind rezistivitatea electrică, forma locală a legii conducției electrice devine :

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}_i) \text{ sau } \vec{E} + \vec{E}_i = \rho \vec{J} \quad (2-17)$$

Pentru conductoarele omogene  $\vec{E}_i = 0$ , respectiv :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} ; \vec{E} = \rho \vec{J}, \quad (2-18)$$

de unde se observă că vectorii  $\vec{J}$  și  $\vec{E}$  sînt coliniari.

Relația (2-18) este denumită legea lui Ohm sub formă locală.

## 2.4.2. FORMA INTEGRALĂ

Legea conducției electrice sub formă integrală exprimă legătura între curentul electric de conducție dintr-un conductor și tensiunea electrică ce acționează în lungul conductorului, respectiv rezistența electrică a conductorului. Experiența dovedește că intensitatea  $i$  a curentului electric este direct proporțională cu tensiunea  $u_l$  și invers proporțională cu rezistența  $R$  :

$$i = \frac{u_l}{R}. \quad (2-17)$$

Se precizează că prin  $u_i$  se înțelege tensiunea electrică în sens larg în lungul conductorului, constind, în general, din următoarele componente aditive : tensiunea electrică la borne, tensiunea electromotoare imprimată și tensiunea electromotoare indusă.

Aplicată la circuite electrice de curent continuu, legea conducției electrice sub formă integrală este cunoscută și sub denumirea de *legea lui Ohm*.

Pentru exemplificare, se consideră circuitul de curent continuu din fig. 2-6, *a* constituit dintr-un element galvanic cu t.e.m.  $U_e$  și rezistența interioară  $R_i$ , de la care se alimentează un receptor cu rezistența  $R$ . Conductoarele din care este realizat circuitul se consideră filiforme, deci curentul  $I$  este uniform repartizat pe secțiunea transversală  $S$  a conductorului, adică  $I = JS$ .

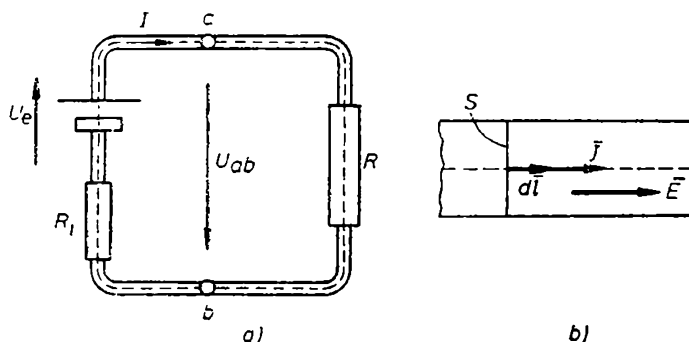


Fig. 2-6. Figură explicativă pentru legea lui Ohm :  
a — circuit electric închis; b — secțiune prin conductor.

Legea lui Ohm pentru porțiunea de circuit a receptorului, cuprinsă între bornele  $a-b$ , unde nu există surse de tensiune electromotoare, se exprimă prin relația :

$$I = \frac{U_{ab}}{R}, \quad (2-18)$$

adică curentul este direct proporțional cu tensiunea electrică  $U_{ab}$  la borne și invers proporțional cu rezistența electrică a circuitului. Din relația (2-18) rezultă că tensiunea electrică aplicată la bornele circuitului este egală cu *căderea de tensiune* din circuit exprimată prin produsul dintre curent și rezistență :

$$U_{ab} = IR. \quad (2-19)$$

Legea lui Ohm pentru porțiunea de circuit a sursei, cuprinsă între punctele  $b-a$ , se exprimă prin relația :

$$I = \frac{U_e - U_{ab}}{R_i}, \quad (2-20)$$

de unde rezultă :

$$U_e - U_{ab} = IR_i \quad (2-21)$$

sau

$$U_e = U_{ab} + IR_i. \quad (2-22)$$

Deci, rezultă că t.e.m. a sursei este mai mare decât tensiunea la bornele sale cu căderea de tensiune pe rezistența interioară. Tensiunea electromotoare poate fi măsurată cu ajutorul unui voltmetru legat la borne numai dacă sursa este în gol ( $I=0$ ).

Legea lui Ohm pentru circuitul închis este :

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}, \quad (2-23)$$

unde  $R + R_i$  este rezistența electrică totală a circuitului.

**Aplicația 2-1.** Să se arate că relațiile de mai sus, prin care se exprimă legea lui Ohm sub formă integrală, pot fi deduse din relațiile de exprimare a legii sub formă locală.

*Rezolvare.* Se calculează integrala de linie

$$\int (\vec{E} + \vec{E}_i) d\vec{l} = \int \rho \vec{J} d\vec{l}$$

de-a lungul unei linii situate în mediul circuitului (unde  $J \neq 0$ ) și parcursă în sensul curentului (fig. 2-6, a).

Ținând seama că vectorii  $\vec{J}$  și  $d\vec{l}$  sînt coliniari (fig. 2-6, b) și avînd în vedere  $I = JS$ , rezultă :

$$\int (\vec{E} + \vec{E}_i) d\vec{l} = \int \rho \frac{JS}{S} dl = I \int \rho \frac{dl}{S}.$$

Pentru circuitul receptorului  $\vec{E}_i = 0$  și

$$\int_a^b \vec{E} d\vec{l} = I \int_a^b \rho \frac{dl}{S}$$

sau

$$U_{ab} = IR,$$

unde  $U_{ab} = \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$  și  $R = \int_a^b \rho \frac{dl}{S}$  sînt tensiunea electrică la borne, respectiv rezistența electrică a porțiunii de circuit cuprinsă între punctele a și b.

Pentru circuitul sursei  $\vec{E}_i \neq 0$  și

$$\int_b^a (\vec{E} + \vec{E}_i) d\vec{l} = I \int_b^a \rho \frac{dl}{S}$$

sau

$$-U_{ab} + U_e = IR_i,$$

unde

$$-U_{ab} = \int_b^a \vec{E} d\vec{l}, \quad R_i = \int_b^a \rho \frac{dl}{S} \text{ și, prin definiție, } U_e = \int_b^a \vec{E}_i d\vec{l}.$$

Pentru întregul circuit se obține :

$$\oint (\vec{E} + \vec{E}_i) d\vec{l} = I \oint \rho \frac{dl}{S}$$

sau

$$U_e = I (R + R_i),$$

unde s-a ținut seama că  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$



## 2.5. REZISTENȚA ELECTRICĂ. REZISTOARE

### 2.5.1. DEFINIREA NOȚIUNII DE REZISTENȚĂ ELECTRICĂ

Rezistența electrică este o mărime fizică (parametru) prin care se caracterizează proprietatea mediilor de a se opune trecerii curentului electric de conducție.

Sub aspect fenomenologic, rezistența electrică se poate explica prin „ciocnirile“ ce au loc între purtătorii mobili de sarcini electrice (electroni, ioni) și alte particule elementare ale substanței. Aceste ciocniri determină o anumită forță de „frecare“ ce se opune mișcării ordonate a purtătorilor de sarcini electrice și conduc la încălzirea conductorului parcurs de curent. Pentru explicare, se consideră un conductor metalic parcurs de curent electric de conducție. Electronii liberi din metal (gazul electronic) execută atât o mișcare dezordonată, cu viteza dezordonată mijlocie  $\bar{v}_{am}$ , cât și o mișcare ordonată, cu viteza medie  $\bar{v}$ , determinată de forța produsă de câmpul electric din conductor ( $\vec{F} = q\vec{E}$ ). S-au considerat vitezele mijlocii deoarece, în mișcarea lor, electronii de masă  $m_e$  se ciocnesc atât între ei, cât și cu alte particule ale rețelei cristaline de masă mult mai mare. Ciocnirea dintre doi electroni fiind perfect elastică, nu conduce la modificarea vitezei ordonate medii, cel mult se modifică viteza dezordonată. În schimb, la ciocnirea unui electron cu o particulă de masă mult mai mare, viteza electronului se reduce de la valoarea maximă, pe care o are înainte de ciocnire, la zero după ciocnire. Energia cinetică acumulată de electron pînă în momentul ciocnirii, egală cu  $\frac{1}{2} m_e v_{max}^2$ , este cedată în întregime particulei din rețeaua cristalină cu care se ciocnește și care își mărește astfel amplitudinea oscilațiilor proprii în jurul poziției de echilibru. Acest fenomen este însoțit de dezvoltare de căldură.

Media statistică a distanței dintre două ciocniri consecutive ale electronului se numește *liberul parcurs mediu*, notat cu  $l$ . Timpul dintre două ciocniri consecutive este :

$$t = \frac{l}{|\bar{v}_{am} + \bar{v}|} \approx \frac{l}{v_{am}}, \quad (2-24)$$

unde s-a avut în vedere că  $v \ll v_{am}$ .

Accelerația imprimată electronului de către câmpul electric este :

$$\bar{a}_e = \frac{\bar{F}}{m_e} = \frac{q\bar{E}}{m_e}, \quad (2-25)$$

iar viteza ordonată medie determinată de acest câmp are expresia :

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (0 + \bar{v}_{max}) = \frac{1}{2} \bar{a} t = \frac{1}{2} \frac{q\bar{E}}{m_e} t,$$

În care, dacă se înlocuiește relația (2-24), se obține :

$$\bar{v} = \frac{ql}{2 m_e v_{am}} \bar{E}. \quad (2-26)$$

Forța  $\vec{F}$  determinată de câmp imprimă electronului viteza  $\vec{v}$  în sens opus câmpului (fig. 2-1), iar forța de frecare  $\vec{F}_r$  se opune mișcării. Viteza  $\vec{v}$  are o valoare constantă în momentul când cele două forțe se echilibrează, adică :

$$\vec{F} + \vec{F}_r = 0 \text{ sau } q\vec{E} - K'\vec{v} = 0$$

de unde rezultă :

$$\vec{v} = \frac{q}{K'} \vec{E}. \quad (2-27)$$

Raportul  $\frac{q}{K'} = K_- < 0$  ( $K' > 0$ ) se numește *factor de mobilitate*, cu care relația (2-27) devine :

$$\vec{v} = K_- \vec{E}. \quad (2-28)$$

Comparînd relațiile (2-26) și (2-28), se obține pentru factorul de mobilitate expresia :

$$K_- = \frac{ql}{2m_e v_{am}}. \quad (2-29)$$

Pe de altă parte, avînd în vedere relația (2-10) rezultă :

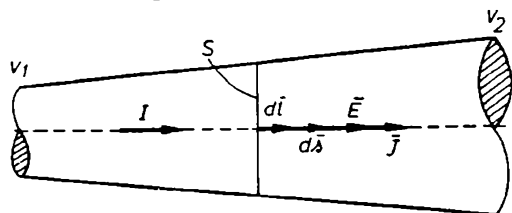
$$J = \rho_0 K_- \vec{E} = NqK_- \vec{E}, \quad (2-30)$$

unde  $\rho_0 = Nq$  este densitatea volumetrică a electronilor liberi. Din această ultimă relație și din legea conducției electrice sub formă locală (relația 2-18), rezultă următoarea expresie pentru conductivitatea  $\sigma$ , respectiv rezistivitatea  $\rho$  a conductorului metalic :

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = NqK_- = \frac{Nq^2 l}{2m_e v_{am}}. \quad (2-31)$$

Se precizează că la materialele semiconductoare, situate din punctul de vedere al proprietăților electrice între metale și dielectrici, valoarea  $K_-$  a factorului de mobilitate este mult mai mare decît la metale.

Pentru definirea rezistenței electrice a unui conductor filiform se consideră în fig. 2-7 conductorul de secțiune transversală  $S$  variabilă în lungul său și la capetele cărui se aplică diferența de potențial  $V_1 - V_2$ . Rezistența electrică se definește prin relația :



$$R = \int_l \frac{\vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}}, \quad (2-32)$$

Fig. 2-7. Conductor omogen cu secțiune variabilă.

care este analoagă cu relația (1-92) prin care s-a definit rezistența dielectrică.

Avînd în vedere că vectorii  $\vec{J}$ ,  $d\vec{s}$ ,  $\vec{E}$  și  $d\vec{l}$  sînt coliniari și că la conductorul filiform curentul  $I$  este uniform distribuit pe secțiunea  $S$ , adică  $J = \text{const.}$ , rezultă :

$$R = \int_l \frac{\vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \int_l \frac{E dl}{J \int_S ds} = \int_l \frac{E dl}{JS}, \quad (2-33)$$

de unde, ținând seama de legea lui Ohm sub formă locală ( $J = \sigma E$  sau  $\rho J = E$ ), se obține :

$$R = \int_l \frac{dl}{\sigma S} = \int_l \rho \frac{dl}{S} . \quad (2-34)$$

În situația când conductorul este omogen și de secțiune constantă în lungul său, rezultă :

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad \text{sau} \quad R = \rho \frac{l}{S} . \quad (2-35)$$

Deci, rezistența electrică este direct proporțională cu lungimea și invers proporțională cu secțiunea conductorului, depinzând de natura materialului prin intermediul rezistivității electrice  $\rho$ . Valorile lui  $\rho$  pentru diverse materiale folosite la construcția rezistoarelor sînt date în tabele (v. tabela 2-1).

Din relația (2-32) se mai poate obține :

$$R = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\bar{E} d\bar{l}}{I} = \frac{1}{I} \int_{P_1}^{P_2} \bar{E} d\bar{l} = \frac{V_1 - V_2}{I} , \quad (2-36)$$

unde s-a ținut seama că  $I$  are aceeași valoare în lungul conductorului și că diferența de potențial electric între extremitățile  $P_1$  și  $P_2$  ale conductorului este  $V_1 - V_2 = \int_{P_1}^{P_2} \bar{E} d\bar{l}$ .

Unitatea de măsură pentru rezistența electrică în sistemul de unități MKSA se numește ohm (simbol  $\Omega$ ) :

$$1 \Omega = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} .$$

Pentru măsurarea rezistențelor mari (de izolație) se folosesc multiplii unității ohm.

Valoarea inversă a rezistenței electrice se numește *conductanță* :

$$G = \frac{1}{R} \quad (2-37)$$

și se măsoară cu unitatea denumită siemens (simbol S) sau cu unitatea denumită mho (inversul lui ohm).

### 2.5.2. VARIAȚIA REZISTENȚEI ELECTRICE CU TEMPERATURA. SUPRACONDUCTIBILITATEA

Explicația la scară microscopică a variației rezistenței electrice cu temperatura se referă la modificarea în funcție de temperatură a numărului  $N$  de purtători liberi de sarcini electrice din unitatea de volum și a mobilității  $K$  a acestor purtători. Astfel, dacă se consideră un conductor metalic a cărui temperatură crește se întâmplă următoarele :

— datorită energiei primite de material, un număr mai mare de electroni devin liberi (crește  $N$ ) ;

— datorită agitației termice mai pronunțate, scade mobilitatea  $K_-$  a electronilor liberi (se micșorează liberul parcurs  $l$  dintre două ciocniri consecutive).

Întrucât rezistivitatea  $\rho$  depinde de produsul dintre acești doi factori (relația 2-31), înseamnă că rezistența electrică a conductorului scade sau crește odată cu creșterea temperaturii, după cum rolul predominant îl are factorul  $N$  sau factorul  $K_-$  (respectiv  $l$ ).

În general, la metale rezistența electrică crește cu temperatura, iar la metaloizi (cărbune) rezistența electrică scade cu temperatura.

Pentru a stabili relația de calcul a variației rezistenței electrice în funcție de temperatura  $\tau$ , se ține seama că rezistivitatea electrică este funcție de temperatură,  $\rho(\tau)$ , și se dezvoltă în serie Mac-Laurean această dependență, în jurul punctului de temperatură  $\tau=0$ :

$$\rho(\tau) = \rho(0) + \frac{\rho'(0)}{1!} \tau + \frac{\rho''(0)}{2!} \tau^2 + \dots, \quad (2-38)$$

unde  $\rho'(0)$ ,  $\rho''(0)$ , ... sînt derivatele funcției  $\rho(\tau)$  (mărimi constante, independente de temperatură). Se introduc relațiile:

$$\rho'(0) = \alpha \rho(0); \quad \rho''(0) = \beta \rho(0), \dots, \quad (2-39)$$

cu care seria devine:

$$\rho(\tau) = \rho(0) + \alpha \rho(0) \tau + \frac{1}{2} \beta \rho(0) \tau^2 + \dots \quad (2-40)$$

Experiența arată că această serie este rapid convergentă, motiv pentru care este suficient dacă se rețin numai primii doi termeni, adică:

$$\rho(\tau) = \rho(0) + \alpha \rho(0) \tau = \rho(0) (1 + \alpha \tau), \quad (2-41)$$

ceea ce înseamnă că rezistivitatea variază liniar cu temperatura,  $\alpha$  fiind denumit *coeficient de temperatură*.

Avînd în vedere că rezistența  $R$  este direct proporțională cu rezistivitatea  $\rho$ , rezultă:

$$R(\tau) = R(0) (1 + \alpha \tau). \quad (2-42)$$

Întrucît în tabele se dau valorile rezistivității pentru temperatura  $20^\circ\text{C}$  (temperatura mediului ambiant), este necesar ca rezistența electrică la temperatura  $\tau$  să se exprime în funcție de rezistența electrică la temperatura  $20^\circ\text{C}$ . Pentru aceasta, din relația (2-42) se deduce:

$$R(20^\circ) = R(0) (1 + \alpha 20^\circ),$$

respectiv:

$$\frac{R(\tau)}{R(20^\circ)} = \frac{1 + \alpha \tau}{1 + \alpha 20^\circ} = 1 + \alpha_{20^\circ} (\tau - 20^\circ),$$

unde  $\alpha_{20^\circ}$  este valoarea coeficientului de temperatură la temperatura de  $20^\circ\text{C}$ :

$$\alpha_{20^\circ} = \frac{\alpha}{1 + \alpha 20^\circ}. \quad (2-43)$$

Deci

$$R(\tau) = R(20^\circ) [1 + \alpha_{20^\circ} (\tau - 20^\circ)] \quad (2-44)$$

sau, în general :

$$R(\tau) = R(\tau_1) [1 + \alpha_{\tau_1} (\tau - \tau_1)]. \quad (2-45)$$

În tabela 2-1 sînt prezentate valorile rezistivității și a coeficientului de temperatură, corespunzătoare temperaturii de  $20^\circ\text{C}$ , pentru cîteva materiale mai uzuale.

Coeficientul de temperatură este pozitiv la metale (rezistența electrică crește cu temperatura). La constantan, coeficientul de temperatură are o valoare foarte mică, ceea ce înseamnă că, practic, rezistența electrică a acestui material nu se modifică cu temperatura.

Variația rezistenței electrice cu temperatura are, în general, efecte nedorite, mai ales la instrumentele electrice de măsurare. De exemplu, șunturile și rezistențele adiționale, precum și rezistențele etalon trebuie să aibă rezistență electrică independentă de temperatură.

**Aplicația 2-2.** Un bec cu filament de wolfram are puterea  $P = 100\text{ W}$  și tensiunea  $U = 220\text{ V}$ , diametrul filamentului fiind  $d = 0,05\text{ mm}$ . Știind că filamentul funcționează la temperatura  $\tau = 1600^\circ\text{C}$  și că pentru wolfram  $\rho_{20^\circ} = 5,5 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$ ,  $\alpha_{20^\circ} = 0,0051/^\circ\text{C}$ , se cere să se determine :

- Rezistența electrică a filamentului cînd becul este stins ( $20^\circ\text{C}$ ) și cînd becul este aprins.
- Curentul prin bec la punerea în funcțiune și în stare de funcționare.
- Lungimea filamentului.

*Rezolvare.* a. Rezistența electrică a filamentului în stare de funcționare a becului este :

$$R_\tau = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484\ \Omega.$$

Rezistența becului la temperatura de  $20^\circ\text{C}$  se deduce din :

$$R_\tau = R_{20^\circ} [1 + \alpha_{20^\circ} (\tau - 20)],$$

adică :

$$R_{20^\circ} = \frac{R_\tau}{1 + \alpha_{20^\circ} (\tau - 20)} = \frac{484}{1 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1580} = 54,5\ \Omega.$$

- Curentul prin bec la aprinderea lui este :

$$I_{20^\circ} = \frac{U}{R_{20^\circ}} = 4,04\text{ A},$$

iar în timpul funcționării acest curent are valoarea :

$$I_\tau = \frac{U}{R_\tau} = 0,455\text{ A}.$$

- Lungimea filamentului se calculează din relația :

$$R_{20^\circ} = \rho_{20^\circ} \frac{l}{S},$$

adică

$$l = \frac{\pi R_{20^\circ} d^2}{4 \rho_{20^\circ}} = 1,85\text{ m}.$$

Tabela 2-2

Temperatura critică de trecere  
în stare supraconductoare a unor  
metale și aliaje

Metalul (aliajul)	Temperatura critică, $T_c$ [°K]
Zinc	0,79
Cadmiu	3,37
Mercur	4,15
Aluminiu	1,14
Plumb	7,22
Ag+Pb	7,2
Au+Pb	7

Tabela 2-3

(Din ETZ 5/1973)

Linia	Tensiunea [kV]	Intensitatea curentului [A]	Pierderile
Cablul supra- conductor. Zn+Nb (Răcire cu helium)	110	5 250	0,1...2
	220	10 500	
Cablul din cupru (Răcire spe- cială)	400	3 500	336

**Supraconductibilitatea** este proprietatea unor metale și aliaje de a le scade brusc la zero rezistivitatea, atunci când sînt răcite pînă la o temperatură suficient de joasă, apropiată de zero absolut. Fenomenul a fost observat pentru prima dată în 1911 de către Kamerlingh Onnes.

Temperatura la care se obține starea de supraconductibilitate este denumită *temperatură critică*,  $T_c$  (sau de tranziție), dependentă de natura metalului sau aliajului, așa cum se observă din tabela 2-2. În fig. 2-8, *a* este arătată variația bruscă a rezistivității staniului la atingerea temperaturii critice. Pentru același metal (aliaj), valoarea temperaturii critice este influențată de cîmpul magnetic.

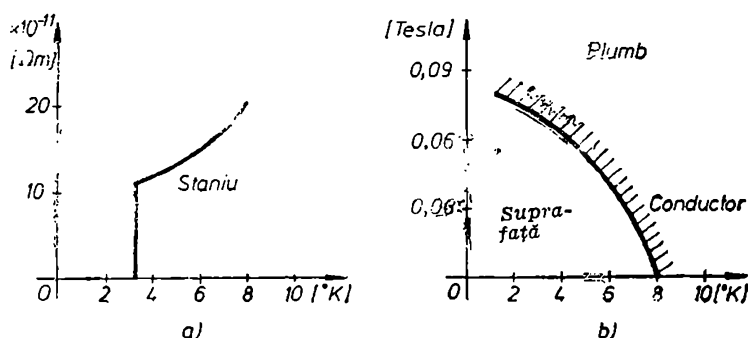


Fig. 2-8. Supraconductoare :

*a* — temperatura critică la staniu; *b* — dependența stării supraconductoare de cîmpul magnetic la plumb.

În fig. 2-8, *b* este arătată influența cîmpului magnetic asupra temperaturii critice în cazul plumbului.

Curentul electric stabilit într-un inel supraconductor se menține timp îndelungat fără a fi necesar un consum de energie din exterior. Aceasta datorită faptului că, rezistivitatea fiind nulă, în inel nu există pierderi.

Este important de relevat faptul că, starea supraconductoare nu se caracterizează numai prin rezistivitate nulă, ci au loc și importante modificări ale proprietăților magnetice ale mediului adus în această stare. Astfel, s-a constatat experimental că mediul supraconductor se comportă ca un corp diamagne-

tic ideal în sensul că, oricît de intens ar fi cîmpul magnetic exterior, inducția magnetică în interiorul mediului este nulă (efectul Meissner-Ochsenfeld).

În tehnica modernă, supraconductoarele au aplicații deosebit de importante. Astfel, în transportul energiei electrice la distanță se fac încercări de folosire a cablurilor supraconductoare care pot transmite puteri considerabil mai mari, cu pierderi prin efect Joule-Lenz foarte mici, în comparație cu cablurile normale.

În tabela 2-3 sînt prezentate caracteristicile unor astfel de cabluri. De asemenea, în ultimul timp se fac cercetări intense privind folosirea supraconductoarelor în construcția mașinilor electrice (criomașini), care permit realizarea unor densități de curent foarte mari și a unor cîmpuri magnetice foarte intense, la gabarite reduse ale mașinii.

### 2.5.3. REZISTOARE

Rezistorul este un aparat realizat pentru a avea o anumită rezistență electrică. Se folosește denumirea de rezistor și nu de rezistență, pentru a nu se confunda aparatul însuși cu proprietatea fizică a materialului denumită rezistență electrică.

Rezistoarele variabile folosite la măsurări, la pornirea și reglarea mașinilor electrice etc., se numesc *reostate*. Unele reostate de laborator sînt construite dintr-un cilindru ceramic, din marmură sau din ardezie, pe care se bobinează sîrmă neizolată din constantan sau din nichelină, astfel ca spirele să nu se atingă între ele. Capetele corpului ceramic se fixează în două suporturi, iar deasupra se fixează o bară metalică de-a lungul căreia se poate deplasa un cursor a cărui perie de contact alunecă pe spirele sîrmei bobinate. Deplasînd cursorul, se modifică rezistența electrică.

Unele reostate, folosite pentru curenți mai mari, sînt prevăzute cu ploturi peste care alunecă o perie fixată de o pîrghie (fig. 2-9), variația rezistenței electrice făcîndu-se în trepte.

În afară de reostatele metalice din sîrmă, din bandă sau din elemente de fontă turnate, se mai folosesc *reostatele cu lichid*, mai ales ca reostate de încărcare și de pornire la motoarele asincrone. Un asemenea reostat constă dintr-un electrod fix în formă de vas (fig. 2-10) în care se pune, de obicei, apă amestecată cu

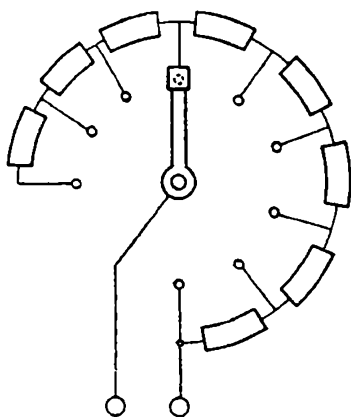


Fig. 2-9. Reostat cu ploturi.

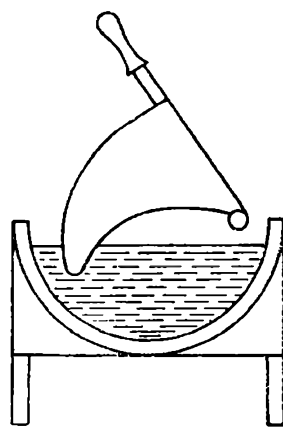


Fig. 2-10. Reostat cu apă.

puțină sodă. Electrocul mobil este realizat din tablă de oțel, izolat față de electrocul fix. Rezistența electrică dintre cei doi electrozi este cu atât mai mică, cu cât electrocul mobil este scufundat mai mult în lichid. Se obține, în modul acesta, o variație continuă a rezistenței. Rezistența electrică a rezistoarelor cu apă se modifică foarte mult în funcție de temperatură, precum și în funcție de conținutul în săruri din apă.

Rezistoarele chimice constau dintr-un material (grafit) depus prin electroliză pe un tub ceramic, acoperit în exterior cu un strat protector din lac sau email.

Cu ajutorul reostatelor se pot realiza *montaje potențiometrice* cu care se obține o tensiune variabilă. În fig. 2-11, *a* este reprezentat montajul potențiometric la care tensiunea culeasă între punctele *a* și *b* variază de la zero la *U*, atunci când

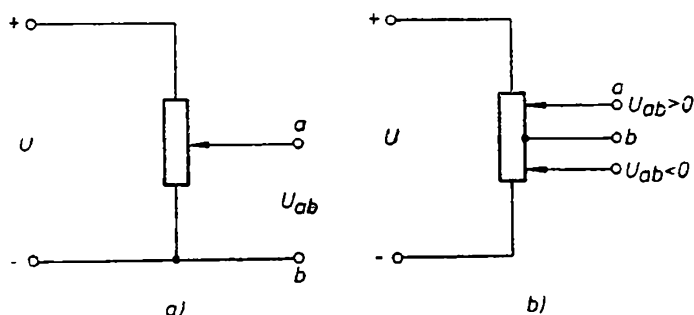


Fig. 2-11. Schema potențiometrului :

*a* — cu modificarea tensiunii între 0 și *U*; *b* — cu modificarea tensiunii între  $-U/2$  și  $+U/2$ .

cursorul se plimbă în lungul rezistorului. În fig. 2-12, *b* este reprezentat montajul potențiometric prevăzut cu priză mediană la care tensiunea  $U_{ab}$  poate fi modificată de la  $-\frac{U}{2}$  la  $+\frac{U}{2}$ .

La folosirea rezistoarelor în diverse montaje, este necesar să se cunoască atât valoarea, în ohmi, a rezistenței sale cât și curentul nominal. Pentru rezistoarele chimice folosite în radiotehnică se precizează rezistența în  $k\Omega$  sau  $M\Omega$  și puterea disipată în W. Nu este permis să se folosească rezistoarele la curenți sau puteri mai mari decât valorile nominale deoarece se distrug prin supraîncălzire.

**Aplicația 2-3.** În interiorul unui conductor din germaniu pur se stabilește un câmp electric cu intensitatea  $E=0,1$  V/m. Să se determine viteza de mișcare a purtătorilor mobili de sarcini electrice în acest conductor.

**Rezolvare.** Viteza de mișcare a purtătorilor de sarcini electrice în conductoare, determinată de câmpul electric, se exprimă prin relația (2-28) :

$$\bar{v} = K_- \bar{E},$$

unde  $K_-$  este valoarea factorului de mobilitate.

Conform relației (2-31), factorul de mobilitate are valoarea :

$$|K_-| = \frac{1}{\rho N |q|}.$$

Pentru germaniu pur,  $\rho=0,6 \Omega m$ ,  $N=6,2 \cdot 10^{19}$ ,  $q=1,602 \cdot 10^{-19}$  C, cu care rezultă :

$$K_- = \frac{1}{0,6 \cdot 6,2 \cdot 10^{19} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 1\,700 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} \cdot \frac{m}{V}.$$



Deci

$$v = 1700 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1 = 17 \cdot 10^{-3} \text{ m/s.}$$

**Aplicația 2-4.** Un conductor filiform de lungime  $l$  are secțiunea circulară cu o variație liniară a razei de la valoarea  $r_1$  la valoarea  $r_2$  și este străbătut de curentul  $I$ . Să se stabilească relația ce exprimă variația densității de curent în lungul conductorului.

**Rezolvare.** Conductorul fiind filiform, densitatea de curent este constantă în punctele secțiunii sale transversale  $S$ , deci  $J = \frac{I}{S}$ . Cu notațiile din fig. 2-12, se obține :

$$S = \pi r^2, \quad \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{x}{l},$$

adică :

$$r = \frac{r_2 - r_1}{l} x + r_1, \quad S = \frac{\pi}{l^2} [(r_2 - r_1)x + lr_1]^2.$$

Deci

$$J = \frac{I}{S} = \frac{Il^2}{\pi [(r_2 - r_1)x + lr_1]^2}.$$

Pentru  $x=0$  și  $x=l$  rezultă :

$$J_1 = \frac{I}{\pi r_1^2}, \quad J_2 = \frac{I}{\pi r_2^2}.$$

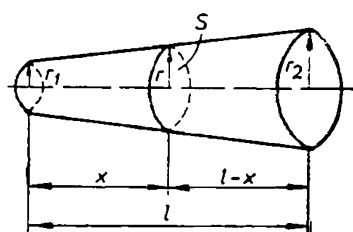


Fig. 2-12. Conductor cu secțiune variabilă.

## 2.5.4. TERMISTOARE

Termistorul este un rezistor realizat din material semiconductor, a cărui rezistență variază mult cu temperatura, și anume după o lege exponențială :

$$R_T = R_{T_0} e^{a \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (2-46)$$

în care  $T$  și  $T_0$  sînt temperaturi absolute ( $^{\circ}\text{K}$ ) și  $a$  este o constantă a materialului cu dimensiunea unei temperaturi și cu valoarea pozitivă cuprinsă între 1 000 și 8 000  $^{\circ}\text{K}$ . Rezistența unui termistor scade, deci, cu creșterea temperaturii (coeficientul de temperatură este negativ).

Încălzirea termistorului poate fi *directă*, prin efectul termic al curentului ce îl străbate, sau *indirectă*, de la o sursă de energie calorică exterioară. Aceste modalități de încălzire depind de serviciul pe care trebuie să-l îndeplinească termistorul în cadrul dispozitivului din care face parte.

O caracteristică importantă a unui termistor cu încălzire directă este curba sa tensiune-curent (caracteristica volt-ampere), ilustrată în fig. 2-13. După cum se observă, la curenți mici, care nu duc la o încălzire apreciabilă, termistorul respectă legea lui Ohm (rezistor liniar). În schimb, la curenți mai mari, cînd și temperatura termistorului crește, rezistența sa începe

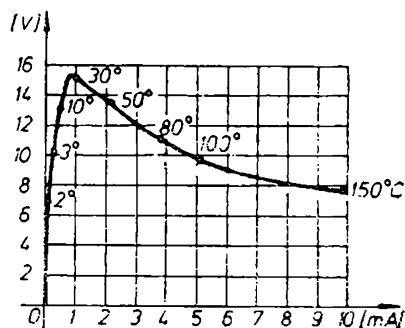


Fig. 2-13. Curba tensiune-curent la un termistor.

să scadă. Pe curbă sînt indicate și temperaturile corespunzătoare ale termistorului, în °C.

Termistoarele cu încălzire directă au aplicații variate în electronică și în automatică. Se folosesc ca traductoare de temperatură, la stabilizarea termică a circuitelor cu tranzistoare, în construcția releelor de temperatură, de curent etc. Termistoarele cu încălzire indirectă se utilizează ca reostate comandate (cu rezistența dependentă de temperatura mediului în care sînt plasate, asigurată de o sursă de energie calorică exterioară).

## 2.6. EFECTUL TERMIC AL CURENTULUI ELECTRIC

Efectul termic al curentului electric, cunoscut și sub denumirea de *efect Joule-Lenz*, constă în dezvoltarea ireversibilă de căldură în conductoarele parcurse de curent electric de conducție. Prin acest efect, energia electromagnetică se transformă în energie calorică prin intermediul lucrului mecanic determinat de forțele ce acționează asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice. Conform principiului de conservare a energiei se obține :

$$dW + dQ = 0, \quad (2-47)$$

unde  $W$  este energia electromagnetică ce scade în timp ( $dW < 0$ ) iar  $Q$  este energia calorică ce crește în timp ( $dQ > 0$ ).

### 2.6.1. LEGEA TRANSFORMĂRII ENERGIEI ELECTROMAGNETICE ÎN PROCESUL DE CONDUȚIE (LEGEA JOULE-LENZ)

**Forma integrală a legii Joule-Lenz** precizează următoarele : căldura  $dQ_J$  dezvoltată prin efect J-L, într-un timp  $dt$ , de curentul de conducție  $i$  ce străbate un conductor cu rezistența electrică  $R$ , este proporțională cu pătratul curentului și cu timpul, factorul de proporționalitate fiind rezistența electrică :

$$dQ_J = Ri^2 dt. \quad (2-48)$$

Căldura dezvoltată într-un timp  $t$  este :

$$Q_J = \int_0^t Ri^2 dt. \quad (2-49, a)$$

Dacă rezistența  $R$  și curentul  $i$  sînt constante în timp ( $i = I$ ), rezultă :

$$Q_J = RI^2 t. \quad (2-49, b)$$

Puterea corespunzătoare efectului J-L al curentului electric este :

$$P_J = \frac{dQ_J}{dt} = Ri^2 \quad (2-50)$$

sau, ținând seama de legea lui Ohm sub formă integrală  $\left\{ i = \frac{u}{R} \right\}$ , se obține :

$$p_J = \frac{u^2}{R}, \quad (2-51)$$

unde  $u$  este tensiunea la bornele rezistorului cu rezistența  $R$ .

**Aplicația 2-5.** Se consideră o sursă de c.c. cu t.e.m.  $U_e$  și rezistența interioară  $R_i$  ce alimentează un receptor cu rezistența electrică  $R$  (fig. 2-14). Se cere să se stabilească bilanțul puterilor din circuit.

**Rezolvare.** Legătura dintre t.e.m.  $U_e$  și tensiunea la borne  $U$  este :

$$U_e = U + R_i I,$$

unde  $R_i I$  este căderea de tensiune pe rezistența interioară a sursei. Rezultă :

$$U_e I = UI + R_i I^2$$

sau

$$P_i = P + \Delta P,$$

unde  $P_i = U_e I$  este puterea electrică interioară a sursei,  $P = UI = RI^2$  este puterea electrică a receptorului iar  $\Delta P = R_i I^2$  reprezintă puterea pierdută prin efect J-L în interiorul sursei.

Randamentul de funcționare al sursei este :

$$\eta = \frac{P}{P_i} = \frac{P_i - \Delta P}{P_i} = 1 - \frac{\Delta P}{P_i}.$$

**Legea Joule-Lenz sub formă locală** se referă la puterea dezvoltată prin efect J-L în unitatea de volum a conductorului străbătut de curentul cu densitatea  $J$  :

$$p_{J_0} = \rho J^2 \text{ [W/m}^3\text{]}, \quad (2-52)$$

unde  $\rho$  este rezistivitatea.

Ținând seama de legea lui Ohm sub formă locală  $\rho \vec{J} = \vec{E}$ , legea lui J-L sub formă locală devine :

$$p_{J_0} = \vec{J} \vec{E}. \quad (2-53)$$

Cu această ultimă relație, puterea corespunzătoare efectului J-L din întregul volum al conductorului străbătut de curentul de conducție este :

$$p_J = \int_0 p_{J_0} d\omega = \int_0 \vec{J} \vec{E} d\omega. \quad (2-54)$$

Se poate dovedi ușor că relația (2-54) este aceeași cu relația (2-50). În adevăr, avînd în vedere că  $\vec{E} = \rho \vec{J}$  și că  $d\omega = S dl$ , din relația (2-54) se obține :

$$p_J = \int \rho J^2 S dl = \int (JS)^2 \rho \frac{dl}{S} = i^2 R,$$

unde  $JS = i$  este curentul de conducție, constant în lungul conductorului, iar  $R = \int \rho \frac{dl}{S}$  este rezistența electrică a conductorului.

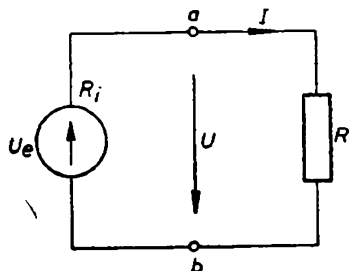


Fig. 2-14. Circuit electric.

## 2.6.2. DIMENSIONAREA CONDUCTOARELOR PE BAZĂ DE ÎNCĂLZIRE

Conductoarele parcurse de curent se încălzesc datorită efectului J-L. Prin încălzire se înțelege diferența dintre temperatura conductorului și temperatura mediului ambiant :

$$\vartheta = \tau - \tau_{med}. \quad (2-55)$$

Pentru ca izolația conductorului, respectiv conductorul însăși, să nu se deterioreze, se impune ca încălzirea maximă să nu depășească limita admisibilă stabilită prin norme :

$$\vartheta_{max} \leq \vartheta_a. \quad (2-56)$$

Aceasta înseamnă o valoare limitată pentru densitatea de curent, respectiv pentru curent la secțiune dată a conductorului.

Dimensionarea unui conductor pe bază de încălzire se referă la stabilirea valorii densității de curent admisibile, respectiv a curentului admis printr-un conductor de secțiune cunoscută și dintr-un anumit material, astfel ca încălzirea conductorului să nu depășească limita impusă.

Se consideră un conductor omogen, cu secțiune circulară constantă în lungul său, prin care, la momentul  $t=0$ , se stabilește curentul constant  $I$ , încălzirea inițială a conductorului fiind  $\vartheta_0 = \tau_0 - \tau_{med}$ . Căldura dezvoltată în timpul  $dt$  este :

$$dQ_J = RI^2 dt.$$

O parte din această energie se înmagazinează în masa conductorului și contribuie la creșterea temperaturii acestuia, iar o altă parte este degajată în mediul înconjurător. Rezultă următoarea ecuație a bilanțului energiilor :

$$RI^2 dt = mc d\vartheta + \alpha_r S_r \vartheta dt, \quad (2-57)$$

unde  $m$  este masa conductorului, în kg ;

$c$  — căldura specifică, în J/kg °C ;

$S_r$  — suprafața de răcire, în m<sup>2</sup> ;

$\alpha_r$  — coeficientul de transmitere a căldurii către mediul exterior, în J/m<sup>2</sup> °Cs.

Din relația (2-57) se obține următoarea ecuație diferențială a încălzirii :

$$mc \frac{d\vartheta}{dt} + \alpha_r S_r \vartheta = RI^2$$

sau

$$\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{1}{T} \vartheta = \frac{RI^2}{mc}, \quad (2-58)$$

unde

$$T = \frac{mc}{\alpha_r S_r} \quad (2-59)$$

este constanta de timp a încălzirii, măsurată în secunde.

Încălzirea conductorului ajunge la valoarea maximă în momentul cînd întreaga energie calorică dezvoltată se degajă în mediul exterior. În această situație  $\vartheta = \vartheta_{max} = \text{const.}$ , iar  $d\vartheta = 0$ , cu care, din ecuația (2-58) și ținînd seama de notația (2-59), se obține :

$$\vartheta_{max} = \frac{RI^2}{\alpha_r S_r} . \quad (2-60)$$

Soluția ecuației diferențiale (2-58) este de forma :

$$\vartheta = A e^{-\frac{t}{T}} + \vartheta_{max}, \quad (2-61)$$

unde  $A$  este constanta de integrare ce se determină din condiția inițială și anume : pentru  $t=0$  avem  $\vartheta = \vartheta_0$ . Prin înlocuirea acestor valori în relația (2-61), rezultă :

$$\vartheta_0 = A + \vartheta_{max}$$

adică

$$A = \vartheta_0 - \vartheta_{max}, \quad (2-62)$$

cu care soluția ecuației diferențiale devine :

$$\vartheta = \vartheta_{max} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + \vartheta_0 e^{-\frac{t}{T}} . \quad (2-63)$$

În fig. 2-15, *a* este reprezentată variația în timp a încălzirii conductorului, conform funcției exponențiale (2-63), ce tinde asimptotic spre  $\vartheta_{max}$ . Dacă încălzirea inițială a conductorului este zero ( $\vartheta_0 = 0$ ), se obține curba de încălzire din fig. 2-15, *b*.

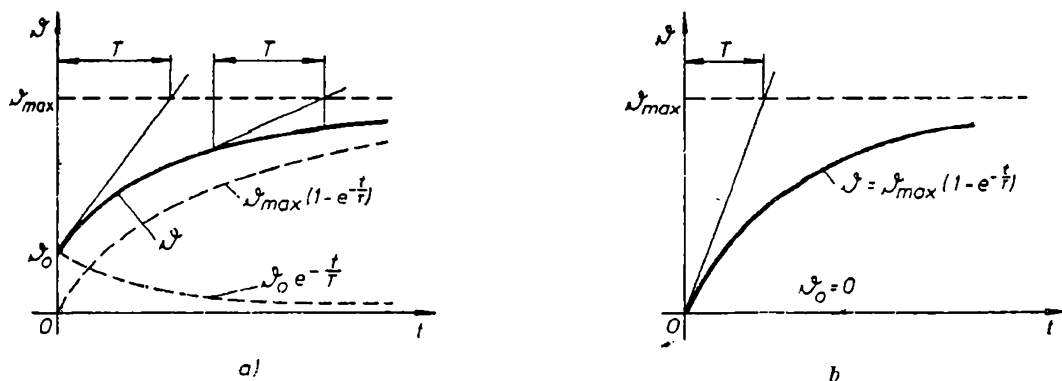


Fig. 2-15. Curbe exponențiale de încălzire a conductorului omogen parcurs de curent :

*a* — încălzirea inițială diferită de zero ( $\vartheta_0$ ); *b* — încălzirea inițială egală cu zero.

Presupunînd că încălzirea maximă este egală cu încălzirea admisibilă ( $\vartheta_{max} = \vartheta_a$ ), din relația (2-60) se obține :

$$\frac{RI^2}{\alpha_r S_r} = \vartheta_a,$$

de unde rezultă :

$$I^2 = J^2 S^2 = \frac{\alpha_r S_r \vartheta_a}{R}$$

sau

$$J^2 = \frac{\alpha_r S_r \vartheta_a}{S^2 \rho \frac{l}{S}} = \frac{\alpha_r S_r \vartheta_a}{\rho S l}$$

Considerînd că suprafața de răcire este întreaga suprafață laterală a conductorului de secțiune circulară :  $S_r = \pi d l$ , rezultă :

$$J^2 = \frac{\alpha_r \pi d l \vartheta_a}{\rho \pi \frac{d^2}{4} l} = \frac{4 \alpha_r \vartheta_a}{\rho d}$$

adică

$$J = 2 \sqrt{\frac{\alpha_r \vartheta_a}{\rho d}} = 2 \sqrt{\frac{\alpha_r (\tau_a - \tau_0)}{\rho d}}, \quad (2-64)$$

unde s-a considerat  $\vartheta_a = \tau_a - \tau_0$ .

Din relația (2-64) se remarcă faptul că densitatea admisibilă de curent depinde de valoarea încălzirii admisibile  $\vartheta_a$ , de natura conductorului (prin  $\rho$ ), de diametrul  $d$ , precum și de condițiile de răcire (prin  $\alpha_r$ ). Cu cît diametrul conductorului este mai mare, cu atît densitatea de curent admisă este mai mică. Pentru aceleași valori ale lui  $\alpha_r$  și  $\rho$ , două conductoare obțin aceeași încălzire maximă dacă este îndeplinită relația :

$$\frac{J_1}{J_2} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}. \quad (2-65)$$

În tabela 2-4 sînt redate valorile densității admisibile de curent pentru cîteva secțiuni normalizate ale conductoarelor din cupru izolate și neizolate. Cunoscînd densitatea de curent admisă și secțiunea, se obține simplu curentul nominal prin conductor ( $I = JS$ ).

**Densitatea de curent admisibilă pentru conductoare din cupru**

*Tabela 2-4*

S [mm²]	Conductor cupru izolat J [A/mm²]	Conductor cupru neizolat	
		Încăperi închise J [A/mm²]	În aer J [A/mm²]
4	9	14,2	14,5
6	7,7	12,2	12,6
10	6,8	10,3	10,8
16	5,7	8,1	9,4
25	4,9	6,6	8,2
35	4,3	6,0	7,7
50	3,8	5,3	6,7
70	3,5	4,8	6,1
95	3,1	4,3	5,4

**Aplicația 2-6.** Un conductor din cupru, neizolat, are secțiunea  $S=10 \text{ mm}^2$  și este parcurs de un curent de 100 A. Știind că  $\alpha_r=0,36 \text{ J/}^\circ\text{C m}^2\text{s}$ , să se calculeze temperatura conductorului, temperatura mediului ambiant fiind  $\tau_0=20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

*Rezolvare.* Temperatura maximă a conductorului se determină cu relația (2-60), de unde se deduce :

$$\tau_{max} = \frac{RI^2}{\alpha_r S_r} + \tau_0.$$

Considerind lungimea conductorului  $l=1 \text{ m}$ , se obțin :

$$R = \rho \frac{l}{S} = 1,725 \cdot 10^{-3} \Omega,$$

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

$$S_r = \pi d l = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2,$$

$$\tau_{max} = \frac{1,725 \cdot 10^{-3} \cdot 100^2}{0,36 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2}} + 20 = 60 \text{ }^\circ\text{C}.$$

### 2.6.3. APLICAȚIILE EFECTULUI TERMIC AL CURENTULUI ELECTRIC

**Siguranțe fuzibile.** Fuzibilele sînt corpuri metalice filiforme sau lamelare care se topesc prin efectul termic al curentului electric de conducție, fiind elemente componente ale siguranțelor electrice. Materialul pentru confecționarea fuzibilelor trebuie să aibă următoarele calități principale : temperatură de topire joasă, rezistivitate electrică mică, inerție termică mică, să fie inoxidabil și cu preț de cost redus. Nici un material nu satisface simultan toate aceste condiții. În practică, pentru confecționarea fuzibilelor se utilizează mai mult : argintul pur, cuprul, cuprul argintat, zincul și aliajele de staniu cu cadmiu.

Siguranțele electrice sînt aparate de protecție contra supracurenților, în special contra curenților de scurtcircuit. Siguranța electrică întrerupe instantaneu circuitul electric în care este instalată cînd curentul în acel circuit depășește o anumită limită. În felul acesta, conductoarele și receptoarele sînt protejate contra solicitărilor termice și mecanice la care ar fi supuse sub acțiunea supracurentului.

Siguranțele fuzibile se clasifică după : tensiunea nominală, curentul nominal, capacitatea de rupere, caracteristica de topire și tipul constructiv. Se deosebesc : *curentul nominal al siguranței* — pentru care sînt dimensionate piesele conductoare de curent și piesele de contact — și *curentul nominal al fuzibilului*. *Capacitatea de rupere* reprezintă cel mai mare curent pe care siguranța îl poate întrerupe. Caracteristica de topire este curba care exprimă dependența duratei pînă la topirea fuzibilului de intensitatea curentului care îl străbate (fig. 2-16).

După forma caracteristicii de topire se deosebesc : siguranțe rapide și siguranțe cu întîrziere (inerte). La siguranțele rapide, timpul de topire este foarte scurt la un anumit supracurent. La siguranțele cu întîrziere, prin măsuri constructive speciale se obține un timp de topire relativ lung la supracurenții mici

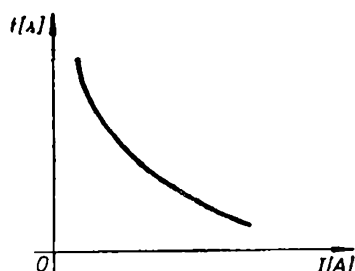


Fig. 2-16. Caracteristica siguranței fuzibile.

(curenții de pornire ai motoarelor electrice), respectiv un timp de topire scurt la supracurenții mari (scurtcircuite).

După tensiunea pentru care sînt construite, se deosebesc: siguranțe fuzibile de joasă tensiune (pînă la 1 kV) și siguranțe fuzibile de înaltă tensiune.

**Cuptoare electrice.** După sistemul de producere a căldurii, cuptoarele electrice se clasifică în cuptoare cu rezistoare, cuptoare cu arc electric și cuptoare de inducție.

*Cuptorul electric cu rezistoare* are ca sursă de căldură efectul Joule-Lenz din unul sau mai multe rezistoare parcurse de curent. Rezistoarele pot fi piese independente sau pot fi constituite din însuși materialul de tratat.

La cuptorul cu rezistoare independente se utilizează pentru încălzire căldura produsă de rezistoare speciale, șarja nefăcînd parte din circuitul electric de încălzire. Rezistoarele se confecționează din aliaje de crom-nichel (pentru temperaturi de 1 100°—1 200 °C), aliaje fier-nichel-crom (pînă la 995 °C), aliaje cupru-nichel (sub 540 °C).

*La cuptorul cu arc electric cu încălzire directă*, căldura este dezvoltată de curentul electric care străbate șarja conductoare situată între electrozi.

**Lampa electrică cu incandescență.** Corpul incandescent care emite radiații luminoase este filamentul, care se încălzește la trecerea prin el a curentului electric, la o temperatură în jur de 2 000 °C. Această temperatură este necesară pentru a se realiza o lumină cît mai apropiată de cea albă. Ca material pentru filament e folosit actualmente mai ales wolframul, avînd o temperatură de topire foarte înaltă, evaporare lentă și rezistență mecanică mare.

O altă aplicație a efectului termic al curentului electric o constituie *sudarea electrică* (sudare cu arc electric și sudare prin rezistență de contact).

## 2.7. CURENTUL ELECTRIC ÎN SEMICONDUCTOARE

Materialele a căror rezistivitate are ordinul de mărime  $10^{-1} \dots 10^{-4} \Omega \text{ cm}$  constituie grupa *semiconductoarelor*. Din această grupă fac parte: germaniul, seleniul, siliciul, precum și o serie de compuși chimici.

Conductibilitatea electrică a semiconductoarelor se explică pe baza teoriei cuantice în care electronii nu mai sînt priviți ca simple corpuscule ce gravitează în jurul nucleului, ci sînt luate în considerare proprietățile lor ondulatorii, respectiv stările lor energetice cuantificate. Conform acestei teorii, electronii se găsesc în stare de echilibru numai pentru anumite niveluri energetice „permise”. *Principiul lui Pauli* precizează că la același nivel energetic nu poate exista decît un singur electron.

Un nivel energetic se caracterizează prin valoarea energiei electronului situat la acest nivel, exprimată în electronvolți [eV]. Cu cît un nivel energetic este mai îndepărtat de nucleu, cu atît electronul de pe acel nivel posedă o energie mai mare.



Nivelurile energetice apropiate între ele formează o zonă „permisă“, care este separată de următoarea zonă permisă printr-o zonă „interzisă“. Totalitatea nivelurilor și zonelor energetice constituie *spectrul energetic* al atomului. În fig. 2-17, *a* este reprezentat spectrul energetic al atomului de hidrogen, liniile orizontale 1 reprezentând nivelurile energetice de excitație, iar linia orizontală 2 reprezentând nivelul energetic neexcitat. În fig. 2-17, *b* sînt reprezentate zonele de niveluri energetice permise, separate între ele prin zone interzise.

Pentru ca un electron să treacă de pe un nivel energetic inferior pe un nivel energetic superior trebuie să primească o anumită cantitate de energie din

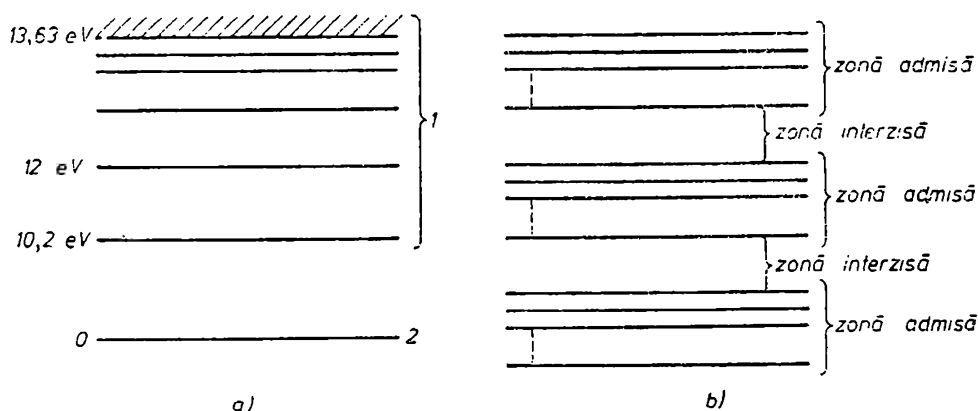


Fig. 2-17. Spectrul energetic al atomului :

*a* — linii energetice la atomul de hidrogen; *b* — zone admise și interzise.

exterior. La trecerea electronului de pe un nivel exterior pe unul inferior se eliberează energie sub formă de radiație. Aceste treceri de pe un nivel pe altul au loc prin salturi.

Deasupra zonei de valență se găsește zona de conducție în care se situează electronii liberi (gazul electronic). La metale, zona de conducție se întrepătrunde cu zona de valență, astfel că o cantitate mică de energie primită din exterior (energia calorică, energia cimpului electric etc.) este suficientă pentru trecerea electronilor din zona de valență în zona de conducție. În schimb, la izolatoare (dielectrici), între zona de valență și zona de conducție există o zonă interzisă care nu poate fi depășită de electroni decât pentru energii foarte mari primite din exterior.

Semiconductoarele pure se caracterizează printr-o zonă interzisă îngustă (1 eV), situată între zona de valență și zona de conducție, care poate fi depășită mai ușor de către electronii din zona de valență. Puritatea materialului influențează în mare măsură lățimea zonei interzise.

Electronul care, datorită agitației termice sau datorită energiei primite din exterior de către semiconductor, trece prin zona interzisă în zona de conducție, lasă în zona de valență un „gol“ care este echivalent cu o sarcină electrică elementară pozitivă. Golul creat poate fi ocupat de un alt electron din rețeaua cristalină, ceea ce înseamnă crearea unui gol în altă parte. O mișcare ordonată a electronilor din semiconductor înseamnă o mișcare ordonată a golurilor în sens opus. Deci, la semiconductoare, spre deosebire de metale, curentul electric este determinat nu numai de mișcarea ordonată a electronilor liberi din zona de conducție, ci și de mișcarea ordonată a golurilor din zona de valență. Trebuie reținut însă că mișcarea golurilor are loc prin salturi, din loc în loc.

În concluzie, semiconductoarele pure dispun de o conductibilitate mixtă, electronică și prin goluri, densitatea de curent fiind :

$$\vec{J} = (NqK_- + N_g |q| K_+) \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (2-66)$$

unde  $N$  și  $N_g$  sînt numărul de electroni liberi, respectiv de goluri, din unitatea de volum ;

$q$  — sarcina electronului, respectiv  $|q|$  sarcina golului ;

$K_-$  — factorul de mobilitate al electronilor liberi ;

$K_+$  — factorul de mobilitate al golurilor ;

$\vec{E}$  — intensitatea cîmpului electric ;

$\sigma$  — conductivitatea semiconductorului.

În cazul semiconductoarelor impure, caracterul conductibilității electrice se schimbă fundamental, chiar dacă gradul de impuritate este foarte mic, de circa  $1/10^8$ . Prin introducerea impurității se formează noi nivele energetice, situate în zona interzisă a materialului de bază, corespunzătoare electronilor de valență ai atomului de impuritate. Ne referim, de exemplu, la cazul cînd materialul de bază este germaniul (tetravalent) căruia i se adaugă o impuritate de stibiu (pentavalent). Înlocuind în rețeaua cristalină un atom de germaniu printr-un atom de stibiu, patru electroni de valență ai stibiului vor servi la stabilirea legăturilor covalente (chimice) cu atomii de germaniu, iar un electron rămas liber va putea fi desprins relativ ușor de atomul său. Cum nivelele energetice ale electronilor de valență ai impurității pentavalente sînt în imediata apropiere a zonei de conducție a germaniului, rezultă că este suficientă o cantitate mică de energie dată din exterior pentru ca electronii de valență a impurității, rămași neocupați în legăturile covalente, să treacă în zona de conducție. O astfel de impuritate, capabilă să cedeze electroni, se numește *impuritate donoare*, iar semiconductorul respectiv de tip  $n$ .

Semiconductoarele de tipul  $n$  se mai numesc și semiconductoare cu conductibilitate electronică deoarece ponderea cea mai mare a purtătorilor de sarcini este constituită din electronii cedați în zona de conducție de impuritatea donoare, denumiți *electroni majoritari*. Pe lângă aceștia, mai există în zona de conducție și *electroni minoritari*, de mare energie, cedați de materialul de bază, respectiv în zona de valență a materialului de bază există *goluri minoritare*.

Dacă se adaugă germaniului o impuritate de indiu (trivalent) atunci, în urma stabilirii legăturilor covalente între atomii rețelei cristaline aparținînd germaniului, respectiv indiumului, rămîn ioni de indiu care dispun de un gol (lipsa unui electron) și care poate fi ocupat de un electron al atomului de germaniu. Dar, de unde a plecat acest electron se creează un alt gol ș.a.m.d. Zona de conducție a impurității trivalente fiind situată în vecinătatea superioară a zonei de valență a germaniului, înseamnă că, la primirea unei mici cantități de energie din exterior, un anumit număr de electroni trec pe nivelurile energetice din această zonă, iar în zona de valență se creează *goluri majoritare*. Electronii materialului de bază situați în zona de conducție constituie *electroni minoritari*. Impuritatea care contribuie la crearea golurilor (capabile să accepte electroni) se numește *acceptoare* iar semiconductorul este de tipul  $p$ .

Semiconductoarele de tipul  $p$  se mai numesc și semiconductoare cu conductibilitate prin goluri, deoarece ponderea cea mai mare a purtătorilor mobili de sarcini electrice o constituie golurile majoritare.

Dacă, folosind o sursă exterioară, se creează în interiorul semiconductorului de tip  $n$ , sau de tip  $p$ , un cîmp electric  $\vec{E}$ , semiconductorul este străbătut de

curent datorită mișcării ordonate a purtătorilor mobili de sarcini electrice (electronii și golurile).

Folosind diverse tipuri de materiale semiconductoare, se realizează diverse dispozitive ca : *diode semiconductoare*, realizate prin joncțiunea *pn* (fig. 2-18, *a*), *tranzistoare*, realizate prin joncțiunile *pnp* (sau *nnp*) (fig. 2-18, *b*), *tiristoare*,

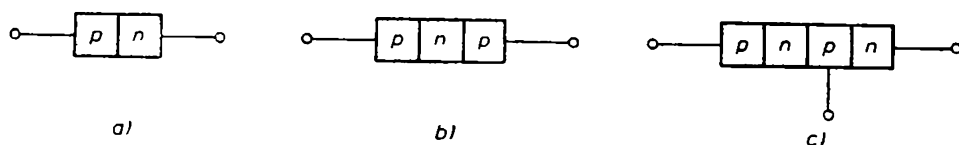


Fig. 2-18. Joncțiuni între semiconductoare :  
 a — dioda; b — tranzistorul; c — tiristorul.

realizate prin joncțiunile *pnpn* (fig. 2-18, *c*) etc. Funcționarea acestor dispozitive se explică pe baza celor arătate mai sus în legătură cu crearea și mișcarea purtătorilor mobili de sarcini electrice.

## 2.8. CURENTUL ELECTRIC ÎN VID ȘI ÎN GAZE

### 2.8.1. CURENTUL ELECTRIC ÎN VID

Ne referim la tuburile electronice cu vid (dioda, trioda etc.) în care, sub acțiunea unui câmp electric creat prin aplicarea unei diferențe de potențial între anod și catod, electronii emiși de catod se deplasează spre anod și determină un curent electric prin tub (în vid). Un astfel de curent, corespunzător mișcării orientate a electronilor în vid este un *curent de convecție*.

Legea lui Ohm nu mai este valabilă pentru cazul când curentul electric are loc în vid deoarece aceasta este o lege de material, în expresia ei intervenind o constantă de material (rezistivitatea sau conductivitatea electrică), care pentru vid nu poate fi definită.

Eliberarea electronilor de către catod se numește *emisiune electronică* care se explică după cum urmează : electronii liberi sînt reținuți în metal de forțele câmpului electric provocat de ionii rețelei cristaline, mișcarea lor (dezordonată și ordonată) fiind analoagă cu mișcarea moleculelor unui gaz închis într-un recipient, respectiv printr-o conductă. Pentru ca electronii să poată părăsi metalul, trebuie să primească din exterior o energie suficient de mare, astfel încît să fie învinsă așa-numita „barieră de potențial”. Presupunem că datorită unei cauze, electronii părăsesc metalul, dar nu au energie suficientă să se îndepărteze de suprafața acestuia, fiind reținuți de forțele determinate de ionii pozitivi formați în metal prin ieșirea electronilor. Se creează astfel la suprafață un strat de sarcini electrice duble, pozitive în metal și negative în exterior. Datorită acestor sarcini apare un câmp electric orientat spre exteriorul suprafeței metalului și o variație bruscă a potențialului ( $V_1 > V_2$ ). În aceste condiții, pentru ca un electron să părăsească complet metalul, trebuie să se cheltuiască lucrul mecanic :

$$W_a = q(V_1 - V_2) = qU, \quad (2-67)$$

unde  $U = V_1 - V_2$  se numește *barieră de potențial*. Din această energie se scade energia cinetică maximă a electronilor liberi :

$$W_i = \frac{1}{2} m_e v_{max}^2 < W_a \quad (2-68)$$

și se obține surplusul de energie pe care electronii liberi trebuie să-l primească din exterior, denumit *lucrul mecanic de ieșire* :

$$W_0 = W_a - W_i. \quad (2-69)$$

*Lucrul mecanic de ieșire* este dependent de natura metalului și se măsoară în eV (4,54 eV la wolfram, 2,51 eV la bariu, 1,43 eV la cesiu etc.).

După felul cum se obține surplusul de energie  $W_0$  se deosebesc :

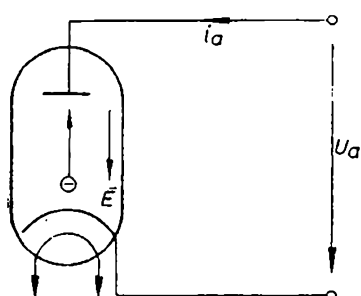


Fig. 2-19. Dioda electronică.

— emisiune termoelectronică, când suprafața emisivă este încălzită ;

— emisiune fotoelectronică, când suprafața emisivă primește un flux de fotoni (radiații electromagnetice) ;

— emisiune electronică secundară, când suprafața emisivă este bombardată de un flux de electroni sau ioni ;

— emisiune autoelectronică, când spre suprafața emisivă este îndreptat un câmp electric exterior de intensitate foarte mare.

Curentul anodic  $i_a$  la dioda electronică (fig. 2-19) se exprimă în funcție de tensiunea anodică  $u_a$  prin relația stabilită de Langmuir :

$$i_a = g u_a^{3/2}, \quad (2-70)$$

cunoscută și sub denumirea de teorema exponentului  $3/2$ , unde  $g$  este o constantă ce depinde de construcția tubului.

## 2.8.2. CURENTUL ELECTRIC ÎN GAZE

Trecerea curentului electric prin gaze sau prin vapori metalici intervine la numeroase dispozitive și aparate, dintre care se pot cita : tuburile ionice (gazo-troane, tiratroane etc.), tuburile luminoase, lămpile cu vapori metalici, aparatele cu arc electric etc. Pentru explicarea fenomenelor ce au loc se consideră un tub umplut cu gaz sau cu vapori metalici la o presiune scăzută. În stare normală, atomii de gaz sînt neutri din punct de vedere electric. În realitate, în masa gazului, datorită influenței razelor cosmice, cît și a radiațiilor radioactive emanate de scoarța pămîntului, există purtători de sarcină electrică : electroni, ioni pozitivi sau negativi în stare liberă (ionizare naturală). Aceste particule se mișcă haotic atît timp cît între electrozii tubului nu se aplică o diferență de potențial electric. În momentul aplicării unei tensiuni la electrozii tubului, câmpul electric dintre electrozi va ordona mișcarea particulelor încărcate cu sarcini electrice. Datorită mobilității superioare a electronilor liberi față de ioni, curentul electric prin gaz este stabilit practic de către electroni (curent electronic).

Între electronii liberi în stare de mișcare și atomii de gaz (neutri) se produc ciocniri, în urma cărora electronii cedează energie cinetică atomilor. Se disting trei feluri de ciocniri :

- ciocniri elastice, în urma cărora nu se modifică starea atomilor de gaz ;
- ciocniri neelastice care provoacă excitarea atomilor de gaz ;
- ciocniri neelastice care provoacă ionizarea gazului.

Sub aspectul trecerii curentului electric prin gaz, prezintă interes deosebit ciocnirile care au ca efect ionizarea gazului. De fapt, în afară de ionizarea prin șoc, mai poate avea loc, așa cum s-a amintit, și ionizarea prin radiații (fotoionizarea), respectiv ionizarea prin încălzirea gazului (termoionizarea) .

Caracteristica tensiune-curent a unui tub cu gaz este reprezentată în fig. 2-20. Pentru tensiuni aplicate între electrozi mai mici decât cea corespunzătoare punctului A, are loc deplasarea către electrozii corespunzători a electronilor și ionilor pozitivi, rezultați din procesul de ionizare naturală. Curentul electric prin gaz este extrem de mic, de ordinul  $10^{-18}$  A, și se supune legii lui Ohm.

Între punctele A și B ale caracteristicii volt-ampere are loc un fenomen de saturație prin curent în sensul că, la variații relativ mari pentru tensiune, se obțin variații relativ mici pentru curent. Datorită mobilității superioare a electronilor, aceștia ajung la anod mai repede decât ajung la catod ionii pozitivi. Se creează astfel în tub o sarcină spațială (volumetrică) pozitivă care, în anumite situații, nu favorizează creșterea curentului prin tub odată cu majorarea intensității câmpului electric.

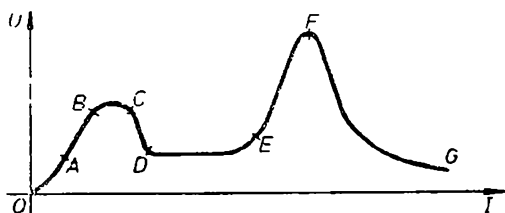


Fig. 2-20. Caracteristica tensiune-curent a unui tub cu gaz.

Bombardarea catodului de către ionii pozitivi provoacă fenomenul de *emisiune secundară de electroni* care, la rândul lor, sînt supuși acțiunii câmpului electric și sarcinilor spațiale din tub.

Cînd tensiunea dintre electrozi are valori cuprinse între punctele B și C, electronii liberi din gaz, rezultați atît prin ionizare naturală cît și prin emisiune secundară, posedă o energie cinetică suficientă pentru a provoca ionizarea prin șoc a atomilor de gaz. În urma ionizării prin șoc apar noi purtători de sarcini electrice care, accelerați de câmpul electric de tub, vor produce la rândul lor ionizarea altor atomi de gaz ș.a.m.d. Multiplicarea numărului de electroni liberi produce o ionizare cumulativă (în progresie geometrică), numită *avalanșă electronică*. Dacă, înainte de a apare ionizarea cumulativă, menținerea stării de ionizare din tub a avut nevoie de un agent exterior (descărcare neautonomă), după apariția ionizării cumulative starea de ionizare din tub se menține, independent de agentul exterior (descărcare autonomă). Evident, datorită avalanșei electronice curentul prin tub crește în măsură pronunțată odată cu majorarea tensiunii între electrozi.

În momentul în care tensiunea între electrozi obține valoarea corespunzătoare punctului C, denumită *tensiune de aprindere*, tubul trece în domeniul de descărcare luminescentă. La început apar radiații luminoase în cîteva suprafețe mici (puncte) ale catodului, care se extind odată cu creșterea curentului. Evident, descărcarea se menține în continuare autonomă și, datorită distribuției sarcinilor pozitive spațiale, descărcarea luminescentă se menține pentru valori mai mici ale tensiunii între electrozi.

Porțiunea *DE* a caracteristicii corespunde descărcării luminescente normale din tub, când tensiunea păstrează o valoare practic constantă. Pe această porțiune se situează punctul de funcționare al tuburilor luminescente cu catod rece.

Pe porțiunea *EF* a caracteristicii are loc o descărcare luminescentă anormală, însoțită de o creștere masivă a sarcinilor pozitive care se deplasează spre catod. Bombardarea intensă a catodului de către ionii pozitivi produce încălzirea acestuia, aducându-l în stare de emisiune termoelectronică (emisiune de electroni primari).

Porțiunea *FG* a caracteristicii corespunde descărcării în arc electric, caracterizat atât printr-o emisiune masivă de electroni primari de către catodul încălzit (pată catodică), cât și printr-o ionizare termică intensă a coloanei de gaz. Langmuir a denumit *plasmă* această stare de ionizare intensă a gazului. După Steubeck, plasma reprezintă *a patra stare de agregare a materiei*.

Sub aspectul conductibilității electrice, proprietățile plasmei se aseamănă atât cu ale metalelor, cât și cu cele ale electroliților. Asemănarea cu metalele constă în faptul că în plasmă există electroni liberi a căror sarcini se compensează cu sarcinile ionilor pozitivi existenți în același volum (deși ionii nu formează o rețea fixă ca la metale, totuși datorită dimensiunilor lor mari și a mobilității reduse, pot fi considerați imobili față de electroni). Asemănarea cu un electrolit constă în faptul că purtătorii mobili de sarcini electrice sînt nu numai electronii liberi, ci și ionii rezultați în urma procesului de ionizare a gazului.

## 2.9. CURENTUL ELECTRIC ÎN ELECTROLIȚI

### 2.9.1. CONDUCTIBILITATEA ELECTROLIȚILOR

La conductoare de prima speță (metalele și carbonul) conductibilitatea electrică este mijlocită de „gazul” electronic format din electronii liberi. Trecerea curentului electric prin aceste conductoare nu este însoțită de reacții chimice.

La conductoarele de a doua speță, denumite electroliți (acizi, baze și săruri în soluție), conductibilitatea electrică este mijlocită de ionii pozitivi și negativi formați în soluție prin disociere electrolitică. Trecerea curentului electric prin aceste conductoare este însoțită de reacții chimice.

Un exemplu de conductor electrolitic este soluția de sare de bucătărie în apă. Majoritatea moleculelor de NaCl se disociază în ioni de sodiu și de clor :



Disociația electrolitică se datorește faptului că moleculele solventului (apa) slăbesc forțele electrice care leagă ionii substanței de dizolvat (NaCl). Se numește *grad de disociere*  $\alpha$  raportul dintre numărul de molecule disociate și numărul total de molecule dizolvate. La electroliții tari, cum sînt acizii, bazele și sărurile lor  $\alpha \cong 1$ , adică majoritatea moleculelor sînt disociate.

Conductibilitatea electroliților depinde de concentrația soluției. În fig. 2-21 este reprezentată variația conductivității electrice în funcție de concentrație pentru electrolitul format din acid sulfuric dizolvat în apă distilată.

Curentul electric prin electrolit este determinat de mișcarea în sensuri opuse a ionilor pozitivi și a ionilor negativi, sub acțiunea forțelor determinate de cîmpul electric din electrolit (fig. 2-22). În mișcarea lor, ionii sînt frînați

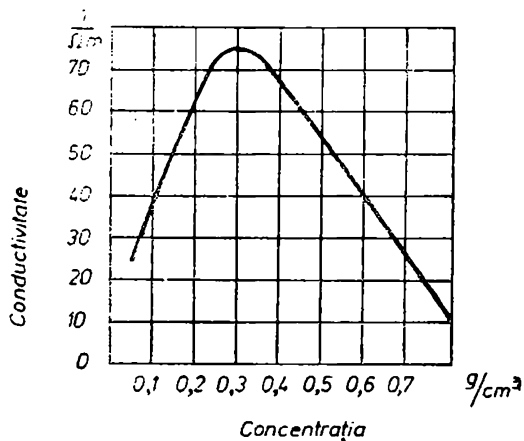


Fig. 2-21. Dependența conductivității de concentrația electrolitului.

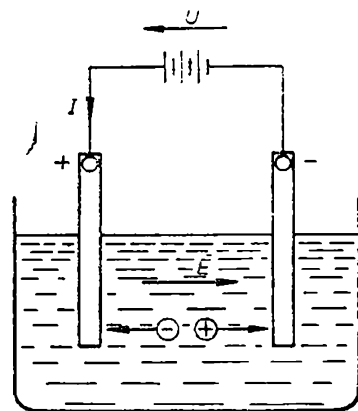


Fig. 2-22. Mișcarea ionilor în electrolit.

de ciocnirile cu particulele electrolitului. În stare de echilibru electrocinetic, viteza de mișcare a ionilor în electrolit obține o valoare proporțională cu intensitatea câmpului electric :

$$\bar{v}_- = K_- \bar{E}, \quad \bar{v}_+ = K_+ \bar{E}, \quad (2-71)$$

unde  $K_-$  și  $K_+$  reprezintă factorul de mobilitate al ionilor negativi, respectiv pozitivi.

Densitatea de curent prin electrolit se obține prin însumarea sarcinilor negative și pozitive care trec în unitatea de timp, prin unitatea de suprafață (v. relația 2-11) :

$$\vec{J} = \rho_{0-} \bar{v}_- + \rho_{0+} \bar{v}_+ = (\rho_{0-} K_- + \rho_{0+} K_+) \bar{E} = \sigma \bar{E}, \quad (2-72)$$

unde  $\rho_{0-}$  și  $\rho_{0+}$  sînt densitățile de volum ale sarcinilor (ionilor) pozitive și negative din electrolit, iar  $\sigma$  este conductivitatea electrolitului.

La creșterea temperaturii, conductivitatea electrică a electrolitilor crește (rezistivitatea scade), ceea ce se justifică prin mărirea gradului de disociere în urma creșterii agitației termice.

### 2.9.2. ELECTROLIZA ȘI APLICAȚIILE INDUSTRIALE

Reacția chimică produsă într-o soluție de electrolit la trecerea curentului electric se numește *electroliză*.

Sub influența câmpului electric creat în electrolit de o sursă de curent continuu exterioară, ionii negativi se deplasează prin electrolit spre electrodul pozitiv, denumit anod, iar ionii pozitivi spre electrodul negativ, denumit catod (fig. 2-22). Ionii negativi se numesc *anioni*, iar ionii pozitivi se numesc *cationi*.

Ionii respectivi fiind fragmente de moleculă, mișcarea lor este însoțită și de un transport de substanță deoarece, ajungînd la electrozi, primesc sau cedează electroni, transformîndu-se în molecule neutre, în mod direct, sau în urma unor reacții chimice.

Electroliza are aplicații industriale deosebit de importante, cum sînt : rafinarea metalelor, prepararea metalelor din săruri, metalizarea, obținerea unor produse chimice etc.

*Rafinarea metalelor* constă în purificarea lor prin electroliză. De exemplu, prin rafinarea cuprului impur se obține cupru pur (cupru electrolitic). În acest caz, electrolitul este o soluție de sulfat de cupru amestecat cu acid sulfuric, anodul este format dintr-o bară de cupru (impur), iar catodul constă dintr-o tablă de cupru pe care se depune cuprul pur.

*Prepararea metalelor din sărurile lor.* De exemplu, aluminiul, un metal foarte mult întrebuințat în tehnica modernă, este obținut în întregime prin electroliza sărurilor sale. Ca electrolit se întrebuințează florura dublă de aluminiu și sodiu topită, iar ca electrozi plăci de cărbune. Sarea rămîne topită prin temperatura ridicată (950—980 °C), rezultată din căldura dezvoltată la trecerea curentului prin electrolit. La noi în țară se prepară aluminiu pe această cale la Combinatul de Aluminiu din Slatina, intrat în funcțiune în 1965.

*Metalizarea* constă în acoperirea prin electroliză a suprafețelor metalice cu un strat subțire de metal rezistent la coroziune (exemplu : nichelarea, cromarea etc.).

### 2.9.3. LEGEA ELECTROLIZEI

Legea electrolizei, stabilită de *Faraday*, arată că masa unui element, sau radical chimic, depusă la electrod prin electroliză, este proporțională cu cantitatea de sarcină electrică ce trece prin electrolit și cu echivalentul chimic al elementului respectiv, adică :

$$m = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{A}{\nu} \int i dt = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{A}{\nu} Q = K_e Q, \quad (2-73)$$

unde :

$i$  este curentul electric din electrolit, în A ;

$A$  — masa atomică a substanței ;

$\nu$  — valența produsului depus ;

$\frac{A}{\nu}$  — echivalentul chimic ;

$Q = \int i dt$  — sarcina electrică ;

$F_0 = 96\,490$  coulombi — constanta lui Faraday (sarcina electrică necesară pentru a depune o masă egală cu masa echivalentă  $m_e = \frac{A}{\nu}$ ).

Mărimea :

$$K_e = \frac{1}{F_0} \frac{A}{\nu} \quad (2-74)$$

se numește echivalent electrochimic și reprezintă cantitatea de substanță depusă de unitatea de sarcină electrică (1 C).

Energia electrică consumată pentru electroliză în industrie este destul de însemnată. De exemplu, pentru electroliza aluminiului rezultă circa 18 000 ... 20 000 kWh/tonă. Curentul continuu folosit la electroliză ajunge la zeci de mii de amperi.



*Polarizarea electrozilor* este un fenomen ce apare în procesul de electroliză și constă în depunerea unei pelicule de gaz pe suprafața electrozilor, aderînd la neuniformitățile microscopice ale acestei suprafețe (la catod se depune o peliculă de hidrogen, la anod o peliculă de oxigen). Pelicula de gaz împreună cu electrozii formează un element galvanic avînd o t.e.m. egală cu circa 1 V (tensiune de polarizare) ce acționează în sens invers față de curentul dat de sursa exterioară. În practică se iau măsuri pentru evitarea sau diminuarea acestui fenomen nefavorabil.

## 2.10. CÎMPURI ELECTRICE IMPRIMATE

În afară de forțele determinate de cîmpul electric ce acționează asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice, asupra acestora mai pot acționa, în anumite condiții, și forțe care nu sînt de natură electrică. Dacă  $\vec{F}_{ne}$  este o astfel de forță și  $Q$  este sarcina particulei asupra căreia acționează, se poate considera că această forță este determinată de un cîmp electric, denumit *cîmp electric imprimat*, a cărui intensitate este :

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_{ne}}{Q}. \quad (2-75)$$

Prin definiție, integrala de linie a intensității cîmpului electric imprimat reprezintă tensiunea electromotoare :

$$\int \vec{E}_i \, dl = U_e. \quad (2-76)$$

Cîmpurile electrice imprimate pot fi împărțite în două categorii : de volum și de contact. Cîteva exemple de *cîmpuri electrice imprimate în volumul conducătoarelor* sînt expuse în continuare.

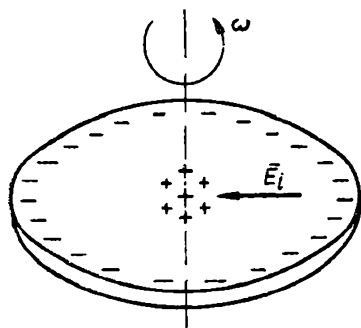


Fig. 2-23. Disc metalic rotitor.

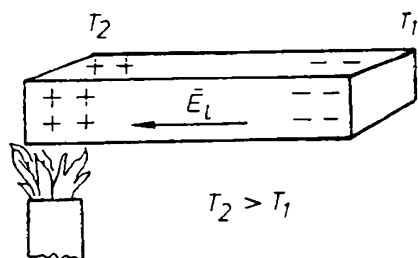


Fig. 2-24. Cîmp imprimat termic.

*Cîmpuri imprimate de accelerație.* Se consideră un disc metalic menținut în mișcare de rotație cu o viteză unghiulară foarte mare (fig. 2-23). Forța centrifugă ce acționează asupra electronilor liberi din metal îi deplasează spre periferia discului, la centru rămînînd sarcini electrice pozitive necompensate. Vectorul intensității cîmpului electric imprimat este orientat radial, de la periferia discului spre centru.

*Cîmpuri imprimate termice.* Se consideră o bară din metal încălzită la unul din capete (fig. 2-24). Datorită energiei termice primită de la sursă, concen-

trația electronilor liberi devine mai mare în zona încălzită față de zona rece. Diferența de concentrație face ca electronii liberi să difuzeze spre capătul rece al barei, la capătul cald rămânând sarcini (ioni) pozitive în surplus. Intensitatea cîmpului electric imprimat are orientarea de la capătul rece spre capătul încălzit al barei.

*Cîmpuri imprimate de concentrație.* Se consideră un vas separat în două compartimente printr-un perete poros (fig. 2-25). În cele două compartimente se pune acid clorhidric concentrat, respectiv diluat. În urma fenomenului de

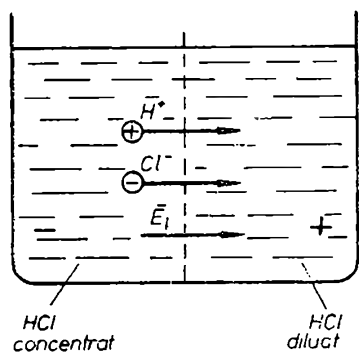


Fig. 2-25. Cîmp imprimat de concentrație.

disociere electrolică, rezultă ioni pozitivi de hidrogen ( $H^+$ ), respectiv ioni negativi de clor ( $Cl^-$ ). Mobilitatea ionilor de hidrogen fiind mult mai mare decît mobilitatea ionilor de clor, aceștia difuzează mai ușor, respectiv în număr mai mare, din compartimentul cu concentrație ridicată în compartimentul cu concentrație scăzută. Astfel în compartimentul cu soluție diluată apare un surplus de sarcini electrice pozitive, iar în compartimentul cu soluție concentrată rămîne un surplus de sarcini electrice negative. Cîmpul electric imprimat are sensul arătat în figură.

*Cîmpuri electrice imprimate de contact* apar la elementele galvanice și la termoelemente la care se fac referiri în cele ce urmează.

## 2.11. ELEMENTE GALVANICE

Elementele galvanice sînt surse chimice de curent continuu la care energia chimică se transformă în energie electrică. În general, un element galvanic constă din doi electrozi introduși într-un electrolit (sau în doi electroliti diferiți), la electrozi fiind legate cele două borne, plus și minus, ale elementului.

Parametrii prin care se caracterizează un element galvanic sînt:

- tensiunea electromotoare, în volți;
- rezistența interioară, în ohmi;
- capacitatea, în amperi-ore.

Capacitatea unui element galvanic se exprimă prin relația:

$$C_{Ah} = \int_0^t i_a dt = i_{am} t, \quad (2-77)$$

adică reprezintă produsul dintre curentul mediu de descărcare  $i_{am}$  și timpul de descărcare  $t$ , în așa fel încît tensiunea finală a elementului să nu scadă sub o valoare fixată prin condițiile de exploatare normală.

În timpul funcționării elementelor galvanice apare fenomenul de polarizare care constă în:

- modificarea concentrației ionilor în imediata vecinătate a electrozilor față de concentrația ionilor din restul soluției (polarizare de concentrație);
- modificarea compoziției chimice a electrolitului (polarizare chimică).

Fenomenul de polarizare are ca efect micșorarea t.e.m. a elementului și mărirea rezistenței interioare. Evitarea polarizării se realizează prin folosirea unor substanțe depolarizante așezate în jurul electrozilor (bioxid de mangan, sulfat de cupru, acid azotic etc.).

Elementele galvanice sînt de două tipuri: elemente galvanice primare (pile) și elemente galvanice secundare (acumulatoare). Elementele galvanice primare nu sînt reversibile, adică în aceste elemente energia electrică nu poate fi transformată în energie chimică (prin încărcare). În schimb, cele secundare sînt reversibile, adică prin încărcarea lor energia electrică este transformată în energie chimică.

Simbolul folosit pentru notarea surselor chimice de curent este cel din fig. 2-26 (linia mai lungă și subțire reprezintă borna pozitivă a sursei).

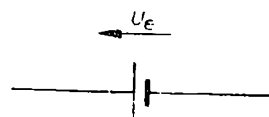


Fig. 2-26. Simbolul elementului galvanic.

Mai multe elemente galvanice grupate între ele în serie, în paralel sau mixt constituie *bateriile electrice*.

### 2.11.1. ELEMENTE GALVANICE PRIMARE (PILE ELECTRICE)

Dependent de natura electrozilor și a electrolitului, respectiv a substanței depolarizante, elementele galvanice primare sînt de mai multe tipuri.

*Pila Volta*, la care cei doi electrozi sînt unul din zinc (minus) și altul din cupru (plus), iar electrolitul este o soluție apoasă de acid sulfuric ( $\text{SO}_4\text{H}_2 + \text{H}_2\text{O}$ ). Tensiunea electromotoare a unui astfel de element este 1,104 V. Fenomenul de polarizare ce apare la acest tip de element este foarte pronunțat.

*Pila Leclanché* are electrodul negativ din zinc, cel pozitiv din cărbune, electrolitul este o soluție de clorură de amoniu ( $\text{NH}_4\text{Cl}$ ), iar depolarizantul este bioxidul de mangan (situat în jurul electrodului pozitiv pentru reducerea hidrogenului ce polarizează acest electrod). T.e.m. a pilei Leclanché este circa 1,5 V, iar rezistența interioară 3...10  $\Omega$ . Este o pilă robustă, cu o durată de funcționare foarte mare.

*Elementul normal Weston* este folosit în laboratoare ca etalon pentru tensiunea electromotoare. Electrodul pozitiv este constituit din mercur, cel negativ din amalgam de cadmiu ( $\text{HgCa}$ ), iar electrolitul este o soluție a sulfatului de cadmiu. La temperatura de 20 °C, t.e.m. a acestui element este 1,01829 V.

Elementul normal Weston nu poate fi folosit ca sursă de curent, ci numai ca sursă de comparație pentru tensiune.

*Elementul galvanic Daniel-Iacobi*, pe care îl descriem mai în detaliu, constă dintr-un vas despărțit în două compartimente printr-un perete poros (fig. 2-27). Într-un compartiment se pune o soluție diluată de sulfat de zinc ( $\text{SO}_4\text{Zn}$ ), în care se introduce un electrod de zinc (Zn), iar în celălalt compartiment se pune o soluție concentrată de sulfat de cupru ( $\text{SO}_4\text{Cu}$ ), în care se introduce un electrod de cupru (Cu).

Datorită presiunii de dizolvare a zincului în soluția diluată de sulfat de zinc, ionii pozitivi de zinc ( $\text{Zn}^{++}$ ) vor trece în soluție, pe electrod rămînînd un surplus de electroni. Apar în felul acesta la suprafața de contact dintre electrod și electrolit sarcini electrice duble care determină un cîmp electric coulombian cu intensitatea  $\vec{E}'_c$ , respectiv între două puncte situate pe o parte

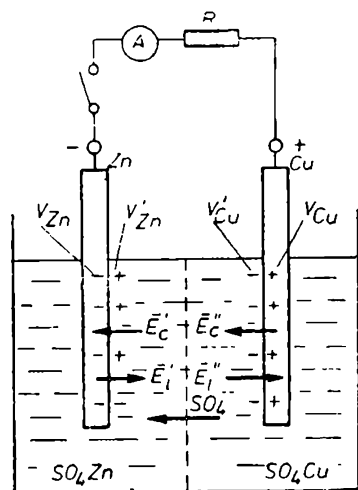


Fig. 2-27. Elementul galvanic Daniel-Iacobî.

și de alta a suprafeței de separație ia naștere diferența de potențial  $V'_{Zn} - V_{Zn}$ .

În compartimentul cu soluție concentrată de sulfat de cupru, datorită presiunii osmotice, ionii pozitivi de cupru ( $\text{Cu}^{++}$ ) se depun pe electrod, în soluție rămînînd ionii negativi ai radicalului  $\text{SO}_4^{--}$ . La suprafața de contact apare cîmpul electric coulombian  $\vec{E}_c''$ , respectiv diferența de potențial  $V_{Cu} - V'_{Cu}$  între două puncte situate de o parte și de alta a suprafeței.

Starea de echilibru se stabilește în momentul cînd forța determinată de cîmpul  $\vec{E}_c'$ , respectiv  $\vec{E}_c''$ , este egală și de sens opus cu forța datorită presiunii de dizolvare, respectiv cu forța datorită presiunii osmotice. În această stare, mișcarea ionilor încetează. Electrocul de Zn se va găsi la un potențial negativ ( $V_{Zn}$ ), iar electrocul de cupru la un potențial pozitiv ( $V_{Cu}$ ).

Dacă între cei doi electrozi se conectează un rezistor în serie cu un ampermetru, se va constata trecerea prin circuit a unui curent electric. Energia calorică dezvoltată la trecerea curentului prin rezistor apare în contul energiei eliberate în timpul reacțiilor chimice din interiorul elementului. Într-adevăr, la dizolvarea zincului se eliberează o cantitate de energie mai mare decît se consumă la depunerea cuprului din soluție pe electrod. Diferența dintre aceste două energii se transformă în căldură prin efect Joule-Lenz.

Presiunea de dizolvare a zincului în soluție, respectiv presiunea osmotică de depunere a cuprului pe electrod determină forțe de natură neelectrică care acționează asupra ionilor pozitivi de metal și îi pun în mișcare. Aceste forțe pot fi considerate ca fiind datorate unui cîmp electric imprimat,  $\vec{E}_i$ , definit prin relația (2-75). Sensul lui  $\vec{E}_i$  este opus cîmpului electric coulombian  $\vec{E}_c$ , determinat de sarcinile electrice (fig. 2-27). Starea de echilibru are loc atunci cînd cîmpul rezultat este nul, adică :

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_i = 0. \quad (2-78)$$

Efectuînd  $\int \vec{E} d\vec{l}$  de-a lungul unei linii ce începe din electrocul de Zn, trece prin electrolit și se termină în electrocul de Cu, deci străbate cele două suprafețe unde există cîmpurile electrice  $\vec{E}_c$  și  $\vec{E}_i$ , se obține :

$$\int_{Zn}^{Cu} \vec{E} d\vec{l} = 0 = \int_{Zn}^{Cu} \vec{E}_i d\vec{l} + \int_{Zn}^{Cu} \vec{E}_c d\vec{l}. \quad (2-79)$$

Integrala de linie a intensității cîmpului electric imprimat este, prin definiție, tensiunea electromotoare, iar integrala de linie a cîmpului electric coulombian este egală cu diferența de potențial. În cazul de față, rezultă :

$$\int_{Zn}^{Cu} \vec{E}_i d\vec{l} = U_e, \quad (2-80)$$

$$\int_{Zn}^{Cu} \vec{E}_c d\vec{l} = \int_{Zn}^{\text{electrolit}} \vec{E}_c' d\vec{l} + \int_{\text{electrolit}}^{Cu} \vec{E}_c'' d\vec{l} = (V_{Zn} - V'_{Zn}) + (V'_{Cu} - V_{Cu}) \quad (2-81)$$

Înlocuind relațiile (2-80) și (2-81) în (2-79), se obține :

$$U_e + (V_{Zn} - V'_{Zn}) + (V'_{Cu} - V_{Cu}) = 0,$$

de unde rezultă :

$$U_e = (V'_{Zn} - V_{Zn}) + (V_{Cu} - V'_{Cu}). \quad (2-82)$$

La elementul Daniel-Iacobi s-a constatat experimental că  $V'_{Zn} - V_{Zn} = 0,770$  V și  $V_{Cu} - V'_{Cu} = 0,329$  V, deci  $U_e = 1,099$  V.

În mod analog se explică și funcționarea celorlalte tipuri de elemente galvanice primare.

Sensul tensiunii electromotoare la elementele galvanice este de la electrodul negativ spre electrodul pozitiv (fig. 2-26). Se poate spune că tensiunea electromotoare acționează în interiorul sursei ca o „pompă” care face să treacă curentul de la electrodul cu potențial mai mic (negativ), spre electrodul cu potențial mai ridicat (pozitiv). Când sursa debitează curent, echilibrul exprimat prin relația (2-75) se modifică, intensitatea cîmpului electric coulombian devenind mai mică decît intensitatea cîmpului imprimat ( $\vec{E}_c < \vec{E}_i$ ). Diferența dintre aceste două intensități de cîmp este cea care menține mișcarea permanentă a purtătorilor de sarcini electrice.

*Pilele electrice industriale* se realizează sub formă de baterii, avînd mai multe elemente legate în serie. După domeniul de întrebuințare, se deosebesc :

- elemente pentru baterii de buzunar ;
- elemente pentru baterii anodice ;
- elemente pentru baterii de semnalizare și telecomunicații etc.

T.e.m. pe element, în stare nouă, este circa 1,5 V. După descărcare, t.e.m. ajunge la circa 0,5...0,6 V. Datorită fenomenului de autodescărcare, t.e.m. scade în timp, chiar dacă bateria nu este folosită.

Capacitatea pilor industriale variază între 0,25...500 Ah. Valoarea acestei capacități depinde de cantitatea de substanță activă pe care o conține elementul.

Se construiesc baterii pentru funcționarea continuă și pentru funcționarea intermitentă.

## 2.11.2. ACUMULATOARE ELECTRICE

Acumulatorii electrice sînt elemente chimice reversibile, care permit transformarea energiei chimice în energie electrică și invers. După natura electrolitului, se deosebesc două tipuri de acumulatori : *acide și alcaline*. Din categoria acumulatorilor acide fac parte acumulatorii cu plumb, iar din categoria acumulatorilor alcaline fac parte acumulatorii fero-nichel și cadmiu-nichel.

**Acumulatorii cu plăci din plumb** sînt cele mai răspîndite datorită calităților electrice remarcabile și tehnologiei de fabricație relativ ușoară, comparativ cu alte tipuri. Electrolitul este o soluție a acidului sulfuric ( $\text{SO}_4\text{H}_2$ ) în apă distilată ( $\text{H}_2\text{O}$ ), cu o concentrație de 20...30% (densitate 1,2...1,3).

O celulă (un element) al acumulatorului constă din mai multe plăci pozitive legate între ele și intercalate între plăcile negative (fig. 2-28), astfel ca

suprafața de contact cu electrolitul să fie cât mai mare, iar distanța dintre plăci cât mai mică. Substanța de bază atât a plăcilor pozitive, cât și a celor negative este plumbul. Suporturile plăcilor se realizează sub formă de grătare

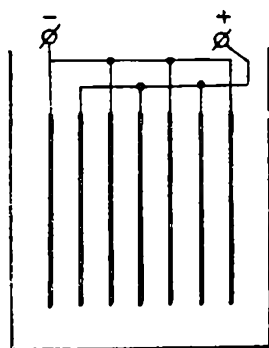


Fig. 2-28. Plăcile acumulatorului cu plumb.

dintr-un aliaj de plumb cu antimoniu pentru a avea o rezistență mecanică mare. În cavitățile suportilor se introduce pasta, compusă din amestecul în diferite proporții a: tetraoxidului de plumb ( $Pb_3O_4$  — miniu de plumb), monoxid de plumb ( $PbO$  — litargă), pilitură de plumb, sulfat de amoniu, zaharat de bariu, sulfat de magneziu, grafit și glicerină. Pasta plăcilor pozitive are un conținut diferit față de cel al plăcilor negative și anume, la plăcile pozitive se adaugă agenți de porozitate (sulfat de amoniu, sulfat de magneziu), iar la plăcile negative se adaugă agenți de conductivitate (grafit, sulfat de bariu). Distanța dintre plăci se realizează cât mai mică pentru a obține o rezistență internă de valoare redusă.

Un acumulator cu plumb nou, înainte de a fi dat în folosință, trebuie supus operației de *formare*, care constă în încărcarea și descărcarea repetată, cu un curent de valoare mică și electrolit de concentrație redusă.

În stare încărcată, plăcile pozitive conțin bioxid de plumb ( $PbO_2$ ), cele negative conțin plumb poros (spongios), iar electrolitul are concentrație ridicată (densitate 1,29).

În timpul descărcării, atât la plăcile pozitive, cât și la cele negative se formează sulfat de plumb ( $SO_4Pb$ ), iar electrolitul se diluează (densitatea ajunge la 1,15). Suprasolicitarea acumulatorului în timpul descărcării poate conduce la sulfatarea ireversibilă a plăcilor, respectiv la micșorarea capacității și a duratei de funcționare a acumulatorului.

În fig. 2-29 sînt reprezentate curbele de variație a tensiunii și a concentrației electrolitului în timpul încărcării și descărcării, cu un curent constant, a acumulatorului cu plumb. Timpul normal de încărcare este de circa 10 ore, ceea ce înseamnă un curent de încărcare mediu egal cu  $1/10$  din capacitatea

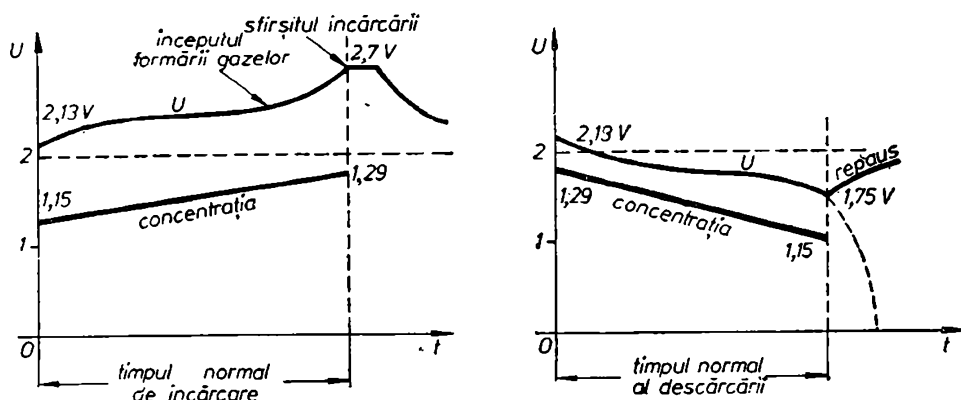


Fig. 2-29. Variația tensiunii și concentrației la încărcarea și descărcarea acumulatorului cu plumb (pentru un element).

acumulatorului. Sfirșitul operației de încărcare se evidențiază prin intensificarea formării gazelor datorită electrolizei apei (acumulatorul fierbe).

Randamentul acumulatorului se exprimă prin raportul dintre energia electrică cedată de acumulator în timpul descărcării și energia consumată în timpul încărcării. Acest randament este influențat în mare măsură de fenomenul de electroliză a apei ce apare la încărcare și care nu poate fi evitat la soluțiile apoase.

**Acumulatorii alcaline**, al căror electrolit este o soluție alcalină, sînt de două tipuri :

- acumulatori fero-nichel (Fe-Ni) ;
- acumulatori cadmiu-nichel (Cd-Ni).

Comparativ cu acumulatorii cu plumb, aceste acumulatori sînt mai ușoare, mai robuste și nu necesită o întreținere specială. Electrozii sînt realizați din tablă sau sîrmă din oțel nichelat, pe care sînt fixate substanțele active. La electrodul pozitiv substanța activă este hidratul negru de nichel —  $\text{Ni}(\text{OH})_3$ , care se prepară foarte greu pe cale chimică, în schimb se obține foarte ușor prin oxidare electrochimică, la formarea acumulatorului, din hidratul verde de nichel —  $\text{Ni}(\text{OH})_2$ . Deoarece hidratul negru de nichel este rău conducător de electricitate i se adaugă :

- solzi de Ni metalic, la acumulatorii Fe-Ni ;
- solzi de grafit, la acumulatori Cd-Ni.

La electrozii negativi substanța activă este :

- fierul, la acumulatorii Fe-Ni ;
- cadmiul spongios (cu 15% Fe), la acumulatorii Cd-Ni.

Bacul și capacul sînt realizate din tablă de oțel nichelat, îmbinate prin sudare.

Electrolitul este o soluție apoasă de potasă caustică (KOH), cu greutatea specifică 1,19...1,21. Spre deosebire de acumulatorii acide, la acumulatorii alcalini electrolitul nu participă la reacțiile chimice ce au loc în timpul descărcării și încărcării și, ca urmare, concentrația sa rămîne nemodificată.

Tensiunea electromotoare a acumulatorilor alcalini are valoarea de 1,41 V pentru acumulatorii Fe-Ni și 1,38 V pentru acumulatorii Cd-Ni.

La acumulatorii Fe-Ni borna „minus“ este legată la masă, iar la acumulatorii Cd-Ni este legată la masă borna „plus“.

## 2.12. TERMOELEMENTE

Experimental se constată că punînd în contact capetele a două conductoare metalice diferite, apare o tensiune electromotoare care poate fi măsurată cu ajutorul unui milivoltmetru legat la capetele rămase libere. Valoarea tensiunii măsurate depinde de temperatura locului de contact, din care cauză astfel de dispozitive se numesc termoelemente.

Explicația apariției t.e.m. la termoelemente constă în faptul că concentrațiile  $N_A$  și  $N_B$  a electronilor liberi din cele două metale A și B sînt diferite. Lipind între ele aceste metale (fig. 2-30), apare fenomenul difuziei, adică electronii din metalul cu concentrație mai mare, de exemplu A, trec prin supra-

fața de lipire în metalul  $B$  cu concentrație mai mică ( $N_B < N_A$ ). Valoarea t.e.m. este dată de relația :

$$U_{eBA} = 2,87 \cdot 10^{-7} T \ln \frac{N_A}{N_B} \text{ [V]} \quad (2-83)$$

unde  $T$  este temperatura absolută a suprafeței de contact.

Dacă cele două conductoare sînt lipite la ambele capete (fig. 2-31) și temperatura suprafețelor de lipire este aceeași, rezultă t.e.m. pentru circuitul închis egală cu zero, adică :

$$U_{eBA} + U_{eAB} = 2,87 \cdot 10^{-7} T \ln \frac{N_A}{N_B} + 2,87 \cdot 10^{-7} T \ln \frac{N_B}{N_A} = 0.$$

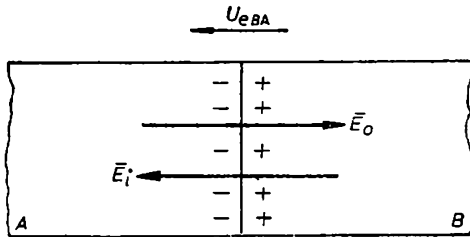


Fig. 2-30. Suprafața de contact între două conductoare diferite.

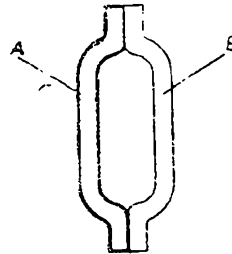


Fig. 2-31. Conductoarele în contact la ambele capete.

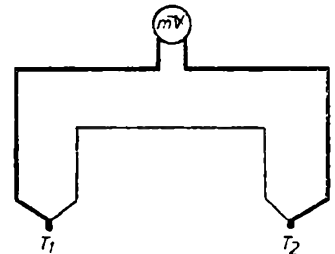


Fig. 2-32. Termocuplul cu milivoltmetru.

Dacă temperaturile la cele două suprafețe de contact sînt diferite,  $T_1$  și  $T_2$  [°K], atunci t.e.m. din circuitul închis este diferită de zero (efectul Seebeck) :

$$U_e = 2,87 \cdot 10^{-7} \ln \frac{N_A}{N_B} (T_1 - T_2) \quad (2-84)$$

sau

$$U_e = K (T_1 - T_2), \quad (2-85)$$

adică t.e.m. este proporțională cu diferența dintre temperaturile absolute ale celor două suprafețe de contact,  $K$  fiind o constantă a cuplului respectiv, denumită t.e.m. specifică :

$$K = 2,87 \cdot 10^{-7} \ln \frac{N_A}{N_B}. \quad (2-86)$$

Pe baza celor arătate mai sus, se construiesc termocuplele folosite în tehnică pentru măsurarea diferențelor de temperatură (fig. 2-32). Milivoltmetrul care măsoară t.e.m. a termocuplului este gradat în unități de temperatură.

Industrial, se folosesc termocuplele realizate din materialele specificate în tabela 2-5.

Pe baza efectului Seebeck descris mai sus se construiesc generatoarele termoelectrice (pile termoelectrice) care realizează conversia directă a energiei calorice în energie electrică. Numai că, astfel de generatoare sînt de puteri mici (de ordinul zecilor de watt).



Tabela 2-5

Date caracteristice ale unor termocupluri

Termocuplul	Temperatura maximă de utilizare [°C]	T.e.m. pentru $T_2 - T_1 =$ = 100°C [mV]
Constantan-cupru	500	5
Constantan-cromnichel	900	6,2
Constantan-fier	900	5,1
Nichel-cromnichel	(de la 300) 1 000	4,1
Platin-platin rodii	(de la 600) 1 600	0,9
Iridiu-iridiu rodii	2 000	0,5
Wolfram-wolfram molibden	3 000	0,3

Efectul Seebeck devine mult mai pronunțat la joncțiunile metal-semiconductor, datorită, pe de o parte, conductibilității termice mai reduse a semiconductoarelor și, pe de altă parte, densității purtătorilor de sarcini de numai  $10^{18}/\text{cm}^3$  la semiconductoare, față de  $10^{23}/\text{cm}^3$  la metale.

**Aplicația 2-7.** Tensiunea electromotoare măsurată de instrumentul atașat unui termocuplu din platin-platin rodii este de 13 mV, termocuplul fiind introdus în interiorul unui cuptor. Să se determine temperatura din cuptor față de temperatura mediului ambiant.

**Rezolvare.** Temperatura din cuptor se determină folosind relația (2-85) și datele din tabela 2-5, adică :

$$T_2 - T_1 = \frac{U_e}{K} = \frac{13}{0,009} = 1\,444\text{ }^\circ\text{K}.$$

## Capitolul 3

### REȚELE ELECTRICE DE CURENT CONTINUU

#### 3.1. CIRCUIT ELECTRIC ȘI REȚEA ELECTRICĂ. SENSURI DE REFERINȚĂ

Prin circuit electric se înțelege ansamblul mediilor prin care poate circula curentul electric. Aceste medii pot fi conductoare, semiconductoare sau medii dielectrice. În medii conductoare și semiconductoare există curent electric de conducție, iar în medii dielectrice curent de deplasare.

În general, un circuit este constituit din *elemente de circuit* care sînt : rezistoarele, bobinele, condensatoarele și sursele de tensiune electromotoare. Aceste elemente pot fi grupate între ele în serie, în paralel, mixt (serie-paralel) sau complex.

Elementele de circuit se caracterizează prin următorii parametri :  $R$  — rezistența electrică,  $L$  — inductanța,  $C$  — capacitatea electrică,  $U_e$  — tensiunea electromotoare. Dacă ne referim, spre exemplu, la un rezistor folosit în laborator, realizat din sîrmă bobinată, acesta se caracterizează atît prin rezistența electrică  $R$ , cît și prin inductanța  $L$  a spirelor și capacitatea  $C$  dintre spire, parametrul predominant fiind însă rezistența electrică. În situație analoagă se prezintă și bobinele, respectiv condensatoarele folosite în practică.

Prin abstractizare, în teoria circuitelor electrice se introduc așa-numitele *elemente ideale de circuit* și anume : rezistorul ideal caracterizat numai prin parametrul  $R$ , bobina ideală caracterizată numai prin parametrul  $L$ , condensatorul ideal caracterizat numai prin parametrul  $C$ , generatorul ideal de tensiune, a cărui tensiune la borne este independentă de curent și generatorul ideal de curent, la care curentul debitat este independent de tensiunea la borne. În anumite situații concrete și în anumite limite date, elementele de circuit folosite în practică pot fi considerate ca fiind ideale.

Pentru reprezentarea elementelor ideale de circuit se folosesc simbolurile din fig. 3-1.

Un ansamblu de circuite electrice, conectate între ele într-un mod oarecare, constituie *rețeaua electrică*.

Reprezentarea grafică prin simboluri a elementelor de circuit sau de rețea și a modului cum acestea sînt conectate între ele se numește *schemă electrică* (fig. 3-2, a). În timp ce circuitul (rețeaua) constituie un sistem fizic real, schema circuitului (rețelei) reprezintă o abstractizare, o reprezentare simbolică a circuitului sau rețelei. O schemă electrică se consideră corect întocmită dacă ecuațiile stabilite pe baza ei descriu cu aproximație satisfăcătoare comportarea circuitului (rețelei) reprezentate prin schema respectivă.

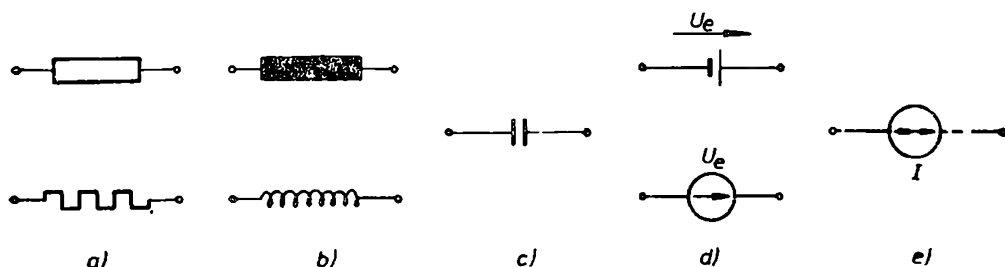


Fig. 3-1. Simboluri ale unor elemente de circuit :

*a* — rezistor; *b* — bobină; *c* — condensator; *d* — generator ideal de tensiune; *e* — generator ideal de curent.

Analizînd schema unei rețele electrice (fig. 3-2, *a*) se disting: laturi, noduri, ochiuri și arbori. Se numește *latură* de rețea o porțiune mărginită și neramificată a ei. *Nodul* este punctul în care se leagă împreună cel puțin trei capete de laturi.

Se numește *ochi* de rețea o succesiune de laturi care formează o curbă închisă. Partea rețelei care nu conține ochiuri se numește *arbore* (rețea arborescentă).

În unele considerațiuni de ordin mai general, nu interesează elementele conținute în laturile rețelei, motiv pentru care acestea nu se mai desenează în schemă, obținîndu-se *graful* rețelei sau *schema topologică* (fig. 3-2, *b*).

Dacă latura de rețea conține surse, ca de exemplu latura *AB* din fig. 3-2, *a*, ea se numește *activă*; în caz contrar se spune că latura este *pasivă* (de exemplu latura *BC*).

Un circuit electric este *filiform* dacă densitatea de curent este constantă în punctele secțiunii sale transversale. În caz contrar, circuitul este *masiv*.

Dacă parametrii elementelor unui circuit sînt independenți de tensiune sau de curent, atunci circuitul este *liniar*. Circuitul este *nelinier* dacă cel puțin unul din parametrii săi depinde de tensiune sau de curent.

Circuitele electrice pot fi cu parametrii *concentrați* sau cu parametrii *repartizați* în lungul lor. În ultimul caz se folosesc parametrii lineici specifici, adică raportați la unitatea de lungime ( $\Omega/\text{m}$ ,  $\text{H}/\text{m}$ ,  $\text{F}/\text{m}$ ). Delimitarea între circuitele cu parametrii concentrați și circuitele cu parametrii repartizați se face atît în raport cu lungimea fizică a circuitului, cît și în raport cu frecvența curentului din circuit.

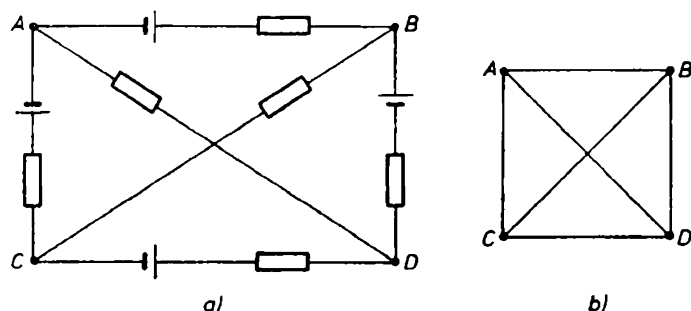


Fig. 3-2. Rețea electrică (*a*) și graful său (*b*).

În ceea ce privește sensurile de referință dintr-un circuit electric, acestea se referă la următoarele mărimi fizice scalare, definite prin integrale de linie și de suprafață a unor mărimi vectoriale :

- tensiunea electromotoare :  $U_e = \int \vec{E}_t d\vec{l}$  ;
- tensiunea la borne :  $U_b = \int \vec{E} d\vec{l}$  ;
- curentul electric :  $i = \int \vec{J} d\vec{s}$ .

Se numește *sens de referință* sau *sens pozitiv* al mărimii fizice scalare sensul vectorului element de integrare ( $d\vec{l}$ ,  $d\vec{s}$ ). La rîndul său, sensul vectorului element de integrare se stabilește fie arbitrar, fie pe baza unor reguli.

După ce s-a stabilit sensul de referință al uneia dintre mărimile scalare precizate mai sus, se face calculul acestei mărimi, obținîndu-se o valoare pozitivă sau negativă în raport cu sensul de referință ales.

Se numește *sens efectiv*, acel sens de referință pentru care mărimea fizică respectivă rezultă pozitivă. Tensiunea electromotoare  $U_e$  rezultă pozitivă cînd sensul de referință, adică sensul elementului de integrare  $d\vec{l}$  prin interiorul sursei este orientat de la borna negativă spre cea pozitivă. Curentul electric  $i$  rezultă pozitiv cînd vectorul elementului de suprafață  $d\vec{s}$  este în același sens cu  $\vec{J}$  sau, în general, cînd unghiul dintre cei doi vectori este mai mic decît  $90^\circ$ . Sensul de referință al tensiunii la borne se indică în schemă printr-o săgeată desenată între borne.

Există două convenții (reguli) privind asocierea sensurilor de referință ale tensiunii la bornele unei laturi de rețea și a curentului ce trece prin ea. Pentru laturi de rețea *receptoare*, săgețile care indică sensurile pozitive ale tensiunii la borne și ale curentului pleacă, respectiv intră, în aceeași bornă (fig. 3-3, b). Pentru laturi de rețea *generatoare*, cele două sensuri de referință sînt opuse în raport cu aceeași bornă (fig. 3-3, a).

Dacă nu se poate preciza de la început caracterul de receptor sau de generator al unei laturi de rețea, sensurile pozitive (de referință) pentru tensiunea la borne și pentru curent se aleg arbitrar, fie ca la receptor, fie ca la generator. După efectuarea calculelor rezultă sensurile efective ale acestor mărimi, respectiv se poate preciza dacă latura de rețea are sau nu caracterul de receptor sau de generator adoptat inițial.

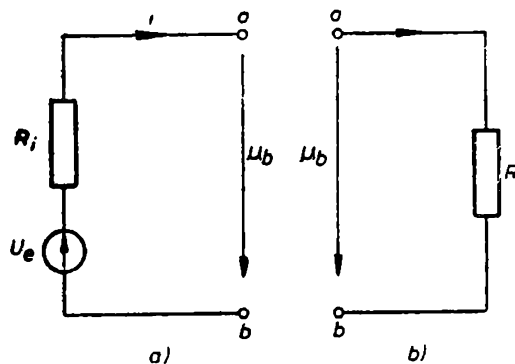


Fig. 3-3. Laturi de rețea :  
a — generatoare; b — receptoare.

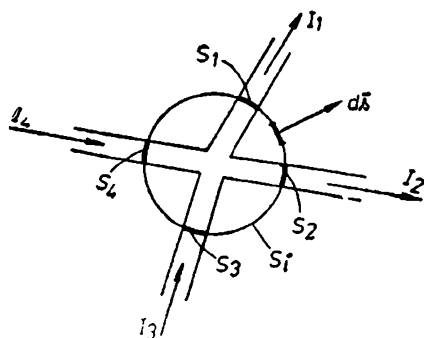


Fig. 3-4. Nod de rețea.

## 3.2. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF

Teoremele lui Kirchhoff se referă la circuite și rețele electrice în regim staționar și cvazistaționar.

### 3.2.1. TEOREMA I A LUI KIRCHHOFF

Prima teoremă a lui Kirchhoff se referă la curenții din laturile de rețea ce concură într-un nod. Fie nodul de rețea reprezentat în fig. 3-4 în care concură patru laturi, prin care circulă curenții cu intensitățile  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  și  $I_4$ , cu sensurile de referință indicate prin săgeți. Pentru stabilirea teoremei a I-a a lui Kirchhoff se consideră o suprafață închisă  $S_i$  în jurul nodului pentru care se aplică legea conservării sarcinilor electrice libere. În regim electrocINETIC staționar această lege se exprimă prin relația :

$$\int_{S_i} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (3-1)$$

Integrala de suprafață a densității de curent este diferită de zero numai în porțiunile de suprafață  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  și  $S_4$  ce intersectează conductoarele, unde  $\vec{J} \neq 0$ . Ținând seama și de faptul că  $d\vec{s}$  este orientat spre exteriorul suprafeței închise și că  $\vec{J}$  are sensul de referință indicat prin săgeți (sensul curentului), din relația (3-1) se obține :

$$\int_{S_i} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{J}_3 \cdot d\vec{s} + \int_{S_4} \vec{J}_4 \cdot d\vec{s} = 0$$

adică :

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (3-2)$$

În general, dacă există  $m$  laturi care concură în nod, rezultă :

$$\sum_{v=1}^m I_v = 0. \quad (3-3)$$

Această relație exprimă teorema I a lui Kirchhoff și se enunță astfel : *suma algebrică a curenților din laturile ce concură într-un nod de rețea este egală cu zero*. Se consideră pozitivi curenții care ies din nod și negativi curenții care intră în nod.

Se mai poate enunța teorema I a lui Kirchhoff și în modul următor : *suma curenților ce ies dintr-un nod de rețea este egală cu suma curenților care intră în același nod* (ex. fig. 3-4 :  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$ ).

Numărul de ecuații independente ce se obțin cu teorema I a lui Kirchhoff pentru o rețea cu  $n$  noduri este  $n-1$ .

### 3.2.2. TEOREMA A II-A A LUI KIRCHHOFF

Se consideră un ochi de rețea format din  $k$  laturi, de forma celui reprezentat în fig. 3-5. Teorema a II-a a lui Kirchhoff precizează că *suma algebrică a tensiunilor electromotoare ce acționează într-un ochi de rețea este egală cu suma*

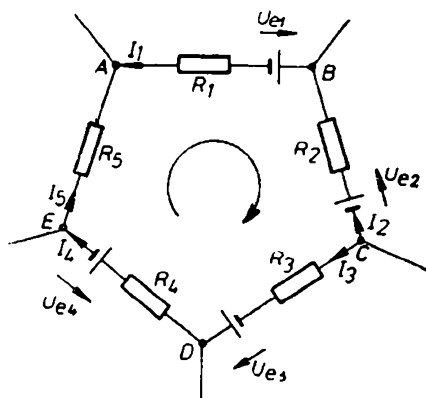


Fig. 3-5. Ochi de rețea.

algebrică a căderilor de tensiune pe rezistoarele din laturile ochiului, adică :

$$\sum_{v=1}^k U_{ev} = \sum_{v=1}^k R_v I_v. \quad (3-4)$$

Pentru a însuma algebric t.e.m. și căderile de tensiune este necesar să se stabilească în prealabil un sens de referință în ochi. De exemplu, pentru ochiul de rețea reprezentat în fig. 3-5 se fixează în mod arbitrar sensul de referință indicat prin săgeată cu care rezultă următoarea exprimare pentru teorema a II-a a lui Kirchhoff :

$$U_{e1} - U_{e2} - U_{e3} - U_{e4} = -R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5. \quad (3-5)$$

T.e.m., respectiv căderea de tensiune, se ia cu semnul „+” când sensul t.e.m., respectiv al curentului, coincide cu sensul de referință și cu semnul „-” în caz contrar.

Numărul de ecuații independente ce se pot scrie cu teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru o rețea cu  $n$  noduri și  $l$  laturi este egal cu numărul de ochiuri independente :

$$o = l - n + 1. \quad (3-6)$$

### 3.3. GRUPAREA REZISTOARELOR ȘI SURSELOR DE CURENT CONTINUU

#### 3.3.1. GRUPAREA REZISTOARELOR

În majoritatea cazurilor, rețelele de curent continuu conțin mai multe rezistoare legate în serie, în paralel sau mixt. Problema care se pune, este de a determina rezistența echivalentă a rezistoarelor grupate într-un anumit mod.

Considerînd cunoscut cum se deduc expresiile de calcul ale rezistenței echivalente, se prezintă numai relațiile respective, fără justificări.

La *legarea în serie* a  $n$  rezistoare avînd rezistențele  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , rezistența echivalentă este :

$$R_e = \sum_{v=1}^n R_v. \quad (3-7)$$

La *legarea în paralel* a rezistoarelor se obține :

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{R_v}. \quad (3-8)$$

Dacă se leagă în paralel numai două rezistoare, rezistența echivalentă se determină cu relația :

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3-9)$$

Rezistența echivalentă la *legarea mixtă* (în serie și în paralel) a rezistoarelor se calculează ținând seama de relațiile de mai sus. De exemplu, rezistența echivalentă a rezistoarelor grupate mixt ca în fig. 3-6 este :

$$R_e = R_1 + R_2 + R_{34} = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

### 3.3.2. GRUPAREA SURSELOR DE CURENT CONTINUU

Pentru alimentarea receptoarelor de curent continuu, există situații cînd se folosesc mai multe surse de energie electrică grupate în serie, în paralel sau mixt, după necesități. De exemplu, la autovehicule se folosesc baterii de acumulatori de 6 V sau 12 V, obținute prin legarea în serie a mai multor elemente de acumulatori cu plumb de cîte 2 V fiecare etc.

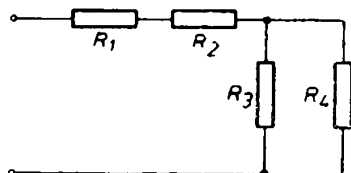


Fig. 3-6. Rezistoare grupate mixt.

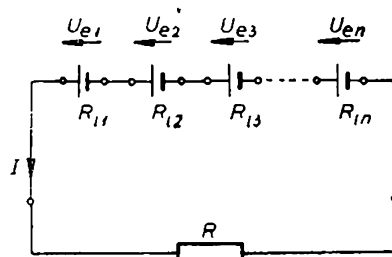


Fig. 3-7. Surse de t.e.m. legate în serie.

*Legarea în serie* a surselor de curent continuu se face atunci cînd este necesar să se obțină o tensiune mai mare. Aceasta se realizează legînd borna „+” a unei surse cu borna „-” a sursei următoare ș.a.m.d. (fig. 3-7). Tensiunea electromotoare totală a bateriei este :

$$U_e = \sum_{v=1}^n U_{ev}. \quad (3-9)$$

Dacă la bornele bateriei se conectează un receptor cu rezistența  $R$ , conform legii lui Ohm aplicată la un circuit închis, curentul prin circuit este :

$$I = \frac{\sum_{v=1}^n U_{ev}}{R + \sum_{v=1}^n R_{iv}}, \quad (3-10)$$

unde  $R + \sum_{v=1}^n R_{iv}$  este rezistența echivalentă a circuitului,  $R_{iv}$  fiind rezistența interioară a unei surse.

În situația că cele  $n$  surse sînt identice, adică au aceeași tensiune electromotoare  $U_e$  și aceeași rezistență interioară  $R_i$ , atunci :

$$I = \frac{nU_e}{R + nR_i} = \frac{U_e}{\frac{R}{n} + R_i}. \quad (3-11)$$

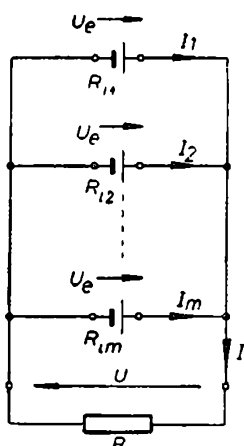


Fig. 3-8. Surse de t.e.m. legate în paralel.

Trebuie subliniat faptul că la legarea în serie, curentul prin circuit nu trebuie să depășească curentul nominal al sursei celei mai mici. De asemenea, este evident că pot fi legate în serie și surse cu tensiuni diferite.

*Legarea în paralel* a surselor de curent continuu se face unind între ele bornele „+” și, respectiv, bornele „-” ale surselor (fig. 3-8).

Sursele legate în paralel trebuie să aibă aceeași tensiune electromotoare și aceeași rezistență interioară. Dacă t.e.m. ale surselor legate în paralel nu sînt egale și bateria este în gol, sursa cu t.e.m. mai mare se va descărca pe sursa cu t.e.m. mai mică. Cu alte cuvinte, în această situație apar curenți de circulație între surse, chiar dacă bateria nu alimentează un receptor exterior.

Dacă t.e.m. a surselor legate în paralel sînt practic aceleași, dar rezistențele interioare sînt diferite, atunci, avînd în vedere că în timpul funcționării la bornele surselor se stabilește aceeași tensiune :

$$U = U_e - R_{i1}I_1 = U_e - R_{i2}I_2 = \dots = U_e - R_{im}I_m \quad (3-12)$$

înseamnă că sursa cu rezistența interioară mai mare debitează un curent mai mic. Curentul prin rezistența  $R$  a receptorului este :

$$I = \frac{U_e}{R_e} = \frac{U_e}{R + \frac{1}{\sum_{v=1}^m \frac{1}{R_{iv}}}} \quad (3-13)$$

unde  $R_e$  este rezistența echivalentă a circuitului.

În ipoteza că  $R_{i1} = R_{i2} = \dots = R_{im}$ , rezultă :

$$I = \frac{U_e}{R + \frac{R_i}{m}} = \frac{mU_e}{mR + R_i} \quad (3-14)$$

Legarea în paralel a surselor se face atunci cînd curentul cerut de receptor este mai mare decît curentul nominal al unei singure surse.

*Legarea mixtă* a surselor de c.c. se folosește atunci cînd bateria respectivă trebuie să asigure atît o tensiune, cît și un curent de valori mari. Dacă  $n$  este numărul de surse identice legate în serie și  $m$  este numărul de surse identice legate în paralel, curentul dat de baterie prin rezistența  $R$  a unui receptor este :

$$I = \frac{nmU_e}{mR + nR_i} \quad (3-15)$$

Această relație se deduce simplu din relațiile (3-11) și (3-14), obținute pentru legarea în serie, respectiv în paralel, a surselor.

**Aplicația 3-1.** Un număr de 7 rezistoare avînd fiecare rezistența  $R=1 \Omega$  sînt grupate între ele ca în fig. 3-9. Să se determine :

a. Rezistența echivalentă.



b. Lungimea strmei din nichelină, cu secțiunea de  $0,5 \text{ mm}^2$ , necesară pentru confecționarea rezistoarelor.

*Rezolvare.*

a. Rezistența echivalentă este :

$$R_e = \frac{\left( \frac{\left( \frac{R^2}{2R} + R \right) 2R}{\frac{R^2}{2R} + R + 2R} + R \right) R}{\frac{\left( \frac{R^2}{2R} + R \right) 2R}{\frac{R^2}{2R} + R + 2R} + R + R} = \frac{13}{20} R.$$

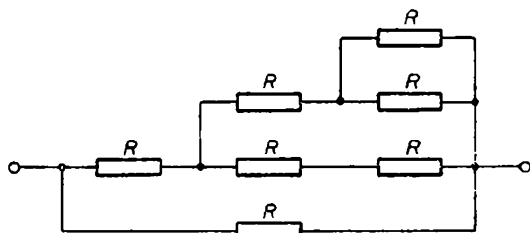


Fig. 3-9. Rețea de rezistoare.

Pentru  $R=1 \Omega$ , rezultă :  $R_e=0,65 \Omega$ .

b. Rezistivitatea pentru nichelină este  $\rho=1,1 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ . Din relația  $R=\rho \frac{l}{S}$  se deduce :

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{1 \cdot 0,5}{1,1} = 0,454 \text{ m.}$$

Deci, pentru cele 7 rezistoare este necesară lungimea :  $L=7l=3,178 \text{ m.}$

**Aplicația 3-2.** O rețea de curent continuu conține surse identice și rezistoare grupate între ele ca în fig. 3-10. Să se determine t.e.m. rezultantă  $U_e$  a surselor și curentul total  $I$  dat de surse. T.e.m. a unei surse este  $U_e=2,2 \text{ V}$  și rezistența interioară  $R_i=0,2 \Omega$ .

*Rezolvare.* Tensiunea electromotoare a bateriei este :

$$U_e=3U_e=6,6 \text{ V.}$$

Rezistența echivalentă receptorului este :

$$R = \frac{\left( 5 + \frac{10 \cdot 10}{20} \right) 10}{5 + \frac{10 \cdot 10}{20} + 10} = 6,66 \Omega.$$

Curentul total dat de baterie se calculează cu relația (3-15) în care se introduce  $n=3$  și  $m=2$ , obținându-se :

$$I = \frac{3 \cdot 2 \cdot U_e}{2R + 3R_i} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2,2}{2 \cdot 6,66 + 3 \cdot 0,2} = 0,941 \text{ A.}$$

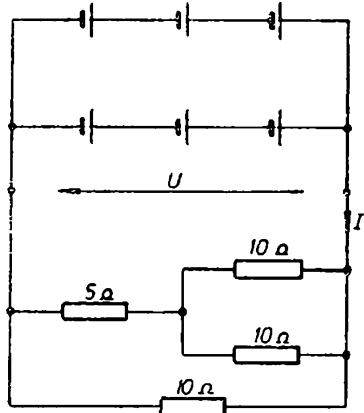


Fig. 3-10. Rețea de surse și rezistoare.

### 3.4. METODE DE CALCUL A REȚELOR LINIARE DE CURENT CONTINUU

În general, prin calculul unei rețele de c.c. se înțelege determinarea curenților din laturile rețelei atunci când sînt cunoscute rezistențele rezistoarelor și tensiunile electromotoare ale surselor (sau tensiunile la borne) din rețeaua respectivă. Desigur, se pot pune și alte probleme, de exemplu determinarea valorii rezis-

tenței unor rezistoare, astfel ca acestea să fie parcurse de anumiți curenți sau să dezvolte, prin efect Joule-Lenz, o anumită putere.

Există mai multe metode de calcul a rețelelor liniare de c.c. dintre care, în continuare se vor prezenta numai cele mai des folosite în practică.

### 3.4.1. METODA TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

Se consideră o rețea de c.c. care are  $n$  noduri și  $l$  laturi. Numărul de ecuații independente ce se pot scrie pentru această rețea, cu ajutorul teoremelor I și a II-a a lui Kirchhoff este :

$$(n-1) + (l-n+1) = l. \quad (3-16)$$

Sistemul de ecuații obținute permite determinarea intensităților curenților din fiecare latură.

Pentru aplicarea celor două teoreme este necesar să se precizeze mai întâi sensul de referință pentru curenți și pentru ochiurile independente. Dacă, în urma calculelor, curenții din unele laturi rezultă cu valori negative, înseamnă că sensul lor efectiv este opus față de sensul de referință stabilit anterior.

**Aplicația 3-3.** Se consideră rețeaua complexă reprezentată în fig. 3-11 și se cere condiția ce trebuie să o satisfacă parametrii rețelei astfel ca  $I_5 = 0$ .

**Rezolvare.** Rețeaua considerată are  $n=4$  noduri și  $l=6$  laturi. Deci, aplicind teorema I a lui Kirchhoff se scriu  $4-1=3$  ecuații independente și aplicind teorema a II-a se scriu  $6-4+1=3$  ecuații independente :

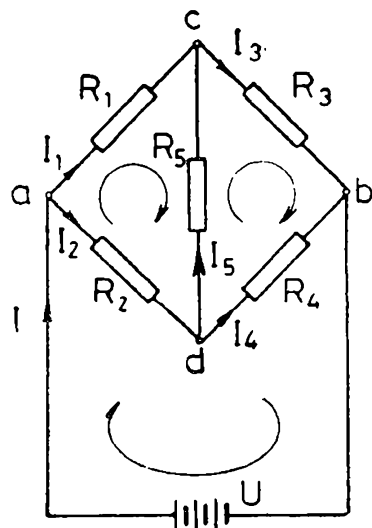


Fig. 3-11. Rețea cu schema electrică în punte.

$$I = I_1 + I_2$$

$$U = I_1 R_1 + I_3 R_3$$

$$I_2 = I_4 + I_5$$

$$0 = I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_5 R_5$$

$$I_1 + I_5 = I_3$$

$$0 = I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_5 R_5$$

Rezolvind acest sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute (curenții), se obține pentru  $I_5$  :

$$I_5 = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_2 R_4 (R_1 + R_3) + R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_5 (R_1 + R_3) (R_2 + R_4)}$$

Condiția ca  $I_5 = 0$  este satisfăcută dacă :

$$R_1 R_4 - R_2 R_3 = 0$$

sau

$$R_3 = \frac{R_1}{R_2} R_4. \quad (3-17)$$

$I_5 = 0$  înseamnă că nodurile  $c$  și  $d$  se găsesc la același potențial, deci :

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 ; I_3 R_3 = I_4 R_4 ; I_1 = I_3 ; I_2 = I_4. \quad (3-18)$$

Schema electrică din fig. 3-11 are aplicații la puntea industrială (Wheatstone) folosită pentru măsurarea rezistențelor electrice.

### 3.4.2. METODA SUPERPOZIȚIEI

Această metodă poate simplifica calculul rețelelor complexe în care există mai multe surse de energie electrică. Metoda se bazează pe principiul suprapunerii efectelor aplicabil la rețelele liniare.

Pentru exemplificare, se consideră rețeaua electrică a cărei schemă este reprezentată în fig. 3-12, *a*. Curentul într-o latură oarecare a rețelei poate fi considerat ca suma algebrică a curenților produși în acea latură de fiecare sursă în parte. Deci, se consideră mai întâi că în rețea acționează numai sursa cu t.e.m.  $U_{e1}$  iar t.e.m. a celei de-a doua surse se consideră egală cu zero, reținându-se numai rezistența interioară  $R_{i2}$  a acesteia (fig. 3-12, *b*). Apoi, se consideră că în rețea acționează numai a doua sursă, de la prima sursă reținându-se numai rezistența sa interioară  $R_{i1}$  (fig. 3-12, *c*). În mod analog se procedează și dacă rețeaua conține trei sau mai multe surse.

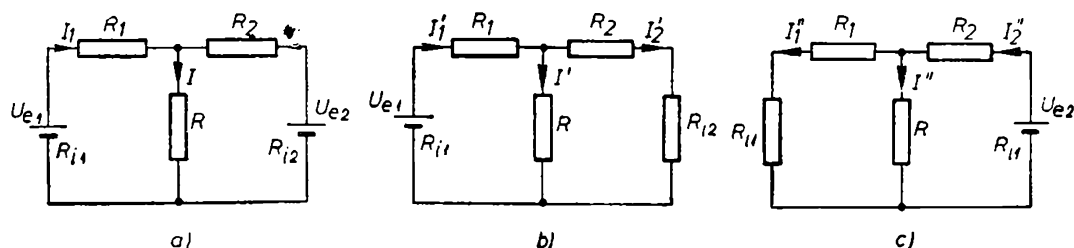


Fig. 3.12. Schemă explicativă la metoda superpoziției :  
a — rețeaua dată; b, c — rețeaua cu câte o singură sursă.

Rezolvând circuitele din fig. 3-12, *b* și fig. 3-12, *c* se obțin valorile curenților notați cu „prim“, respectiv cu „secund“. Apoi, se suprapun rezultatele și se obțin curenții reali din laturi, adică :

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = -I'_2 + I''_2; \quad I = I' + I''. \quad (3-19)$$

### 3.4.3. METODA TRANSFIGURĂRII

Există situații când o rețea de c.c. conține rezistoare în conectare poligonală sau în conectare stelată. În astfel de cazuri, pentru calculul rețelei trebuie să se facă transfigurarea poligonului în stea sau a stelei în poligon. Transfigurarea poligonului în stea este univocă, oricare ar fi numărul de laturi ale rețelei poligonale, pe când transfigurarea stelei în poligon este univocă numai pentru numărul de laturi egal cu trei.

Metoda transfigurării este aplicabilă atât la rețelele pasive, cât și la rețelele active (ce conțin în laturi surse de tensiune electromotoare).

Se consideră în fig. 3-13, *a* rezistoarele  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  și  $R_{31}$  conectate în triunghi. Transfigurând conexiunea triunghi în conexiune stea, se obține schema din

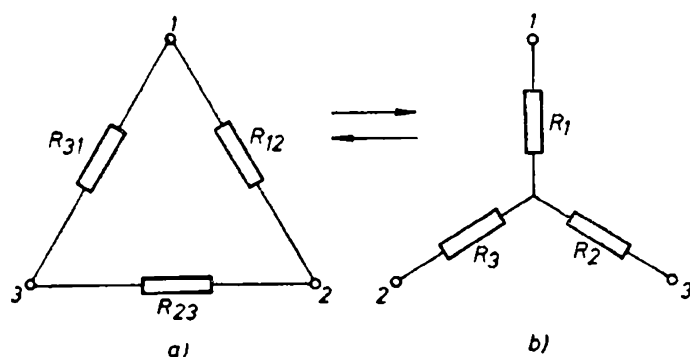


Fig. 3-13. Transfigurarea triunghi-stea.

fig. 3-13, *b* în care rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$  trebuie determinate în funcție de  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ . Pentru aceasta, se pune condiția ca rezistențele echivalente dintre punctele 1-2, 2-3 și 3-1 să fie aceleași pentru cele două conexiuni, adică :

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 + R_3 &= \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 + R_1 &= \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \quad (3-20)$$

de unde rezultă :

$$R_1 R_{23} = R_2 R_{31} = R_3 R_{12} = \frac{R_{12} R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1. \quad (3-21)$$

Din aceste relații se calculează  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Aceleași relații se folosesc și dacă se face transfigurarea steii în triunghi, în care caz se determină  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$  în funcție de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ .

**Aplicația 3-4.** Să se determine curenții din laturile rețelei a cărei schemă este reprezentată în fig. 3-14, pentru următoarele valori ale parametrilor :  $U_{ab} = 24$  V,  $R_1 = 1$   $\Omega$ ,  $R_2 = 5$   $\Omega$

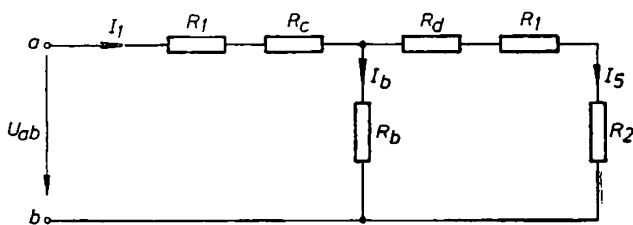
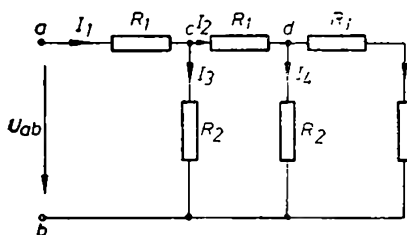


Fig. 3-14. Rețea cu rezistoare legate în triunghi. Fig. 3-15. Rețeaua obținută prin transfigurare.

**Rezolvare.** Este necesar ca triunghiul *bcd* să fie transfigurat în stea, obținându-se schema din fig. 3-15, în care, conform relațiilor (3-21), avem :

$$R_b = \frac{R_2 R_2}{R_2 + R_1 + R_2} = 2,27 \text{ } \Omega,$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1 + R_2} = 0,45 \text{ } \Omega,$$

$$R_d = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1 + R_2} = 0,45 \text{ } \Omega.$$

După transfigurare, rezistența echivalentă a circuitului este :

$$R_e = R_1 + R_c + \frac{R_b(R_d + R_1 + R_2)}{R_b + R_d + R_1 + R_2} = 3,25 \text{ } \Omega,$$

cu care rezultă

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_e} = \frac{24}{3,25} = 7,38 \text{ A.}$$

Cunoscând curentul  $I_1$ , se calculează curentul  $I_3$  cu relația :

$$I_3 = \frac{U_{ab} - I_1 R_1}{R_2} = \frac{24 - 7,38}{5} = 3,32 \text{ A.}$$

Cu teorema a I-a a lui Kirchhoff rezultă :

$$I_2 = I_1 - I_3 = 7,38 - 3,32 = 4,06 \text{ A.}$$

Curentul  $I_4$  rezultă din :

$$I_4 = \frac{U_{ab} - I_1 R_1 - I_2 R_1}{R_2} = 2,51 \text{ A,}$$

cu care se determină  $I_5$  :

$$I_5 = I_2 - I_4 = 4,06 - 2,51 = 1,55 \text{ A.}$$

### 3.4.4. METODA CURENȚILOR CICLICI (OCHIURILOR INDEPENDENTE)

Această metodă permite determinarea curenților din rețelele complexe cu ajutorul unui număr mai redus de ecuații decât prin aplicarea celor două teoreme a lui Kirchhoff. Rețeaua complexă se consideră ca o suprapunere de ochiuri (circuite) independente, fiecare din aceste ochiuri fiind străbătut de un curent propriu (curent ciclic). Numărul de ochiuri independente în care se descompune rețeaua este  $o = l - n + 1$ ,  $l$  fiind numărul laturilor, iar  $n$  numărul de noduri.

Printr-o latură care este comună la două ochiuri independente circulă doi curenți ciclici, unul aparținând unuia dintre ochiuri, iar al doilea aparținând celuilalt ochi. În aceste condiții, curenții reali sînt dați de suma algebrică a celor doi curenți ciclici din laturile respective.

Curenții ciclici se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații scris prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff pentru fiecare ochi independent, după ce în prealabil s-a fixat cîte un sens pozitiv, de referință, în fiecare din aceste ochiuri (care este și sensul curentului ciclic).

**Aplicația 3-5.** Se consideră rețeaua a cărei schemă este reprezentată în fig. 3-16 și se cere să se calculeze curenții din laturi folosind metoda ochiurilor independente.

**Rezolvare.** Rețeaua are 4 noduri și 6 laturi, deci se vor obține  $6 - 4 + 1 = 3$  ochiuri independente pentru care, aplicînd teorema a II-a a lui Kirchhoff, se obțin ecuațiile :

$$-U_e - U_{e1} = (R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_3$$

$$-U_e + U_{e2} = (R_2 + R_4) i_2 + R_4 i_3$$

$$0 = (R_3 + R_4 + R_5) i_3 - R_3 i_1 + R_4 i_2$$

unde  $i_1$ ,  $i_2$  și  $i_3$  sînt curenți ciclici.

La scrierea acestor ecuații s-a ținut seama că rezistența  $R_3$  este parcursă atît de  $i_1$  într-un sens, cît și de  $i_3$  în sens opus și, la fel, rezistența  $R_4$  este parcursă de curenții  $i_2$  și  $i_3$  în același sens.

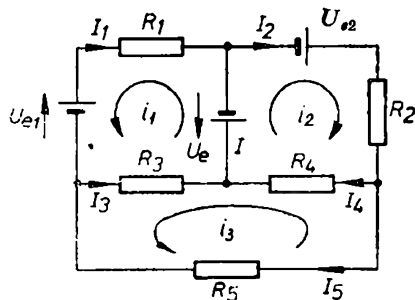


Fig. 3-16. Rețea electrică de c.c.

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obțin valorile curenților ciclici  $i_1$ ,  $i_2$  și  $i_3$ . Curenții reali din laturi sînt :

$$\begin{aligned} I &= i_1 + i_2 ; I_1 = -i_1 ; I_2 = i_2 \\ I_3 &= i_1 - i_3 ; I_4 = i_2 + i_3 ; I_5 = -i_3. \end{aligned}$$

Dacă pentru un curent rezultă din calcule valoare negativă, înseamnă că sensul lui este opus față de cel adoptat în schemă.

În formă generală și restrînsă, sistemul de ecuații obținut prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff pentru fiecare ochi independent, din care se determină curenții ciclici, se poate scrie astfel :

$$U_{ev} = \sum_{\lambda} R_{\lambda v} i_{\lambda} \quad (v=1, 2, \dots, o) \quad (3-22)$$

unde  $U_{ev}$  este t.e.m. rezultantă din ochiul de rețea  $v$ ,  $R_{\lambda v}$  pentru  $\lambda=v$  este rezistența electrică totală a ochiului  $v$  (mărime pozitivă) și  $R_{\lambda v}$  pentru  $v \neq \lambda$  este rezistența electrică de transfer de la ochiul  $v$  la ochiul  $\lambda$ , care este pozitivă dacă  $i_{\lambda}$  este în același sens cu  $i_v$  și negativă dacă  $i_{\lambda}$  este de sens opus față de  $i_v$ .

**Aplicația 3-6.** Să se determine curenții din laturile rețelei a cărei schemă este reprezentată în fig. 3-17, pentru următoarele valori ale parametrilor :  $R_{12}=4 \Omega$ ,  $R_{23}=R_{31}=5 \Omega$ ,  $U_e=10 \text{ V}$ ,  $R_i=1 \Omega$ .

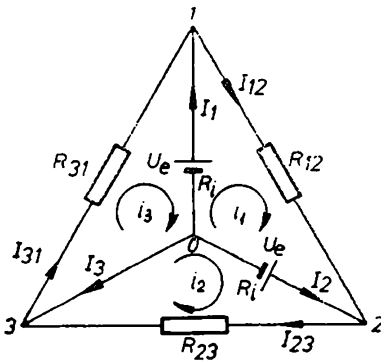


Fig. 3-17. Rețea electrică de c.c.

**Rezolvare.** Se aplică metoda curenților ciclici. Numărul de ochiuri independente ale rețelei este :  $o=l-n+1=6-4+1=3$ . Deci, vor exista trei curenți ciclici  $i_1$ ,  $i_2$  și  $i_3$ , cu sensurile din figură, pentru care, cu ajutorul teoremei a II-a a lui Kirchhoff, se scriu ecuațiile :

$$U_e - U_e = 0 = (R_{12} + 2R_i) i_1 - R_i i_2 - R_i i_3$$

$$U_e = -R_i i_1 + (R_{23} + R_i) i_2$$

$$-U_e = -R_i i_1 + (R_{31} + R_i) i_3$$

Înlocuind valorile numerice, se obține sistemul de ecuații :

$$6i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$-i_1 + 6i_2 + 0i_3 = 10$$

$$-i_1 + 0i_2 + 6i_3 = -10$$

care are soluțiile :  $i_1=0$ ,  $i_2=1,66 \text{ A}$ ,  $i_3=-1,66 \text{ A}$ .

Curenții din laturile rețelei sînt :

$$I_{12}=i_1=0 ; I_{23}=i_2=1,66 \text{ A} ; I_{31}=i_3=-1,66 \text{ A}.$$

$$I_1=i_1-i_3=1,66 \text{ A} ; I_2=-i_1+i_2=1,66 \text{ A} ; I_3=-i_2+i_3=-3,22 \text{ A}.$$

### 3.4.5. METODA POTENȚIALELOR NODURILOR

Cunoscînd potențialul nodurilor unei rețele, respectiv diferența de potențial electric între noduri, cu ajutorul legii conducției electrice se pot determina curenții din laturile rețelei. Deci, metoda potențialelor nodurilor constă în calculul acestor potențiale și apoi a curenților din laturi.

Sistemul de ecuații cu care se determină potențialele nodurilor se obține prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff, curenții din laturile concurente într-un nod fiind exprimați în funcție de potențiale și de ceilalți parametri ai elementelor conținute de laturi. Se pot scrie  $n-1$  ecuații independente, ceea ce înseamnă că pentru potențialul unui nod trebuie să se admită o valoare arbitrară, de exemplu valoarea zero (potențialul electric al pământului). Forma generală a sistemului de ecuații din care se determină potențialele nodurilor este :

$$\sum_{\substack{\lambda \\ v \neq \lambda}} (V_v - V_\lambda) G_{v\lambda} + U_{ev\lambda} G_{v\lambda} = 0 \quad (v=1, 2, \dots, n-1) \quad (3-23)$$

unde  $G_{v\lambda}$  și  $U_{ev\lambda}$  sînt conductanța, respectiv t.e.m. din latura cuprinsă între nodul  $v$  și nodul  $\lambda$ .

Din (3-23) rezultă :

$$V_v \sum_{\lambda} G_{v\lambda} - \sum_{\lambda} V_\lambda G_{v\lambda} + \sum_{\lambda} U_{ev\lambda} G_{v\lambda} = 0 \quad (v=1, 2, \dots, n-1; v \neq \lambda). \quad (3-24)$$

Curenții din laturile rețelei se determină cu relația :

$$I_{v\lambda} = (V_v - V_\lambda + U_{ev\lambda}) G_{v\lambda} \quad (v \neq \lambda) \quad (3-25)$$

**Aplicația 3-7.** Folosind metoda potențialelor nodurilor, să se determine curenții din laturile rețelei reprezentate în fig. 3-18.

*Rezolvare.* Sistemul de ecuații din care se determină potențialele celor  $n-1=3$  noduri se obține din (3-24) în forma :

$$V_1 (G_{12} + G_{13} + G_{14}) - V_2 G_{12} - V_3 G_{13} + U_{e12} G_{12} + U_{e13} G_{13} + U_{e14} G_{14} = 0$$

$$V_2 (G_{21} + G_{23} + G_{24}) - V_1 G_{21} - V_3 G_{23} + U_{e21} G_{21} + U_{e23} G_{23} + U_{e24} G_{24} = 0$$

$$V_3 (G_{31} + G_{32} + G_{34}) - V_1 G_{31} - V_2 G_{32} + U_{e31} G_{31} + U_{e32} G_{32} + U_{e34} G_{34} = 0,$$

unde se ține seama că  $\frac{1}{R_{v\lambda}} = G_{v\lambda}$ ,  $G_{v\lambda} = G_{\lambda v}$  și

$U_{ev\lambda} = -U_{e\lambda v}$ . S-a considerat  $V_4 = 0$ . De asemenea, se observă din schemă că  $U_{e23} = U_{e34} = 0$

După ce s-au determinat potențialele nodurilor, se calculează curenții din laturi cu relațiile (3-25), adică :

$$I_{12} = (V_1 - V_2 + U_{e12}) G_{12},$$

$$I_{13} = (V_1 - V_3 + U_{e13}) G_{13},$$

$$I_{14} = (V_1 + U_{e14}) G_{14},$$

$$I_{23} = (V_2 - V_3) G_{23},$$

$$I_{24} = (V_2 + U_{e24}) G_{24},$$

$$I_{34} = V_3 G_{34}.$$

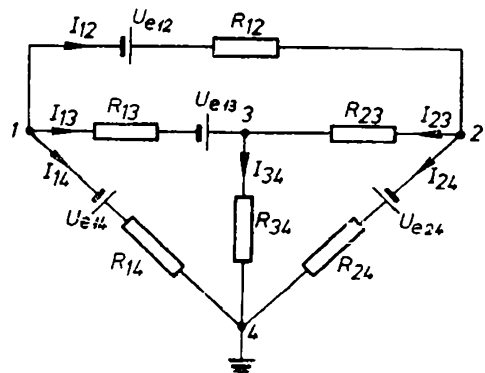


Fig. 3-18. Rețea electrică de c.c.

În afară de metodele de calcul a rețelelor de c.c. prezentate mai sus, mai există și altele, printre care și metoda generatorului echivalent, despre care se va discuta la rețelele de c.a.

### 3.5. CALCULUL ELECTRIC AL UNEI LINII DE CURENT CONTINUU

Pentru alimentarea cu energie electrică a unor consumatori de curent continuu se folosesc liniile de transport de curent continuu prin care se face legătura dintre sursă și consumatori.

Calculul electric al acestor linii se referă la determinarea secțiunii conductoarelor liniei astfel încât căderea de tensiune pe linie, respectiv pierderile de putere prin efect Joule-Lenz, să se încadreze în limitele stabilite de norme.

Datele pentru calcul sînt :

- puterea consumatorilor ;
- materialul conductoarelor (cupru, aluminiu) ;
- așezarea topografică a sursei și a consumatorilor (lungimea liniei) ;
- tensiunea nominală la consumatori.

În general, linia constă din tronsoane, avînd secțiuni diferite de la o porțiune la alta.

Pentru exemplificare, se consideră linia cu schema monofilară din fig. 3-19, unde s-a notat cu  $A$  sursa de energie electrică avînd tensiunea  $U_0$  (la începutul

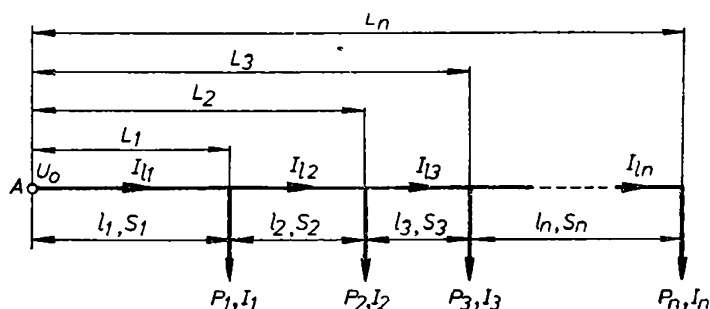


Fig. 3-19. Schema monofilară a liniei de c.c.

liniei),  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  sînt puterile consumatorilor,  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  și  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  sînt lungimile, respectiv secțiunile pe diferite tronsoane ale liniei, iar  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$  sînt distanțele de la sursă la consumatori.

Cunoscînd puterile și tensiunea nominală  $U_N$  considerată aceeași pentru toți consumatorii, se calculează curenții la consumatori :

$$I_1 = \frac{P_1}{U_N}, \quad I_2 = \frac{P_2}{U_N}, \quad \dots, \quad I_n = \frac{P_n}{U_N}. \quad (3-26)$$

Curenții pe tronsoanele liniei sînt :

$$\begin{aligned} I_{l_1} &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n, \\ I_{l_2} &= I_2 + I_3 + \dots + I_n, \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$I_{l_n} = I_n.$$

Determinarea secțiunii conductoarelor se poate face fie pe bază de încălzire, adică, în funcție de valoarea curentului, se alege din tabelă secțiunea potrivită, fie pe baza căderii de tensiune astfel ca, de la sursă pînă la consumatorul



cel mai îndepărtat, căderea de tensiune să nu depășească limita admisă. Dacă se face calculul pe bază de încălzire, se verifică căderea de tensiune și invers, dacă se face calculul pe baza căderii de tensiune se verifică secțiunea rezultată la încălzire.

Limitarea încălzirii conductoarelor liniei înseamnă în același timp limitarea pierderilor de putere pe linie.

Căderea de tensiune pe linie, de la sursă pînă la consumatorul  $k$ , este :

$$\Delta U_k = 2 \sum_{v=1}^k R_v I_{lv}, \quad (3-28)$$

unde

$$R_v = \rho \frac{l_v}{S_v}. \quad (3-29)$$

Tensiunea la consumatorul  $k$  este :

$$U_k = U_0 - \Delta U_k. \quad (3-30)$$

Notînd cu  $u_a\%$  căderea de tensiune admisibilă, în procente, este necesar ca :

$$\frac{\Delta U_k}{U_N} 100 \leq u_a \%. \quad (3-31)$$

Dacă secțiunea conductoarelor liniei este aceeași pe toate tronsoanele sale, relația (3-28) devine :

$$\Delta U_k = \frac{2\rho}{S} \sum_{v=1}^k l_v I_{lv} = \frac{2\rho}{S} \sum_{v=1}^k L_v I_v, \quad (3-32)$$

unde s-a ținut seama de relațiile (3-27).

Pierderea de putere prin efect Joule-Lenz pe linie este :

$$\Delta P = 2 \sum_{v=1}^n R_v I_{lv}^2 \quad (3-33)$$

sau, în cazul cînd secțiunea conductoarelor este aceeași :

$$\Delta P = \frac{2\rho}{S} \sum_{v=1}^n l_v I_{lv}^2. \quad (3-34)$$

Aceste pierderi de putere nu trebuie să depășească o limită admisibilă, stabilită prin norme, adică :

$$\frac{\Delta P}{P} 100 \leq p_a \%. \quad (3-34)$$

Randamentul liniei de transport se calculează cu relația :

$$\eta = \frac{P}{P + \Delta P}, \quad (3-35)$$

unde  $P = \sum_{v=1}^n P_v$  este puterea totală a consumatorilor.

Cu relațiile de mai sus se face calculul electric al liniei de c.c., adică se determină secțiunea conductoarelor.

La proiectarea unei linii de transport de energie electrică trebuie făcut și un calcul mecanic. Conductoarele liniei trebuie să aibă o astfel de secțiune încât să reziste la solicitările mecanice ce intervin în condiții grele de exploatare (temperatură scăzută, chiciură, vânt).

### 3.6. CIRCUITE DE CURENT CONTINUU CU ELEMENTE NELINIARE

#### 3.6.1. CONSIDERAȚIUNI GENERALE. CARACTERISTICI

Un circuit electric este liniar atunci când parametrii săi (rezistența, capacitatea, inductanța etc.) sînt mărimi independente de tensiune sau de curent. Dacă acești parametri depind de tensiune sau de curent, circuitul este neliniar. Este suficient ca un singur element de circuit să fie neliniar pentru a conferi circuitului caracterul neliniar. În timp ce caracteristica volt-amper a unui element liniar este o dreaptă (fig. 3-20, *a*) caracteristica volt-amper a unui element neliniar este o curbă (fig. 3-20, *b*).

*Elementele neliniare simetrice* se caracterizează prin aceea că au aceeași comportare, adică aceeași caracteristică volt-amper pentru ambele sensuri ale curen-

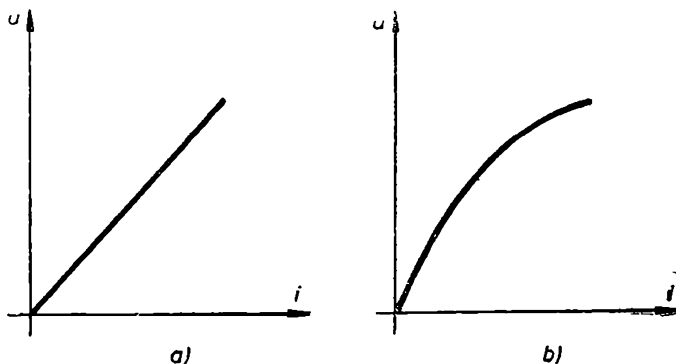


Fig. 3-20. Caracteristica volt-amper liniară (*a*) și neliniară (*b*).

tului prin element (exemplu, rezistoarele, a căror rezistență variază în funcție de temperatură, adică de curentul ce trece prin rezistor).

*Elementele neliniare nesimetrice* au o comportare diferită pentru cele două sensuri ale curentului prin element (exemplu, elementele redresoare etc.).

Circuitele neliniare de c.c. conțin rezistoare neliniare, a căror rezistență depinde de curent sau de tensiune. Cîteva exemple de elemente rezistive neliniare sînt expuse în continuare.

**Lămpile cu incandescență.** Rezistența electrică a filamentului depinde de temperatură, care, la rîndul său, depinde de curentul prin filament (efectul

Joule-Lenz). În fig. 3-21 sînt reprezentate caracteristica volt-ampere a unei lămpi cu filament metalic, cu coeficient de temperatură pozitivă (curba 1), și caracteristica volt-ampere a unei lămpi cu filament de cărbune, cu coeficient de temperatură negativ (curba 2).

Lămpile cu incandescentă au o inerție termică relativ mare, ceea ce face ca la alimentarea lor cu un curent alternativ (50 Hz), rezistența filamentului să nu se modifice în decursul unei perioade. Această rezistență se modifică numai dacă se schimbă valoarea efectivă a curentului.

Se numesc elemente *neliniare cu inerție* acele elemente a căror caracteristică este liniară pentru valorile momentane ale curentului și tensiunii și este neli-

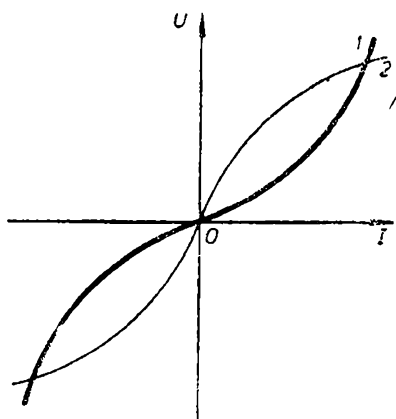


Fig. 3-21. Caracteristica volt-ampere a filamentului metalic (1) și de cărbune (2).

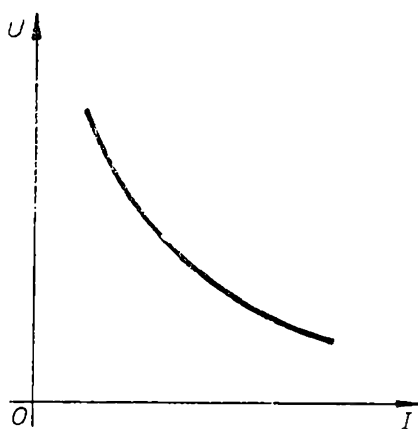


Fig. 3-22. Caracteristica arcului electric în c.c.

niară pentru valorile efective ale acestor mărimi, așa cum este cazul lămpilor cu incandescentă. Dacă caracteristica este neliniară atât pentru valorile momentane, cât și pentru valorile efective ale tensiunii și curentului, elementele respective sînt *neliniare fără inerție*, așa cum este cazul bobinelor cu miez feromagnetic saturat.

**Arcul electric** este un alt exemplu de element de circuit cu caracteristică neliniară.

În c.c. caracteristica  $U=f(I)$  a arcului electric are forma reprezentată în fig. 3-22. Odată cu creșterea curentului tensiunea (căderea de tensiune) pe arc se micșorează datorită ionizării mai puternice a spațiului ocupat de arc, ceea ce conduce la creșterea conductibilității arcului.

În curent alternativ valoarea efectivă a tensiunii pe arcul electric scade odată cu creșterea valorii efective a curentului prin arc, adică caracteristica  $U=f(I)$  are aceeași formă ca cea reprezentată în fig. 3-22 pentru arcul electric în curent continuu. Trebuie făcută însă deosebire între caracteristica statică și caracteristica dinamică a arcului electric. *Caracteristica statică* se obține la variații lente ale tensiunii și curentului, avînd forma celei reprezentate în fig. 3-22. La variații rapide ale curentului se constată că tensiunea  $u$  dintre electrozi este mai mare la creșterea curentului decît la micșorarea acestuia, deoarece, la creșterea curentului, procesul se desfășoară plecînd de la o stare mai puțin ionizată și de la o temperatură mai mică. Ca urmare, *caracteristica în regim dinamic* are

altă formă decât cea statică și depinde de frecvența curentului alternativ (fig. 3-23).

**Descărcătoarele electrice** folosite în tehnica tensiunilor înalte pentru protecția instalațiilor de transport de energie împotriva supratensiunilor atmosferice sînt de asemenea elemente rezistive neliniare. Acestea sînt executate din tirit, un material ceramic a cărui rezistență scade brusc odată cu atingerea unei anumite valori a tensiunii. În fig. 3-24 este reprezentată schema descărcătorului electric, iar în fig. 3-25 caracteristica  $u=f(i)$  a elementului neliniar cu tirit.

La tensiunea nominală, spațiul disruptiv dintre coarnele  $a$  și  $b$  ale descărcătorului nu este străpuns și prin descărcător nu trece practic nici un curent.

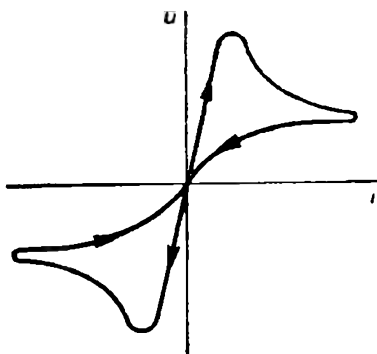


Fig. 3-23. Caracteristica arcului electric în c.a.

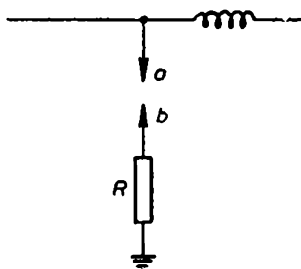


Fig. 3-24. Descărcătorul electric.

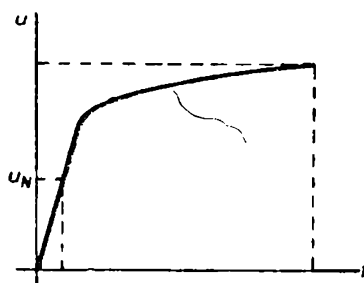


Fig. 3-25. Caracteristica  $u=f(i)$  a rezistorului cu tirit.

La creșterea tensiunii liniei peste valoarea nominală, spațiul disruptiv este străpuns și prin coloana cu rezistența  $R$  din tirit trece un curent mare, deoarece cu creșterea tensiunii rezistența acestui element scade foarte mult. Ca urmare, sarcinile electrice din conductorul liniei de transport se scurg la pământ și tensiunea sa scade. Odată cu micșorarea tensiunii crește rezistența descărcătorului, se micșorează curentul de scurgere la pământ și descărcarea electrică din spațiul disruptiv încetează.

**Celulele redresoare (ventile electrice)**, folosite pe scară largă în tehnica modernă, sînt elemente neliniare, nesimetrice, realizate cu seleniu, siliciu, germaniu etc. Caracteristica  $i=f(u)$  a acestor elemente are forma reprezentată în fig. 3-26. Rezistența electrică pentru sensul direct al curentului prin element este foarte mică, iar pentru sensul invers este foarte mare. Teoretic, se poate spune că ventilele electrice permit trecerea curentului într-un singur sens (sensul direct). Datorită acestei proprietăți, ventilele electrice sînt folosite pentru redresarea curentului alternativ.

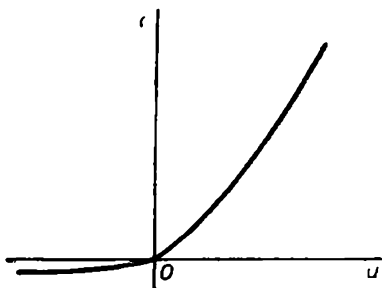


Fig. 3-26. Caracteristica ventilului electric.

În fig. 3-27 este reprezentată schema de redresare a unei singure alternanțe, iar în fig. 3-28 sînt reprezentate schemele cu punct median și

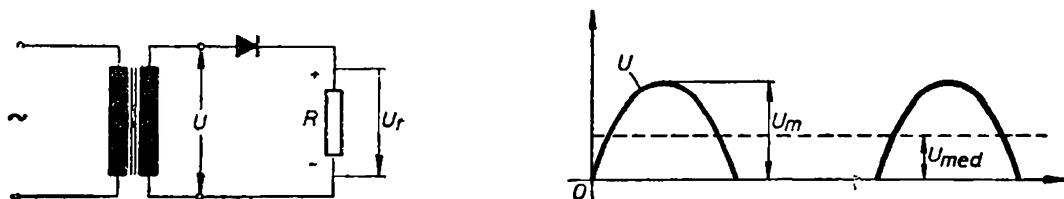


Fig. 3-27. Schema de redresare monofază a unei singure alternanțe.

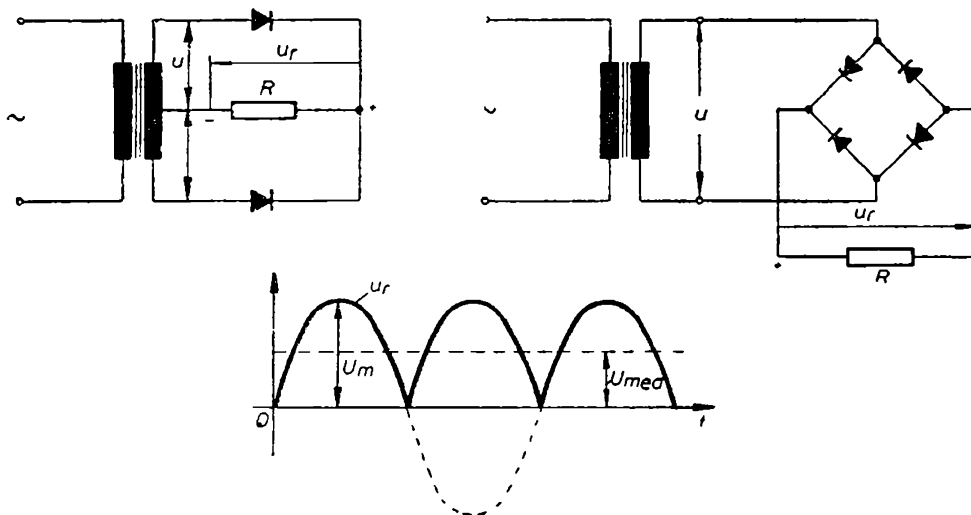


Fig. 3-28. Scheme de redresare monofază a ambelor alternanțe.

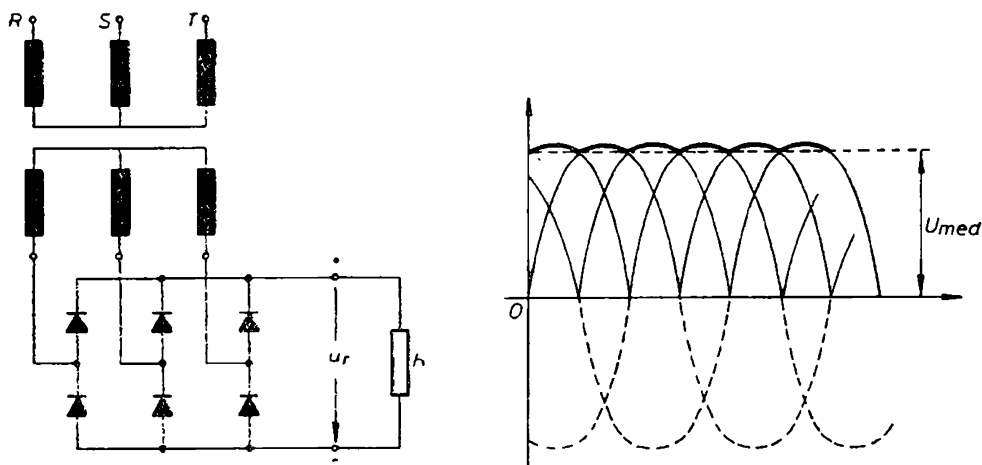


Fig. 3-29. Schema de redresare trifază în punte.

În punte de redresare a ambelor alternanțe a curentului alternativ monofazat. În fig. 3-29 este reprezentată schema de redresare în punte a curentului alternativ trifazat. S-a notat cu  $U_{med}$  valoarea medie a tensiunii redresate  $u_r$  și cu  $U_m$  amplitudinea tensiunii alternative  $u$ .

Se observă că tensiunea redresată  $u_r$  nu este perfect continuă, ci pulsează. În cursul unei perioade  $T$  de variație a curentului alternativ, tensiunea pulsează

de  $m$  ori, unde valoarea lui  $m$  depinde de schema de redresare folosită. Valoarea medie a tensiunii redresate se calculează pe baza fig. 3-30 în modul următor :

$$u = U_m \cos \omega t = U_m \cos \alpha \quad (\alpha = \omega t)$$

$$U_{med} = \frac{1}{T_r} \int_{-\frac{T_r}{2}}^{\frac{T_r}{2}} u_r dt = \frac{m}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}} U_m \cos \alpha d\alpha = \frac{m}{\pi} U_m \sin \frac{\pi}{m},$$

unde s-a ținut seama că perioada pulsațiilor tensiunii redresate este  $T_r = \frac{2\pi}{m\omega}$  și că în acest interval  $u_r = u$ . Dînd lui  $m$  valorile 1, 2, 6 (vezi fig. 3-27 ... 3-29), rezultă :

$$m=1; U_{med}=0,318 U_m$$

$$m=2; U_{med}=0,638 U_m$$

$$m=6; U_{med}=0,955 U_m.$$

Deci, la aceeași valoare maximă a tensiunii alternative, tensiunea redresată obține o valoare medie mai mare și amplitudini mai mici ale pulsațiilor pentru valori mari a lui  $m$ .

Pentru netezirea pulsațiilor tensiunii redresate se folosesc filtrele electrice.

**Tuburile cu descărcare în gaze (fluorescente), tuburile electronice și ionice** sînt de asemenea elemente neliniare. La tuburile electronice și ionice, prevăzute cu grilă de comandă, forma caracteristicii neliniare poate fi modificată după necesități (elemente neliniare comandate).

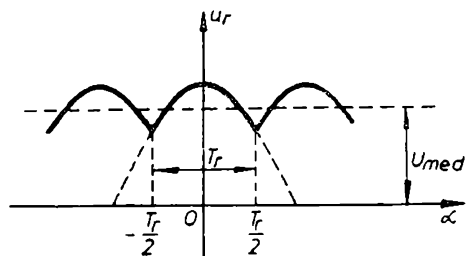


Fig. 3-30. Figură explicativă pentru calculul tensiunii redresate medii.

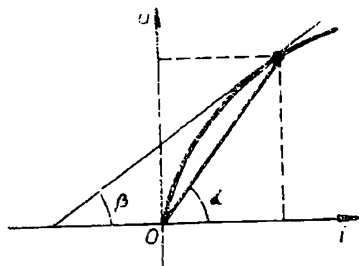


Fig. 3-31. Caracteristica rezistorului neliniar.

La toate elementele neliniare la care rezistența variază în funcție de curent sau de tensiune, pe lângă *rezistența statică*, egală cu raportul dintre tensiune și curent, mai intervine și *rezistența dinamică* care este raportul dintre variația tensiunii și variația curentului (fig. 3-31) :

$$R_s = \frac{u}{i} = k \operatorname{tg} \alpha; \quad R_d = \frac{du}{di} = k \operatorname{tg} \beta, \quad (3-36)$$

unde  $k$  este o constantă prin care se ține seama de scările de reprezentare a lui  $u$  și  $i$ .

Deci, rezistența statică este proporțională cu tangenta trigonometrică a unghiului  $\alpha$  de înclinare a dreptei dusă din originea coordonatelor în punctul

respectiv al caracteristicii, iar rezistența dinamică este proporțională cu tangenta trigonometrică a unghiului  $\beta$  de înclinare a tangentei geometrice dusă în punctul respectiv.

Este evident că  $R_s$  și  $R_d$  variază cînd se trece de la un punct la altul al caracteristicii. Pentru elementele pasive, întotdeauna  $R_s > 0$ , însă  $R_d$  poate fi pozitiv sau negativ, după cum punctul respectiv se găsește pe porțiunea ascendentă sau descendentă a caracteristicii.

### 3.6.2. CALCULUL CIRCUITELOR CU ELEMENTE NELINIARE

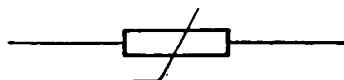
Elementele rezistive neliniare se reprezintă în schemele electrice prin simbolul din fig. 3-32. Calculul circuitelor (rețelelor) de c.c. cu elemente neliniare este mai dificil decît al celor cu elemente liniare din cauză că legea lui Ohm nu mai este valabilă pentru aceste circuite, iar teorema a doua a lui Kirchhoff conduce la ecuații neliniare de forma :

$$\Sigma U_e = \Sigma R(I) I \quad (3-37)$$

unde  $R(I)$  este rezistența ca funcție de curent.

Există mai multe metode de calcul a circuitelor cu elemente neliniare, dintre care se prezintă numai metoda grafică.

Fig. 3-32. Simbolul rezistorului neliniar.



Se consideră un circuit ce conține două rezistoare neliniare legate în serie (fig. 3-33, a), avînd caracteristicile 1 și 2 din fig. 3-33, b. Tensiunea  $U$  aplicată circuitului este egală cu suma căderilor de tensiune pe cele două rezistoare :

$$U = U_1 + U_2.$$

Ca urmare, caracteristica volt-ampere a rezistorului neliniar echivalent, notată în fig. 3-33, b cu 1+2, se obține însumînd ordonatele caracteristicilor 1 și 2 adică  $AD = AB + AC$ . Apoi, pentru determinarea curentului  $I$  din circuit, se duce orizontala corespunzătoare tensiunii  $U$  de la borne și din punctul  $D$ , unde această orizontală intersectează caracteristica 1+2, se coboară o verticală,

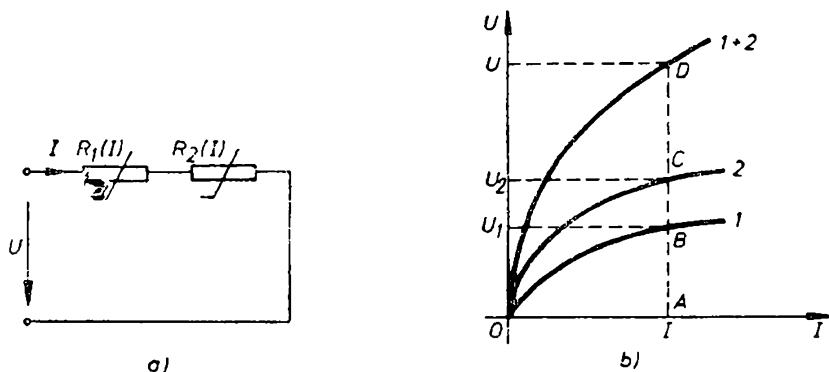


Fig. 3-33. Două rezistoare neliniare legate de serie (a) și caracteristicile lor (b).

a cărei intersecție în punctul  $A$  cu axa absciselor determină curentul  $I$ . Căderile de tensiune  $U_1$  și  $U_2$  pe cele două rezistoare se obțin la intersecțiile  $B$  și  $C$  a verticalei cu caracteristicile  $1$  și  $2$ .

În mod analog se procedează dacă circuitul conține trei sau mai multe rezistoare legate în serie, dintre care unele pot fi liniare.

Dacă circuitul conține două rezistoare neliniare legate în paralel (fig. 3-34,  $a$ ), având caracteristicile  $1$  și  $2$ , din figura 3-34,  $b$ , caracteristica rezistorului neliniar echivalent, notată în fig. 3-34,  $b$  cu  $1+2$ , se obține prin însumarea absciselor

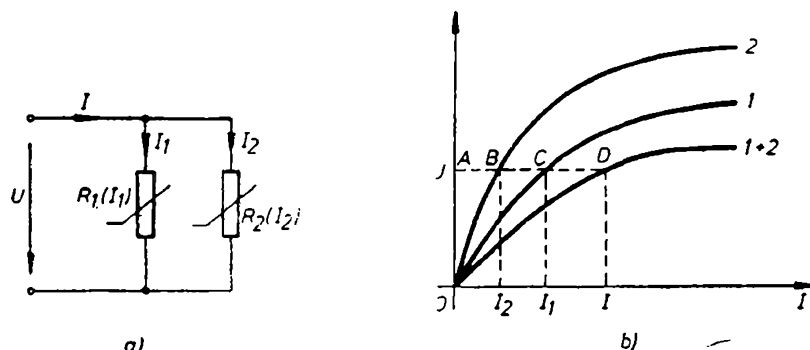


Fig. 3-34. Două rezistoare neliniare legate în paralel ( $a$ ) și caracteristicile lor ( $b$ ).

caracteristicilor  $1$  și  $2$ , adică  $AD = AC + AB$  (deoarece  $I = I_1 + I_2$ ). Pentru determinarea curenților  $I_1$ ,  $I_2$  și  $I$ , se duce o orizontală în dreptul valorii  $U$  a tensiunii de la borne și în punctele  $B$ ,  $C$  și  $D$  de intersecție a acestei drepte cu caracteristicile  $1$ ,  $2$  și  $1+2$ , se duc verticale și se obțin pe abscisă valorile curenților respectivi.

În mod analog se procedează dacă circuitul conține trei sau mai multe rezistoare în paralel, dintre care unele pot fi liniare.

Metoda grafică devine mai complicată în cazul conectării mixte a rezistoarelor neliniare.



## Capitolul 4

# ELECTRODINAMICA

Electrodinamica este ramura electromagnetismului în care se studiază stările electrice și magnetice variabile în timp. În cadrul electrodinamicii vor fi prezentate și problemele câmpului magnetic staționar asociat curenților electrici continui, precum și câmpul magnetostatic al magneților permanenți.

### 4.1. CÎMPUL MAGNETIC

Experimental se constată că în zona învecinată corpurilor magnetizate precum și în jurul conductoarelor parcurse de curent există o stare nouă, denumită *cîmp magnetic*, ce se manifestă prin forțe și cupluri ce acționează asupra unor conductoare parcurse de curent sau asupra unor corpuri magnetizate.

Tot experiența dovedește că într-o zonă din spațiu în care există un câmp electric variabil în timp, în acea zonă există și un câmp magnetic variabil în timp. De asemenea, dacă într-o zonă din spațiu există un câmp magnetic variabil în timp, se constată că în acea zonă există și un câmp electric variabil în timp. Aceasta înseamnă că cele două câmpuri, electric și magnetic variabile în timp, se condiționează reciproc, constituind împreună o unitate denumită *cîmpul electromagnetic*.

Deci, câmpul magnetic împreună cu câmpul electric constituie cele două iaturi sau cele două aspecte ale câmpului electromagnetic. Dependent de modul de alegere a sistemului de referință, față de care se raportează starea de mișcare, se constată că cele două aspecte ale câmpului electromagnetic sînt relative între ele, dar constituie împreună o realitate obiectivă, unică — câmpul electromagnetic.

*Cîmpul electrostatic* este o stare limită a câmpului electromagnetic, corespunzătoare situației în care sarcinile electrice sînt invariabile în timp și aparțin corpurilor în stare de repaus față de sistemul de referință. În această stare, mărimile electrice ale câmpului electromagnetic sînt constante în timp, iar cele magnetice sînt nule.

*Cîmpul magnetostatic* este o altă stare limită a câmpului electromagnetic, fiind produs de magneții permanenți în stare de repaus. În această stare, mărimile electrice ale câmpului sînt nule, iar cele magnetice sînt invariabile în timp.

Cîmpul magnetic produs de corpuri magnetizate (magneți permanenți) se datorește curenților moleculari (curenții lui Ampère) denumiți *curenți legați*.

Curenții determinați de mișcarea ordonată a sarcinilor electrice, denumiți *curenți liberi*, produc atât în interiorul conductoarelor cât și în exteriorul lor câmp magnetic. Curenții de conducție constanți în timp (curenți continui) ce străbat conductoare în repaus, produc *câmpul magnetic staționar*.

Așadar, câmpul magnetic este produs de curenți electrice liberi și legați, precum și de câmpul electric variabil în timp.

Mărimile vectoriale de stare locală ale câmpului magnetic sînt : inducția magnetică  $\vec{B}$  și intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$ .

## 4.2. CÂMPUL MAGNETIC STAȚIONAR ÎN VID

Ne referim în cele ce urmează la câmpul magnetic produs în vid de curenți continui ce străbat conductoare în stare de repaus.

### 4.2.1. INDUCȚIA MAGNETICĂ

Experimental se constată că asupra unui element de conductor  $d\vec{l}$ , filiform parcurs de un curent electric liber  $i$ , situat într-un câmp magnetic, se exercită o forță  $d\vec{F}$ . Expresia acestei forțe a fost obținută prin generalizarea rezultatelor experimentale, fiind cunoscută sub denumirea de *forța lui Laplace*, sau *legea acțiunii ponderomotoare în câmpul magnetic* :

$$d\vec{F} = i [d\vec{l} \times \vec{B}] \quad (4-1)$$

adică, forța  $d\vec{F}$  este proporțională cu produsul vectorial dintre elementul de linie  $d\vec{l}$ , ca vector luat în lungul conductorului în sensul curentului, și o mărime vectorială  $\vec{B}$ , specifică câmpului magnetic, denumită *inducția magnetică*, factorul de proporționalitate fiind curentul electric din conductor.

Relația (4-1) este general valabilă, adică atât pentru regimul variabil al mărimilor electrice și magnetice cât și pentru regimul staționar, cînd  $i = I$  (curent continuu) iar  $\vec{B}$  este constant în timp.

Experiența a dovedit că inducția magnetică  $\vec{B}$  depinde de natura mediului în care există câmpul magnetic, adică de proprietatea de a se magnetiza a mediului redată prin constanta fizică de material denumită *permeabilitatea magnetică*, măsurată în henry/metru [H/m]. Etalonul de comparație al acestei proprietăți este spațiul vid, a cărui permeabilitate magnetică se notează cu  $\mu_0$ .

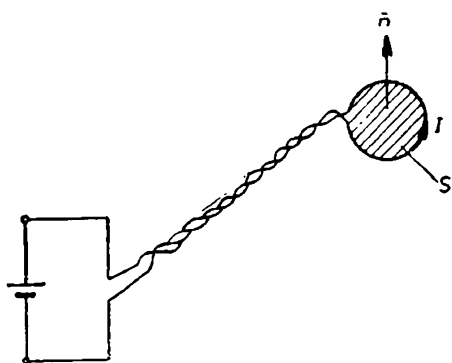


Fig. 4-1. Bucla de curent.

În câmpul magnetic staționar, inducția magnetică este o funcție de spațiu  $\vec{B}(\vec{r})$  ( $\vec{r}$  este vectorul de poziție ce fixează punctul din câmp față de sistemul de referință). Cu alte cuvinte,  $\vec{B}$  se modifică ca valoare și ca orientare de la un punct la altul al câmpului magnetic.

Explorarea inducției magnetice în diverse puncte ale câmpului magnetic din vid poate fi făcută prin intermediul forței conform relației (4-1). „Corpus de probă” adecvat, folosit în acest scop, se dovedește a fi o buclă punctiformă de curent (fig. 4-1),

adică o mică spirală închisă, de arie  $S$ , străbătută de curentul  $I$  și avînd versorul  $\vec{n}$  normal la planul spirei (asociat conform regulei burghiului drept față de sensul curentului din spirală).

*Momentul magnetic* al buclei de curent (spirei de probă) se definește prin relația :

$$\vec{m} = IS\vec{n}. \quad (4-2)$$

Așezînd spira de probă într-o anumită poziție în cîmpul magnetic, asupra ei acționează cuplul :

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad (4-3)$$

care rotește spira. Dacă cîmpul magnetic este neomogen, asupra spirei mai acționează și o forță care îi imprimă o mișcare de translație.

Se remarcă faptul că în expresia cuplului  $\vec{C}$  intervine inducția magnetică  $\vec{B}$  din punctul în care este plasată spira de probă considerată punctiformă. ceea ce justifică rostul unei astfel de spire pentru explorarea cîmpului magnetic.

Unitatea de măsură pentru inducția magnetică în sistemul de unități MKSA se numește tesla (simbol T), sau weber/metru patrat [ $\text{Wb/m}^2$ ] și nu este afectată de raționalizarea sistemului de unități.

#### 4.2.2. INTENSITATEA CÎMPULUI MAGNETIC

Intensitatea  $\vec{H}$  a cîmpului magnetic în vid se definește prin relația :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (4-4)$$

unde  $\mu_0$  este permeabilitatea magnetică absolută a vidului, o constantă fizică (cu dimensiuni) a cărei valoare depinde de sistemul de unități folosit :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad - \text{ MKSA raționalizat},$$

$$\mu'_0 = 10^{-7} \text{ H/m} \quad - \text{ MKSA neraționalizat}.$$

Unitatea de măsură a intensității cîmpului magnetic este amperspira/metru [ $\text{AS/m}$ ] în sistemul de unități MKSA raționalizat și milioersted [ $\text{mOe}$ ] în sistemul de unități MKSA neraționalizat ( $1 \text{ AS/m} = 4\pi \text{ mOe}$ ).

S-a precizat că inducția magnetică depinde de proprietățile magnetice ale mediului în care are loc cîmpul magnetic și se determină experimental. În schimb, în medii omogene și izotrope, intensitatea cîmpului magnetic este independentă de aceste proprietăți, fiind considerată ca o mărime de calcul. Cu alte cuvinte, în cazul cîmpului magnetic staționar, inducția magnetică depinde atît de curenții liberi cît și de curenții legați, în timp ce intensitatea cîmpului magnetic depinde numai de curenții liberi (de conducție).

#### 4.2.3. LINIILE CÎMPULUI MAGNETIC

Prin linie a inducției magnetice se înțelege aceea linie fictivă din spațiu la care vectorul inducției magnetice este mereu tangent, sensul liniei fiind același cu sensul vectorului  $\vec{B}$  (fig. 4-2). Liniile inducției magnetice sînt închise (fără

un început și un sfârșit), ceea ce conferă caracterul eminent solenoidal al câmpului vectorilor inducției magnetice.

Ecuția liniilor inducției magnetice se obține avînd în vedere că vectorii  $d\vec{l}$  și  $\vec{B}$  sînt coliniari (fig. 4-3), adică :

$$d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \quad (4-5)$$

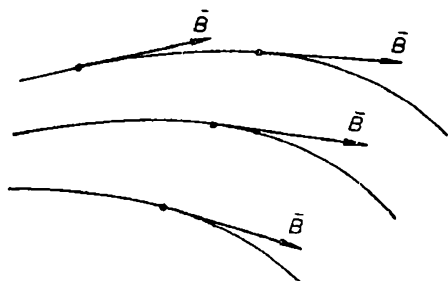


Fig. 4-2. Liniile inducției magnetice  $\vec{B}$ .

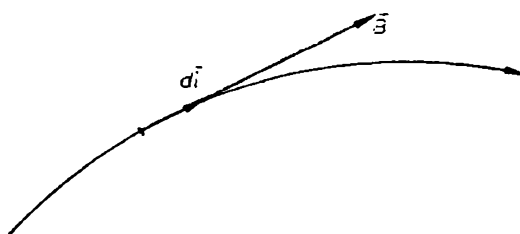


Fig. 4-3. Coliniaritatea între  $\vec{B}$  și  $d\vec{l}$ .

sau, folosind componentele lui  $d\vec{l}$  și  $\vec{B}$  după cele trei axe, rezultă :

$$d\vec{l} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (dyB_z - dzB_y)\vec{i} + (dzB_x - dxB_z)\vec{j} + (dxB_y - dyB_x)\vec{k} = 0,$$

$$dyB_z - dzB_y = 0 ; dzB_x - dxB_z = 0 ; dxB_y - dyB_x = 0,$$

de unde se obține următoarea ecuație diferențială a liniilor inducției magnetice :

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}. \quad (4-6)$$

Deoarece în vid și în alte medii izotrope și fără magnetizare permanentă, vectorii  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  sînt coliniari, *liniile intensității câmpului magnetic* coincid cu liniile inducției magnetice și se numesc împreună linii ale câmpului magnetic. Ansamblul liniilor de câmp dintr-un plan se numește *spectrul câmpului magnetic* în acel plan.

În fig. 4-4 este reprezentat aspectul câmpului magnetic produs de un curent ce trece printr-un conductor rectiliniu. În acest caz, liniile de câmp au formă

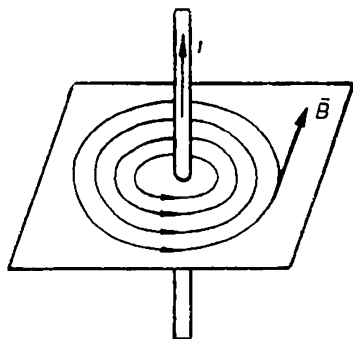


Fig. 4-4. Spectrul câmpului magnetic produs de curentul dintr-un conductor rectiliniu.

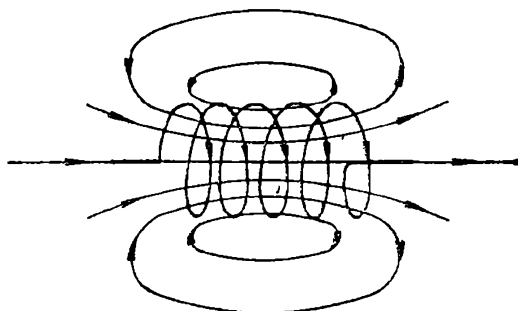


Fig. 4-5. Spectrul liniilor de câmp la o bobină (solenoid).

circulară, cu sensul determinat cu regula burghiului drept (sensul liniilor este sensul în care trebuie rotit burghiul pentru ca el să înainteze în sensul curentului din conductor). În fig. 4-5 este arătat spectrul liniilor de câmp la o bobină (solenoid) parcursă de curent. Și aici sensul liniilor se obține cu ajutorul regulei burghiului drept (se rotește burghiul în sensul curentului din spire, sensul de înaintare fiind sensul liniilor de câmp). La mijlocul bobinei liniile de câmp sînt practic paralele, iar la extremități se depărtează unele de altele.

Se numește *cîmp magnetic omogen* (uniform) acel câmp la care inducția magnetică  $\vec{B}$  și intensitatea cîmpului magnetic  $\vec{H}$  nu se modifică ca valoare și orientare de la un punct la altul. Cîmpul omogen are liniile de câmp drepte paralele și echidistante.

Spectrele cîmpurilor magnetice se pot obține experimental cu ajutorul piliturii de fier presărată pe o coală de hîrtie și așezată în cîmp. Scuturînd încet hîrtia, bucățelele de fier se vor așeza după liniile cîmpului magnetic.

*Tubul de cîmp magnetic* este constituit dintr-un mănunchi de linii ale cîmpului magnetic, fiind mărginit de o suprafață laterală și avînd o anumită secțiune transversală  $\Delta S$  (fig. 4-6). Tubul de cîmp este *elementar* atunci cînd secțiunea sa transversală  $\Delta S$  este atît de mică încît vectorii  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  nu se modifică de la un punct la altul al acestei secțiuni.

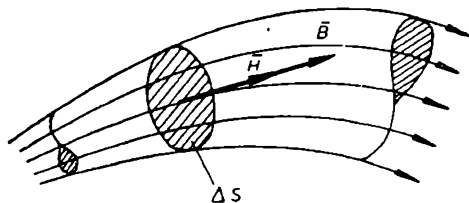


Fig. 4-6. Tubul de cîmp magnetic.

### 4.3. TEOREMA LUI BIOT-SAVART-LAPACE

Pe baza cercetărilor experimentale și teoretice efectuate de I. B. Biot, F. Savart și P. S. Laplace s-a stabilit o legătură între intensitatea cîmpului magnetic  $\vec{H}$  produs într-un punct din spațiul vid de către un curent electric  $I$  (staționar sau cvazistaționar) care trece printr-un conductor filiform în repaus, adică :

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{r^3}, \quad (4-7)$$

unde  $d\vec{l}$  este elementul de linie luat în lungul conductorului, în sensul curentului, iar  $\vec{r}$  este vectorul de poziție orientat de la punctul  $P$  în care se calculează cîmpul spre elementul de linie (fig. 4-7). Integrala din relația (4-7) se efectuează pentru conturul închis determinat de curentul  $I$ .

Teorema lui Biot-Savart-Laplace mai poate fi exprimată și sub forma diferențială :

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{\vec{u}_r \times d\vec{l}}{r^2}, \quad (4-8)$$

unde s-a ținut seama că  $\vec{r} = r\vec{u}_r$ .

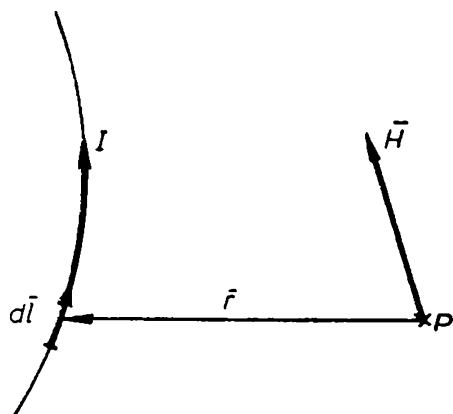


Fig. 4-7. Cîmpul  $\vec{H}$  într-un punct produs de curentul  $I$  dintr-un conductor filiform.

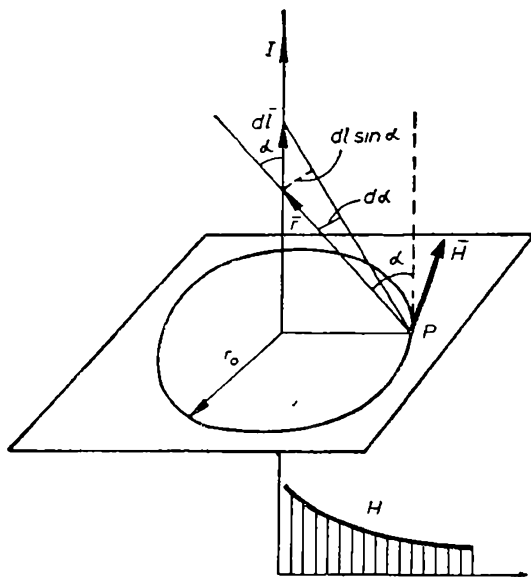


Fig. 4-8. Figură explicativă privind aplicarea teoremei Biot-Savart-Laplace.

Decl,

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{r_0},$$

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{I}{2\pi r_0} \quad (4-10)$$

adică, intensitatea cîmpului magnetic variază invers proporțional cu distanța de la punctul  $P$  la conductor (fig. 4-8). Relația (4-10) este valabilă numai pînă la suprafața conductorului. Pentru punctele din interiorul conductorului se poate demonstra că intensitatea cîmpului magnetic are o variație liniară în funcție de distanța de la axa conductorului (fig. 4-9).

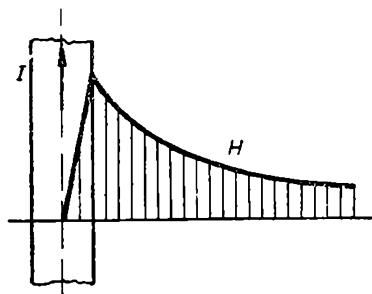


Fig. 4-9. Variația intensității cîmpului magnetic în exteriorul și interiorul unui conductor cu secțiune circulară parcurs de curent.

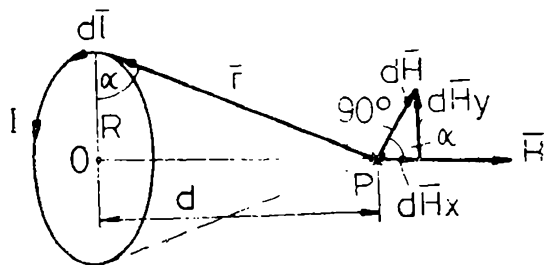


Fig. 4-10. Figură explicativă pentru calculul intensității cîmpului magnetic la o spirală circulară, filiformă, parcursă de curent.

**Aplicația 4-2.** O spirală circulară filiformă de rază  $R$  este parcursă de curentul  $I$  (fig. 4-10). Să se determine intensitatea cîmpului magnetic într-un punct  $P$  situat pe axa spirei la distanța  $d$  de centrul acesteia.

Dacă cîmpul magnetic este produs de curenții de conducție din mai multe conductoare, de exemplu  $n$  conductoare atunci :

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \sum_{v=1}^n I_v \frac{\vec{r}_v \times d\vec{l}_v}{r_v^3} \quad (4-9)$$

**Aplicația 4-1.** Folosind teorema lui Biot-Savart-Laplace, să se determine intensitatea cîmpului magnetic produs de un curent ce străbate un conductor filiform și rectiliniu, infinit de lung, într-un punct  $P$  situat la distanța  $r_0$  de conductor (figura 4-8).

**Rezolvare.** Folosind relația (4-8) și notațiile din fig. 4-8, rezultă :

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{r \, dl \sin \alpha}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{d \sin \alpha}{r^2},$$

$$dl \sin \alpha = r \, d\alpha, \quad r = \frac{r_0}{\sin \alpha}.$$

*Rezolvare.* Calculînd cu ajutorul relației (4-8) intensitatea cîmpului magnetic într-un punct  $P$  situat pe axa spirei se obține :

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{rdl}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{r^2},$$

unde s-a ținut seama că unghiul dintre  $\vec{r}$  și  $d\vec{l}$  este  $90^\circ$ .

Vectorul  $d\vec{H}$  are două componente (fig. 4-10) :

$$d\vec{H} = d\vec{H}_x + d\vec{H}_y,$$

unde

$$dH_x = dH \cos \alpha; \quad dH_y = dH \sin \alpha.$$

Dacă se consideră elementul de linie  $dl$  în două poziții diametrale ale spirei, rezultă o sumă geometrică nulă a celor două componente  $d\vec{H}_y$ , corespunzătoare acestor poziții. Deci, pentru toată spira, intensitatea cîmpului magnetic rezultat nu are o componentă verticală, vectorul  $\vec{H} = \vec{H}_x$  fiind situat pe axa spirei și obținîndu-se prin însumarea (integrarea) componentelor  $dH_x$ , adică :

$$H = \int dH_x = \int_0^{2\pi R} \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\cos \alpha}{r^2} dl,$$

unde, înlocuind  $\cos \alpha = \frac{R}{r}$  se obține :

$$H = \frac{RI}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{R^2 I}{2r^3}.$$

Avînd în vedere că  $r = \sqrt{R^2 + d^2}$ , rezultă :

$$H = \frac{R^2 I}{2(\sqrt{R^2 + d^2})^3}. \quad (4-11)$$

Dacă punctul  $P$  se găsește în centrul spirei ( $d=0$ ), atunci :

$$H = \frac{I}{2R}. \quad (4-12)$$

Calculule devin foarte complicate dacă punctul  $P$  nu este situat pe axa spirei.

Pe baza relației (4-12) se definește unitatea folosită pentru măsurarea intensității cîmpului magnetic, denumită amperspiră pe metru [AS/m], care este intensitatea cîmpului magnetic ce se stabilește în centrul spirei cu diametrul de 1 m, prin care trece un curent de 1 A.

**Aplicația 4-3.** Să se determine intensitatea cîmpului magnetic într-un punct de pe axa unei bobine cilindrice parcursă de curentul  $I$ , avînd raza  $R$ , lungimea  $l$  și  $N$  numărul de spire (fig. 4-11).

*Rezolvare.* Se consideră bobina cu stratul de spire foarte subțire și spirele foarte aproape una de alta. Un element de lungimea  $dx$  al bobinei poate fi identificat cu o spirală echivalentă

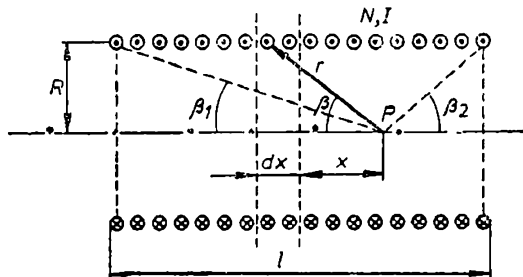


Fig. 4-11. Figură explicativă pentru calculul intensității cîmpului magnetic în interiorul unei bobine cilindrice.

filiformă, parcursă de curentul  $dI = \frac{NI}{l} dx$ . Conform relației (4-11), intensitatea cîmpului magnetic produs de această spiră într-un punct  $P$  de pe axa bobinei, la distanța  $x$  de spira elementară, este :

$$dH = \frac{R^2 \frac{NI}{l} dx}{2(l^2 R^2 + x^2)^{3/2}} . \quad (4-13)$$

Din figură rezultă :  $x = R \operatorname{ctg} \beta$ ,  $R^2 + x^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \beta}$ , respectiv  $dx = -R \frac{d\beta}{\sin^2 \beta}$ , cu care relația (4-13) devine :

$$dH = - \frac{NI \sin \beta d\beta}{2l} .$$

Pentru toată lungimea bobinei, cînd  $\beta$  variază între limitele  $\beta_1$  și  $\beta_2$ , rezultă :

$$H = \frac{NI}{2l} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2), \quad (4-14)$$

de unde se vede că intensitatea cîmpului magnetic depinde de poziția punctului  $P$  și de lungimea  $l$  a bobinei. La o bobină de lungime mare în raport cu diametrul său  $\beta_1 \cong 0$  și  $\beta_2 \cong \pi$ , deci :

$$H \cong \frac{NI}{l} . \quad (4-15)$$

## 4.4. FLUXUL MAGNETIC. LEGEA FLUXULUI MAGNETIC

### 4.4.1. FLUXUL MAGNETIC PRINTR-O SUPRAFAȚĂ DESCHISĂ

Se consideră o suprafață  $S$  delimitată de un contur  $\Gamma$  și situată într-un cîmp magnetic (fig. 4-12). Fluxul magnetic, notat cu  $\Phi$ , se definește prin integrala de suprafață a vectorului inducției magnetice  $\vec{B}$  :

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s} . \quad (4-16)$$

Valoarea acestui flux este aceeași, oricare ar fi forma suprafeței ce se sprijină pe același contur  $\Gamma$ . În funcție de unghiul  $\alpha$  dintre vectorii  $\vec{B}$  și  $d\vec{s}$ , fluxul  $\Phi$  poate obține valori pozitive sau negative.

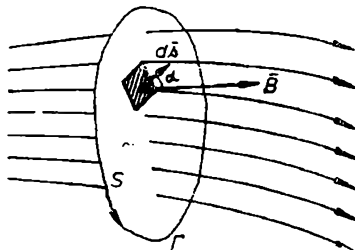


Fig. 4-12. Fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă.

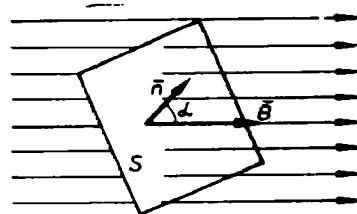


Fig. 4-13. Fluxul magnetic printr-o suprafață plană în cîmp omogen.



Sensul elementului de suprafață  $d\vec{s}$  se asociază cu regula burghiului drept în funcție de sensul de referință ales arbitrar pe conturul  $\Gamma$ .

Printr-o suprafață elementară  $d\vec{s}$ , fluxul elementar este :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds \cos \alpha.$$

Pentru o suprafață plană, situată într-un câmp magnetic omogen, a cărei normală  $\vec{n}$  formează unghiul  $\alpha$  cu vectorul inducției magnetice  $\vec{B}$  (fig. 4-13), din relația (4-16) se deduce :

$$\Phi = \int_S B ds \cos \alpha = B \cos \alpha \int_S ds = BS \cos \alpha. \quad (4-17)$$

Dacă liniile câmpului omogen sînt normale la suprafață ( $\alpha=0$ ), atunci :

$$\Phi = BS, \quad (4-18)$$

de unde se deduce :

$$B = \frac{\Phi}{S}. \quad (4-19)$$

Unitatea de măsură pentru fluxul magnetic în sistemul de unități MKSA se numește Weber [Wb], iar în sistemul de unități CGS<sub>em</sub> unitatea se numește maxwell [Mx]. Legătura dintre aceste două unități este : 1 Mx =  $10^{-8}$  Wb.

#### 4.4.2. LEGEA FLUXULUI MAGNETIC

Se constată experimental că oricare ar fi modul de producere a câmpului magnetic, este totdeauna valabilă următoarea lege generală : *fluxul magnetic printr-o suprafață închisă  $S_i$  este nul*, oricare ar fi forma suprafeței și în orice moment, adică

$$\int_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4-20)$$

(forma integrală a legii fluxului magnetic).

La suprafețele închise, vectorul element de suprafață  $d\vec{s}$  se alege orientat spre exteriorul suprafeței.

Pe baza acestei legi se poate face precizarea că liniile inducției magnetice sînt închise, adică nu există în câmpul magnetic puncte în care să se sfîrșească sau din care să înceapă linii ale câmpului vectorial  $\vec{B}$ .

Legea fluxului magnetic mai poate fi exprimată și sub formă diferențială. Avînd în vedere definiția divergenței unui vector

$$\text{div } \vec{B} = \lim_{\Delta O \rightarrow 0} \frac{\int_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{s}}{\Delta O}, \quad (4-21)$$

unde  $\Delta O$  este volumul închis de suprafața  $S_i$  și ținînd seama de relația (4-20), se obține următoarea formă diferențială a legii fluxului magnetic :

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (4-22)$$

Prin urmare, *divergența vectorului inducției magnetice este egală cu zero*, în orice punct din câmpul magnetic și la orice moment.

Se precizează că divergența unei funcțiuni vectoriale de spațiu se exprimă prin produsul scalar dintre operatorul vectorial nabla (operatorul lui Hamilton)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$$

și vectorul respectiv, adică, în cazul inducției magnetice,  $\vec{B}$ , avem:  $\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$ . În coordonate carteziane se obține:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (4-23)$$

## 4.5. TEOREMA LUI AMPÈRE

Teorema lui Ampère este o consecință a legii circuitului magnetic, particularizată pentru câmpul magnetic staționar și cvazistaționar. Din acest motiv, teorema este cunoscută și sub denumirea de *legea circuitului magnetic în regim staționar și cvazistaționar*.

Forma integrală a teoremei lui Ampère precizează că, în regim staționar și cvazistaționar, integrala de linie a vectorului intensității câmpului magnetic  $\vec{H}$ , calculată pentru un contur închis  $\Gamma$ , imobil, este egală cu suma algebrică a curenților de conducție care străbat suprafața  $S_\Gamma$  ce se sprijină pe acel contur, adică:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{s}, \quad (4-24)$$

unde suma algebrică a curenților este exprimată prin integrala de suprafață a densității curenților de conducție.

Integrala pe contur închis a intensității câmpului magnetic se mai numește și *tensiune magnetomotoare* (t.m.m.) iar suma algebrică a curenților care străbat suprafața închisă de conturul respectiv se mai numește și *solenafie*. Deci, teorema lui Ampère se poate formula și în modul următor: *tensiunea magnetomotoare este egală cu solenația*.

Pentru exemplificarea aplicării acestei teoreme, se consideră în fig. 4-14 trei conductoare străbătute de curenții  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  și conturul închis  $\Gamma$ , cu sensul pozitiv pe contur ales arbitrar. Conform teoremei lui Ampère rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_1 + I_2 - I_3,$$

unde, față de sensul pozitiv ales arbitrar pe conturul  $\Gamma$ , s-a stabilit, cu regula burghiului drept, semnul curenților ce străbat suprafața închisă de contur.

Dacă suprafața închisă de conturul de-a lungul căruia se efectuează integrala intensității câmpului magnetic nu este străbătută de curenți de conducție (fig. 4-15), atunci:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (4-25)$$

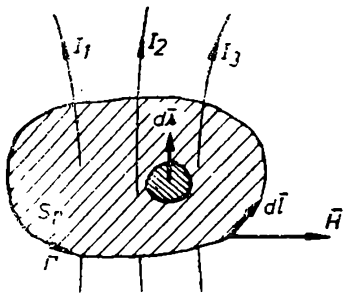


Fig. 4-14. Figură explicativă privind teorema lui Ampère.

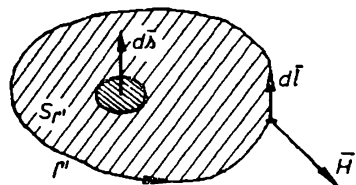


Fig. 4-15. Suprafață care nu este străbătută de curenți de conducție.

Teorema lui Ampère poate fi exprimată și sub formă diferențială. Pentru aceasta, folosind teorema lui Stokes de transformare a unei integrale de linie în integrală de suprafață :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_{\Gamma}} \text{rot } \vec{H} d\vec{s} \quad (4-26)$$

și înlocuind (4-26) în (4-24) se obține :

$$\int_{S_{\Gamma}} \text{rot } \vec{H} d\vec{s} = \int_{S_{\Gamma}} \vec{J} d\vec{s},$$

de unde rezultă următoarea formă diferențială a teoremei lui Ampère :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}. \quad (4-27)$$

Dacă în punctul în care se calculează rotorul vectorul  $\vec{H}$  densitatea de curent  $\vec{J}$  este nulă, atunci

$$\text{rot } \vec{H} = 0. \quad (4-28)$$

Se precizează că rotorul unei funcțiuni vectoriale de spațiu se exprimă prin produsul vectorial :  $\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H}$ , unde  $\nabla$  este operatorul vectorial a lui Hamilton (v. relația 4-23).

Unitatea de măsură pentru t.m.m., respectiv pentru solenație, în sistemul de unități MKSA raționalizat se numește amperispire [AS].

**Aplicația 4-4.** Folosind teorema lui Ampère, să se determine intensitatea cîmpului magnetic produs de :

- Bobina toroidală.
- Bobina cilindrică.
- Un conductor rectiliniu parcurs de curent.

**Rezolvare.** a. *Bobină toroidală* (fig. 4-16). Se notează cu  $N$  numărul de spire al bobinei, cu  $I$  curentul prin bobină și cu  $l$  lungimea conturului  $\Gamma$  care, în cazul de față, se confundă cu o linie a cîmpului magnetic. Avînd în vedere că  $\vec{H}$  este constant de-a lungul liniei de cîmp, prin aplicarea relației (4-24) se obține :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = Hl = NI, \quad (4-29)$$

deoarece suprafața închisă de conturul  $\Gamma$  este străbătută de  $N$  ori de curentul  $I$ . Din relația (4-29) rezultă :

$$H = \frac{NI}{l}. \quad (4-30)$$

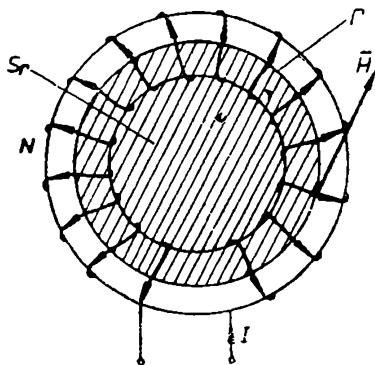


Fig. 4-16. Bobină toroidală.

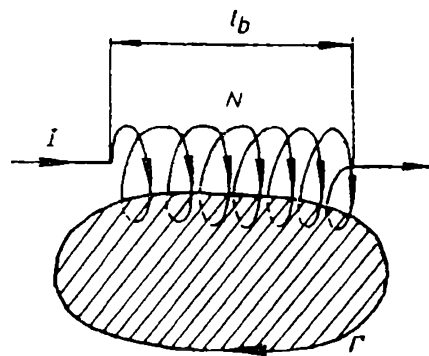


Fig. 4-17. Bobină cilindrică.

b. *Bobina cilindrică* (fig. 4-17). Se notează cu  $l_b$  lungimea, cu  $N$  numărul de spire și cu  $I$  curentul din bobină. Efectuind integrala de linie a intensității cîmpului magnetic de-a lungul conturului închis  $\Gamma$ , se obține :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = NI.$$

Ținînd seama că în interiorul bobinei cîmpul magnetic este practic omogen și că în exterior intensitatea cîmpului magnetic este mică (neglijabilă) rezultă :

$$H l_b \cong NI.$$

Deci, în ipoteza că intensitatea cîmpului magnetic din exteriorul bobinei cilindrice este neglijabilă și în interior cîmpul este omogen, se obține pentru intensitatea cîmpului magnetic în interior relația :

$$H \cong \frac{NI}{l_b}. \quad (4-31)$$

Inducția magnetică în interiorul bobinei cilindrice fără miez este :

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{NI}{l_b}. \quad (4-32)$$

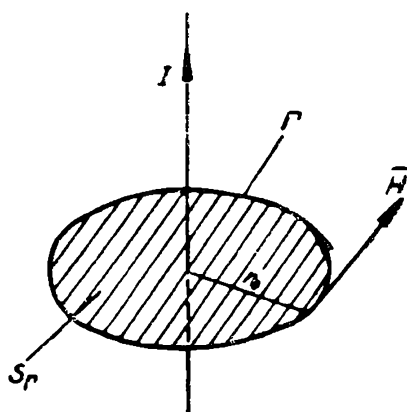


Fig. 4-18. Conductor rectiliniu parcurs de curent.

c. *Conductor rectiliniu parcurs de curent* (fig. 4-18)\* Se consideră conturul închis  $\Gamma$  identic cu linia cîmpului magnetic, de formă circulară cu raza  $r_0$ . Avînd în vedere că  $\vec{H}$  are aceeași valoare în toate punctele conturului, prin aplicarea teoremei lui Ampère, rezultă :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = H \int_0^{2\pi r_0} dl = H 2 \pi r_0 = I$$

de unde se deduce :

$$H = \frac{I}{2\pi r_0}.$$

Deci, se obține o expresie de calcul a intensității cîmpului magnetic care este aceeași cu cea obținută prin aplicarea teoremei lui Biot-Savart-Laplace (relația 4-10).

## 4.6. CÎMPUL MAGNETIC ÎN CORPURI

### 4.6.1. STAREA DE MAGNETIZARE A CORPURILOR

Starea fizică a corpurilor în care acestea sînt supuse unor acțiuni ponderomotoare (forțe și momente) dacă sînt situate într-un cîmp magnetic, se numește *stare de magnetizare*. Corpurile care se găsesc în stare de magnetizare se mai numesc și corpuri magnetizate.

Starea de magnetizare a corpurilor este *temporară*, dacă se menține numai în prezența unui cîmp magnetic exterior și este *permanentă* dacă se menține și în absența cîmpului magnetic exterior.

În decursul timpului, fizicienii au căutat să explice fenomenologic starea de magnetizare a corpurilor. La început s-a admis ipoteza existenței unor sarcini magnetice pozitive și negative, prin analogie cu sarcinile electrice. S-a constatat însă că aceste sarcini nu pot fi puse în evidență experimental, adică nu se pot despărți sarcinile magnetice pozitive, situate la polul nord al unui magnet, de cele negative situate la polul sud, așa cum se despart corpurile încărcate cu sarcini electrice pozitive de cele încărcate cu sarcini electrice negative.

Fizica modernă a confirmat ipoteza emisă de Ampère, conform căreia magnetizarea corpurilor se datorește curenților moleculari, denumiți și *curenți legați*, determinați de mișcarea la scară microscopică a electronilor în jurul moleculelor sau atomilor, respectiv de *mișcarea de spin* (de rotație în jurul axei proprii). Cu alte cuvinte, există la scară microscopică mici bucle (spire) de curent avînd momentul magnetic :

$$\vec{m}_{mol} = i_{mol} \vec{A}_{mol}, \quad (4-33)$$

unde  $i_{mol}$  este curentul molecular, iar  $\vec{A}_{mol} = A_{mol} \vec{n}$  este suprafața buclei de curent ca vector (v. relația 4-2). Evident că momentul magnetic al unei molecule (sau atom) este rezultanta momentelor magnetice determinate de mișcarea orbitală sau de spin a tuturor particulelor încărcate cu sarcini electrice elementare ce aparțin moleculei. Sub acest aspect, se disting materiale cu molecule nepolare (*materiale diamagnetice*), la care momentul magnetic molecular resultant este egal cu zero și materiale cu molecule polare (*materiale paramagnetice*), la care momentul magnetic molecular resultant este diferit de zero.

Din categoria materialelor diamagnetice fac parte: hidrogenul, gazele inerte, carbonul, cuprul, zincul, aurul etc. Prin introducerea acestor materiale într-un cîmp magnetic se constituie momente magnetice moleculare orientate în sens opus cîmpului exterior, ceea ce conduce la micșorarea cîmpului magnetic în interiorul lor.

Din categoria materialelor paramagnetice fac parte: oxigenul, aluminiul, fierul, nichelul, cobaltul etc. Prin introducerea acestor materiale într-un cîmp magnetic, momentele magnetice moleculare se orientează în același sens cu cîmpul exterior, avînd loc o majorare a cîmpului magnetic din interiorul lor.

O categorie specială de materiale paramagnetice o constituie *materialele feromagnetice* (Fe, Ni, Co) care se magnetizează foarte puternic în prezența unui cîmp exterior și care pot fi aduse în stare de magnetizare permanentă.

#### 4.6.2. POLARIZAREA MAGNETICĂ

Ne referim la materialele paramagnetice (inclusiv feromagnetice), fără magnetizare permanentă, introduse într-un câmp magnetic. În absența câmpului magnetic exterior, momentele magnetice ale curenților moleculari sînt orientate dezordonat, astfel încît, la scară macroscopică, efectul lor magnetizant global este nul. În schimb, în prezența câmpului magnetic de inducție  $\vec{B}$  asupra buclelor de curenți moleculari acționează cuplul:

$$\vec{C}_{mol} = \vec{m}_{mol} \times \vec{B} \quad (4-34)$$

care orientează momentele magnetice  $\vec{m}_{mol}$  în sensul câmpului magnetic, producîndu-se polarizarea magnetică a materialului (magnetizarea materialului).

Pentru a caracteriza starea locală de magnetizare (polarizare magnetică) a materialelor, se introduce mărimea vectorială  $\vec{M}$ , denumită *vectorul de polarizare magnetică*, definită prin relația:

$$\vec{M} = \mu_0 \lim_{\Delta o \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_{mol}}{\Delta o}, \quad (4-35)$$

adică  $\vec{M}$  este proporțional cu limita raportului dintre suma geometrică a momentelor magnetice moleculare cuprinse în volumul  $\Delta o$  și acest volum, cînd  $\Delta o \rightarrow 0$ , factorul de proporționalitate fiind  $\mu_0$ .

Analizînd dimensiunea vectorului de polarizare magnetică  $\vec{M}$ , rezultă că este aceeași ca și dimensiunea inducției magnetice  $\vec{B}$ .

La materialele care, pe lîngă polarizarea magnetică temporară, prezintă și o polarizare magnetică permanentă, vectorul de polarizare magnetică are două componente:

$$\vec{M} = \vec{M}_t + \vec{M}_p, \quad (4-36)$$

adică o componentă  $\vec{M}_t$  corespunzătoare polarizării magnetice temporare și o componentă  $\vec{M}_p$  corespunzătoare polarizării magnetice permanente.

#### 4.6.3. LEGEA POLARIZĂRII MAGNETICE TEMPORARE

Experiența a dovedit că pentru mediile izotope și fără polarizare magnetică permanentă ( $\vec{M}_p = 0$ ), vectorul de polarizare magnetică temporară ( $\vec{M}_t = \vec{M}$ ) este proporțional cu intensitatea câmpului magnetic stabilit în mediul respectiv:

$$\vec{M}_t = \mu_0 \gamma_m \vec{H}, \quad (4-37)$$

constanta de proporționalitate fiind produsul dintre permeabilitatea magnetică  $\mu_0$  a vidului și susceptivitatea magnetică  $\gamma_m$  (o constantă de material adițională).

Din relația (4-37) ce exprimă legea polarizării magnetice temporare, se remarcă faptul că vectorii  $\vec{M}_t$  și  $\vec{H}$  sînt coliniari.

#### 4.6.4. LEGEA LEGĂTURII DINTRE $\vec{B}$ , $\vec{H}$ ȘI $\vec{M}$

Enunțul acestei legi este următorul: în orice moment și în orice punct din câmpul magnetic este valabilă următoarea relație de legătură dintre vectorii  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  și  $\vec{M}$ :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \quad (4-38)$$

De aici rezultă constatarea foarte importantă că inducția magnetică  $\vec{B}$  dintr-un mediu omogen magnetizat depinde atât de intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$ , stabilit în acest mediu de cauze exterioare, cât și de starea locală de polarizare magnetică a mediului respectiv, caracterizată prin  $\vec{M}$ . Rolul preponderent la determinarea inducției magnetice în interiorul mediilor feromagnetice îl are vectorul de polarizare magnetică  $\vec{M}$ , adică curenții moleculari.

În vid (sau aer) nu apare fenomenul de polarizare magnetică ( $\vec{M} = 0$ ), deci:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (4-39)$$

În mediile care prezintă numai polarizare magnetică permanentă, așa cum este cazul magneților permanenți, inducția magnetică este determinată numai de vectorul de polarizare magnetică permanentă:

$$\vec{B} = \vec{M}_p. \quad (4-40)$$

#### 4.6.5. PERMEABILITATEA MAGNETICĂ ABSOLUTĂ ȘI RELATIVĂ

Pentru mediile izotrope și fără magnetizare permanentă, din relațiile (4-38) și (4-37) se obține:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \eta_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \eta_m) \vec{H},$$

adică

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (4-41)$$

unde

$$\mu = \mu_0 (1 + \eta_m) \quad (4-42)$$

este permeabilitatea magnetică absolută a mediului, prin care se caracterizează proprietatea mediului respectiv de a se magnetiza.

Din relația (4-41) se remarcă faptul că în mediile izotrope și fără polarizare permanentă vectorii  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  sînt coliniari. De asemenea rezultă:

$$\mu = \frac{B}{H}, \quad (4-43)$$

ceea ce înseamnă că permeabilitatea magnetică absolută este o constantă fizică de material, cu dimensiuni [H/m].

Dacă  $\mu$  este independent de  $H$ , mediul respectiv este liniar iar dacă  $\mu$  depinde de  $H$ , mediul este neliniar din punct de vedere al proprietăților magnetice.

Permeabilitatea magnetică relativă este:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \eta_m. \quad (4-44)$$

Pentru materialele diamagnetice  $\mu_r < 1$ , iar pentru cele paramagnetice  $\mu_r > 1$ . La materialele feromagnetice  $\mu_r \gg 1$ . În tabela 4-2 pag. 161 sînt prezentate valorile permeabilității magnetice relative pentru cîteva materiale magnetice.

## 4.7. MATERIALE FEROMAGNETICE

S-a arătat la paragraful precedent că materialele feromagnetice se caracterizează prin permeabilitatea magnetică relativă mult mai mare decît unitatea, de ordinul sutelor și chiar miilor. Starea de magnetizare a acestor materiale, determinată de un cîmp magnetic de excitație, contribuie la o intensificare foarte puternică a cîmpului magnetic, astfel că inducția magnetică crește foarte mult. Fără existența materialelor cu astfel de proprietăți nu ar fi fost posibilă construcția mașinilor și aparatelor electrice la care este necesar să existe inducții magnetice de valori mari.

Din grupul materialelor feromagnetice fac parte, în primul rînd, fierul cu aliajele sale (oțel, fontă etc.), de unde provine și denumirea lor. Proprietăți asemănătoare mai au nichelul, cobaltul și aliajele lor, precum și aliajele unor substanțe neferoase.

Pe lîngă permeabilitatea magnetică de valoarea ridicată, materialele feromagnetice mai au și următoarele proprietăți magnetice :

- prezintă fenomenul de histerezis magnetic și își păstrează în parte magnetizarea după dispariția cîmpului magnetic de excitație ;
- permeabilitatea lor magnetică variază cu intensitatea cîmpului magnetic, adică sînt medii magnetice neliniare ;
- peste o anumită temperatură critică (punctul Curie) un material feromagnetic se comportă ca unul paramagnetic obișnuit.

### 4.7.1. CURBA DE MAGNETIZARE

Curba de magnetizare a materialelor feromagnetice reprezintă variația inducției magnetice în funcție de intensitatea cîmpului magnetic :  $B = f(H)$ . Această curbă se determină experimental pentru fiecare material feromagnetic în parte. În acest scop, se confecționează din materialul respectiv un miez de formă toroidală pe care se așază o bobină parcursă de curent continuu.

Modificînd curentul din bobină, are loc o variație a lui  $H$ , care depinde liniar de curent, și a lui  $B$ , care se exprimă în funcție de  $H$  prin relația  $B = \mu H$ .

Forma curbei de magnetizare a materialelor feromagnetice este arătată în fig. 4-19. Se observă că pentru valori mici ale intensității cîmpului magnetic, inducția  $B$  variază proporțional cu  $H$ . La o anumită valoare a intensității cîmpului magnetic, curba de magnetizare obține

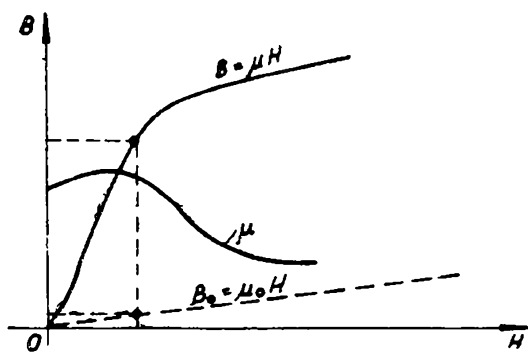


Fig. 4-19. Curba de magnetizare.



o anumită curbă, denumită „cotul curbei de magnetizare“. Apoi, în domeniul de saturație,  $B$  variază din nou aproximativ proporțional cu  $H$ , cu observația că la variații mari ale lui  $H$  se obțin variații mici pentru  $B$ .

Aliura curbei de magnetizare se explică prin orientarea treptată a momentelor magnetice ale curenților moleculari sub acțiunea câmpului magnetic exterior  $H$ . Când s-a ajuns la cotul curbei de magnetizare, înseamnă că majoritatea momentelor magnetice s-au orientat, rămânând ca, în continuare, să se orienteze un număr din ce în ce mai mic de momente magnetice, astfel ca, în domeniul de saturație, orientarea să înceteze aproape complet. Datorită fenomenului de saturație, permeabilitatea magnetică  $\mu = \frac{B}{H}$  scade (figura 4-19).

În fig. 4-19 este arătată și variația inducției magnetice în vid (sau aer) în funcție de intensitatea câmpului magnetic:  $B_0 = \mu_0 H$ . Se remarcă valorile mult mai mari ale inducției în materialul feromagnetic față de aer, la aceeași valoare a intensității câmpului magnetic.

Curbele de magnetizare pentru materiale feromagnetice uzuale sînt date în cataloagele acestor produse. Importantă este valoarea inducției magnetice la care materialul respectiv se saturează. Punctul nominal de funcționare pe curba de magnetizare se fixează în zona de proporționalitate (nesaturată), în apropierea cotului curbei.

#### 4.7.2. FENOMENUL DE HISTEREZIS MAGNETIC

Introducînd un material feromagnetic într-un câmp magnetic cu variație alternativă în timp, produs, spre exemplu, de un curent alternativ (fig. 4-20), se constată o întârziere a variației inducției magnetice față de variația intensității câmpului magnetic. În fig. 4-21 este reprezentat ciclul de histerezis.

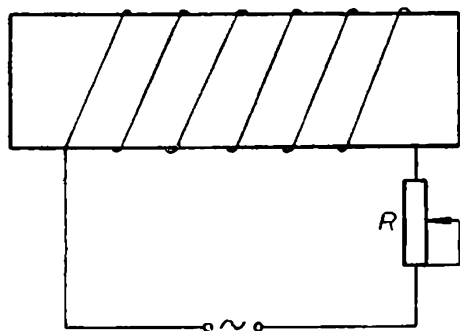


Fig. 4-20. Magnetizarea alternativă a miezului feromagnetic.

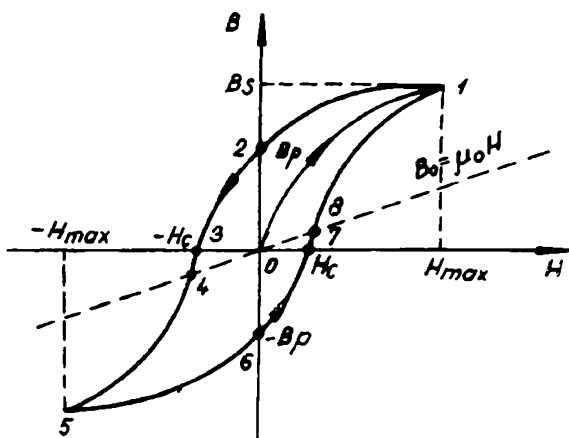


Fig. 4-21. Ciclul de histerezis.

La prima magnetizare,  $B$  variază în funcție de  $H$  după curba cuprinsă între 0—1. Apoi, cînd intensitatea câmpului magnetic se micșorează de la valoarea  $H_{max}$  la zero, inducția magnetică variază după curba 1—2. În punctul 2, deși  $H=0$ , inducția magnetică este diferită de zero,  $B=B_p$ , datorită polarizării

magnetice permanente a materialului feromagnetic — *inducție magnetică remanentă*. Prin schimbarea sensului curentului din bobină,  $H$  devine negativ, parcurgându-se porțiunea de curbă cuprinsă între 2 și 5, când  $H$  crește în sens negativ, și porțiunea de curbă cuprinsă între 5 și 6, când  $H$  revine ca valoare la zero. Când  $H$  crește în sens pozitiv se parcurge porțiunea de curbă cuprinsă între 6 și 1, ș.a.m.d. Se observă că în punctele 3 și 7 inducția magnetică în material este zero, iar intensitatea cîmpului magnetic este diferită de zero,  $H = H_c$ . Valoarea  $H_c$  a intensității cîmpului magnetic pentru care inducția magnetică în miezul de fier se anulează se numește *cîmp magnetic coercitiv*. În punctele 4 și 8, inducția magnetică în miezul de fier are valoarea pe care aceeași intensitate de cîmp magnetic o produce în vid ( $B = \mu_0 H$ ), adică, în aceste puncte, nu există o polarizare magnetică a materialului care să influențeze asupra valorii inducției magnetice.

Trebuie precizat că forma ciclului de histerezis din fig. 4-21 se obține numai după cîteva magnetizări și demagnetizări succesive. Mărimile ce caracterizează forma ciclului de histerezis sînt: inducția remanentă  $B_r$ , cîmpul magnetic coercitiv  $H_c$  și inducția magnetică de saturație  $B_s$ . Ciclul de histerezis este de formă dreptunghiulară dacă  $\frac{B_r}{B_s} = 0,96 \dots 0,98$ .

Curba de magnetizare a materialului se obține prin unirea vîrfurilor ciclurilor de histerezis rezultate prin magnetizări succesive pentru diverse valori a lui  $H_{max}$  (fig. 4-23, a). Această curbă nu coincide în întregime cu cea obținută la magnetizarea inițială.

Pentru demagnetizarea unui material magnetizat (care prezintă inducție remanentă) se folosește metoda de a-l introduce într-un cîmp magnetic alternativ din ce în ce mai puțin intens (fig. 4-22). Prin aceasta, inducția remanentă devine tot mai mică, tinzînd spre zero.

Pentru orientarea alternată a momentelor magnetice ale curenților moleculari din materialele feromagnetice se consumă o anumită energie, care se transformă în căldură în masa materialului.

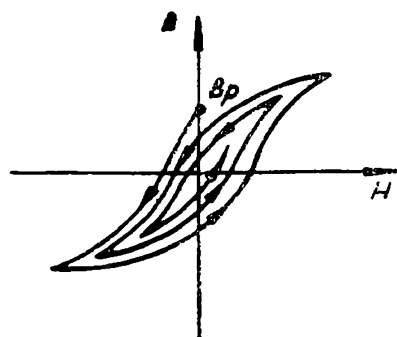


Fig. 4-22. Demagnetizarea miezului feromagnetic.

Este vorba despre *pierderile prin histerezis*, care au loc în materialele feromagnetice supuse unui cîmp magnetic variabil în timp. Puterea pierdută prin histerezis depinde de frecvența  $f$  de parcurgere a ciclului, precum și de suprafața închisă de curba acestui ciclu. Pentru calculul acestei puteri se aplică următoarea formulă empirică:

$$P_H = \sigma_H \frac{f}{100} B^n \quad [\text{W/kg}], \quad (4-45)$$

unde  $f$  este frecvența, în Hz;

$B$  — inducția magnetică maximă, în  $\text{Wb/m}^2$ ;

$\sigma_H$  — un coeficient care depinde de natura și calitatea materialului și care se determină experimental (tabela 4-1);

$n$  — 1,6 ... 2.

În construcția mașinilor și aparatelor electrice, se urmărește folosirea unor materiale feromagnetice cu pierderi prin histerezis, exprimate în W/kg, cât mai mici, ceea ce conduce la îmbunătățirea randamentului acestora.

Ciclurile de histerezis majore, sau principale, ale unui material feromagnetic se obțin la magnetizările alternative cu valori maxime diferite ale intensității cîmpului magnetic (fig. 4-23, a). Există o anumită limită de la care, oricît s-ar majora această valoare maximă, ciclul de histerezis nu se modifică, acesta fiind *ciclul de histerezis limită*.

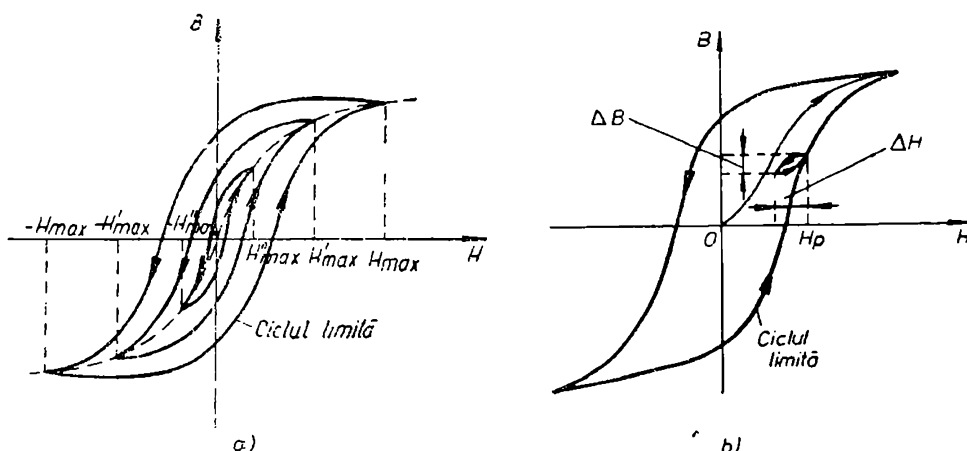


Fig. 4-23. Cicluri de histerezis :  
a — principale (majore) și limită; b — limită și secundar (minor).

Premagnetizarea materialului feromagnetic constă în stabilirea în interiorul său a unui cîmp magnetic constant, determinat de o bobină parcursă de c.c., peste care se suprapune cîmpul magnetic alternativ. În fig. 4-23, b este notat cu  $H_p$  intensitatea cîmpului magnetic de premagnetizare, peste care se suprapune cîmpul magnetic alternativ avînd intensitatea cu amplitudinea  $\Delta H$ . Rezultă astfel un ciclu de *histerezis minor, sau secundar*, deplasat față de centrul axelor de coordonate.

Procedeul de premagnetizare se folosește în practică la amplificatoarele magnetice, la relele electromagnetice polarizate etc.

Pe baza ciclului de histerezis a materialelor feromagnetice se definesc următoarele valori pentru permeabilitatea magnetică relativă (fig. 4-23):

— permeabilitatea magnetică relativă statică :

$$\mu_{rs} = \frac{B}{\mu_0 H} ; \quad (4-46, a)$$

— permeabilitatea magnetică relativă medie :

$$\mu_{rm} = \frac{B_{max}}{\mu_0 H_{max}} ; \quad (4-46, b)$$

— permeabilitatea magnetică relativă reversibilă ;

$$\mu_{rr} = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \right)_{H \neq 0} ; \quad (4-47)$$

— permeabilitatea magnetică relativă inițială :

$$\mu_{ri} = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \right)_{H=0, B=0} . \quad (4-48)$$

Se observă din (4-46, a) că permeabilitatea magnetică relativă statică obține valoare infinită în punctul de pe ciclul de histerezis în care  $H=0$  și  $B=B_p$ , motiv pentru care această mărime nu are sens a fi folosită la calculul bobinelor de c.a. cu miez feromagnetic, la care se ține seama și de ciclul de histerezis. În această situație se folosește permeabilitatea magnetică relativă medie (4-46, b).

În ceea ce privește permeabilitatea magnetică relativă reversibilă, aceasta intervine la miezurile cu premagnetizare.

#### 4.7.3. CLASIFICAREA MATERIALELOR FEROMAGNETICE

Materialele feromagnetice au multiple aplicații în tehnică și în special în industria electrotehnică. Folosirea unor miezuri cu calități magnetice superioare reduce considerabil greutatea mașinilor și aparatelor electrice, reduce consumurile specifice de materiale, mărește randamentul și performanțele acestora.

În funcție de proprietățile lor magnetice, materialele feromagnetice se clasifică în materiale „moi“ și materiale „tari“.

*Materiale feromagnetice moi* sînt caracterizate prin cîmp coercitiv mic și permeabilitate magnetică relativă foarte mare. Pierderile prin histerezis la aceste materiale sînt mici.

*Materiale feromagnetice tari (dure)* sînt caracterizate prin cîmp coercitiv mare, inducție remanentă mare și permeabilitate magnetică relativă mică. Astfel de materiale se folosesc la construcția magneților permanenți.

În tabela 4-2 sînt prezentate caracteristicile cîtorva materiale feromagnetice moi și tari, folosite în practică.

*Feritele* se folosesc pe scară largă în ultimul timp în construcția unor dispozitive ale calculatoarelor electronice. Ciclul de histerezis al acestor materiale este aproape dreptunghiular, cu o suprafață foarte mică, deci pierderi prin histerezis minime.

Date caracteristice pentru unele materiale feromagnetice

Materialul	Permeabilitatea magnetică relativă		Inducția remanentă [Wb/m²]	Cîmpul coercitiv [AS/m]
	inițială	maximă		
<i>Materiale feromagnetice moi</i>				
Fier pur (tratat în hidrogen)	25 000	250 000	1,4	4
Tole din oțel silicios (4% Si)	500	7 000	0,8	40
Permaloy (78,5% Ni, 21,5% Fe)	10 000	50 000	0,6	4
Supermaloy (79% Ni, 15% Fe, 5% Mo, 0,5% Mu)	100 000	300 000	0,6	0,4
Ferită de mangan-zinc	2 000	3 000	0,15	10
<i>Materiale feromagnetice tari</i>				
Oțel (cu 1% C)	40		0,7	5 000
Oțel crom, oțel wolfram	30		1,1	5 000
Alnico I (12% Al, 20% Ni, 5% Co, 63% Fe)	4		0,73	34 000
Oerstit 900 (20% Ni, 30% Co, 20% Ti, 30% Fe)	3		0,55	65 000
Aliaj platină-cobalt (77% Pt, 23% Co)	1		0,45	26 000
Ferită de bariu	1		0,2...0,4	100 000... 250 000

## 4.8. CIRCUITE MAGNETICE

Prin circuit magnetic se înțelege sistemul de medii prin care se închid liniile cîmpului magnetic.

La realizarea concretă a circuitelor magnetice se folosesc materiale fero-magnetice care, avînd permeabilitatea magnetică mare, concentrează cea mai mare parte a liniilor inducției magnetice, necesitînd solenații (amperspire) minime pentru producerea unor fluxuri magnetice de valoare mare.

Cîmpul magnetic dintr-un circuit magnetic poate fi produs de magneți permanenți sau de bobine de excitație. În fig. 4-24, *a* este reprezentat un circuit magnetic realizat cu un magnet permanent, iar în fig. 4-24, *b* și *c* sînt

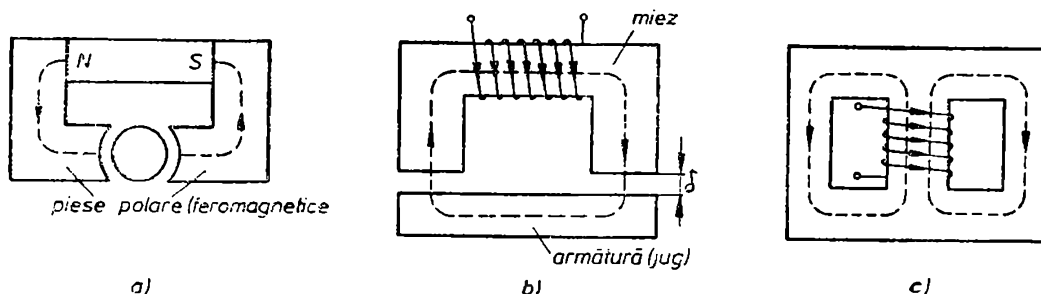


Fig. 4-24. Circuite magnetice :

*a* — neomogen cu magnet permanent; *b* — neomogen și neramificat, cu bobină; *c* — omogen și ramificat, cu bobină.

reprezentate circuite magnetice prevăzute cu o bobină de excitație. Curentul din bobina de excitație poate fi continuu sau alternativ, ceea ce depinde de destinația aparatului în componența căruia intră circuitul magnetic respectiv.

Circuitul magnetic este *omogen*, dacă este realizat din medii cu aceeași permeabilitate magnetică și este *neomogen*, dacă este realizat din medii cu permeabilități magnetice diferite.

Din punctul de vedere al proprietăților de material, se deosebesc circuite magnetice *liniare*, la care permeabilitatea magnetică este independentă de intensitatea cîmpului magnetic ( $\mu = \text{const.}$ ), așa cum este cazul circuitelor magnetice realizate din miezuri feromagnetice nesaturate și circuite magnetice *neliniare* la care permeabilitatea magnetică depinde de intensitatea cîmpului magnetic,  $\mu(H)$ .

În ceea ce privește configurația geometrică, se disting circuite magnetice *neramificate* (fig. 4-24, *a* și *b*) și circuite magnetice *ramificate* (fig. 4-24, *c*)

#### 4.8.1. REZISTENȚA MAGNETICĂ (RELUCTANȚA)

Pentru a defini noțiunea de rezistență magnetică, se consideră un tub de cîmp magnetic elementar, reprezentat în fig. 4-25, avînd secțiunea transversală  $\Delta S$  și extremitățile 1 și 2. Prin analogie cu rezistența electrică a unui tub de curent, rezistența magnetică a tubului de cîmp magnetic se definește prin relația :

$$R_{m12} = \int_1^2 \frac{\vec{H} d\vec{l}}{\int_{\Delta S} \vec{B} d\vec{s}} \quad (4-49)$$

Avînd în vedere că vectorii  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $d\vec{l}$ , și  $d\vec{s}$  sînt coliniari și că la tubul elementar inducția  $\vec{B}$  este aceeași în toate punctele secțiunii transversale  $\Delta S$ , din relația (4-49) se obține :

$$R_{m12} = \int_1^2 \frac{H dl}{\int_{\Delta S} B ds} = \int_1^2 \frac{H dl}{B \int_{\Delta S} ds} = \int_1^2 \frac{H dl}{\mu H \Delta S},$$

adică

$$R_{m12} = \int_1^2 \frac{dl}{\mu \Delta S} \quad (4-50)$$

Dacă secțiunea  $\Delta S$  a tubului de cîmp este aceeași în tot timpul său ( $\Delta S = S = \text{const.}$ ) și mediul în care are loc cîmpul magnetic este liniar și omogen ( $\mu = \text{const.}$ ), rezultă :

$$R_m = \frac{l}{\mu S}, \quad (4-51)$$

unde  $l$  este lungimea circuitului magnetic.

Rezistența magnetică este, în majoritatea cazurilor, un parametru

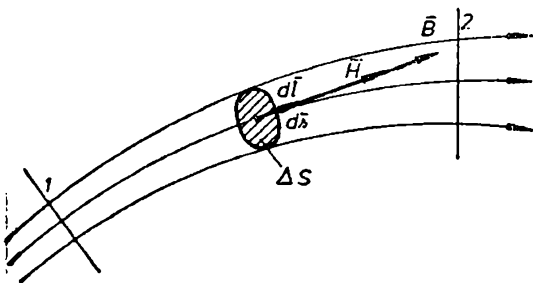


Fig. 4-25. Tub elementar de cîmp magnetic.

neliniar deoarece permeabilitatea magnetică este funcție de intensitatea  $H$  a cîmpului magnetic.

Valoarea inversă a rezistenței magnetice (reluctanței) se numește *permeanță magnetică* :

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} . \quad (4-52)$$

Pentru un circuit magnetic închis și neramificat, la care fluxul  $\Phi = \int \vec{B} d\vec{s}$  este același în tot lungul său, rezistența magnetică este :

$$R_m = \oint \frac{\vec{H} d\vec{l}}{\int \vec{B} d\vec{s}} = \oint \frac{\vec{H} d\vec{l}}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} \oint \vec{H} d\vec{l},$$

adică

$$R_m = \frac{U_m}{\Phi} , \quad (4-53)$$

unde  $U_m = \oint \vec{H} d\vec{l}$  este tensiunea magnetomotoare (t.m.m.) ce acționează în acel circuit.

Din relația (4-53) se deduce :

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m} , \quad (4-54)$$

adică o relație analoagă cu legea lui Ohm pentru circuitele de curent continuu. Produsul  $\Phi R_m$  se numește *cădere de tensiune magnetică*, echivalentă cu căderea de tensiune electrică,  $IR$ .

**Aplicația 4-5.** Să se determine rezistența magnetică totală a circuitului magnetic neomogen (cu întrefier) și neramificat, de forma toroidală din fig. 4-26.

*Rezolvare.* Tensiunea magnetomotoare pentru conturul  $\Gamma$  este :

$$U_m = \oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = H_f l_f + H_{\delta} \delta ,$$

unde  $H_f$  și  $H_{\delta}$  sînt intensitățile cîmpului magnetic în miezul de fier, respectiv în aer, iar  $l_f$  și  $\delta$  sînt lungimea miezului de fier și lungimea întrefierului.

Neglijînd dispersia, fluxul magnetic este același în secțiunea  $S_f$  a miezului de fier și în secțiunea  $S_{\delta}$  a întrefierului, adică :

$$\Phi = B_f S_f = B_{\delta} S_{\delta} .$$

Făcînd raportul ultimelor două relații, se obține rezistența magnetică a circuitului :

$$R_m = \frac{U_m}{\Phi} = \frac{l_f}{\mu S_f} + \frac{\delta}{\mu_0 S_{\delta}} ,$$

unde s-a introdus  $B_f = \mu H_f$  și  $B_{\delta} = \mu_0 H_{\delta}$ .

Deci, rezistența magnetică totală a circuitului magnetic din fig. 4-26 este egală cu suma rezistențelor magnetice ale porțiunilor de circuit din fier și din aer, legate în serie. Valoarea cea mai mare o are rezistența magnetică a întrefierului deoarece  $\mu_0 \ll \mu$ . Deci, căderea de tensiune magnetică în întrefier este mult mai mare decît în miezul feromagnetic.

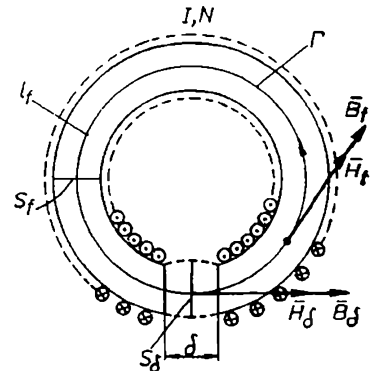


Fig. 4-26. Circuit magnetic cu întrefier (neomogen).

## 4.8.2. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF APPLICATE LA CIRCUITELE MAGNETICE

Se consideră circuitul magnetic ramificat din fig. 4-27, *a* în care acționează două tensiuni magnetomotoare (există două bobine de excitație).

*Teorema a I-a* a lui Kirchhoff este o consecință a legii fluxului magnetic (fig. 4-27, *b*) :

$$\int_{S_i} \vec{B} d\vec{s} = 0 = \int_{S_1} \vec{B} d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{B} d\vec{s}, \quad (4-55)$$

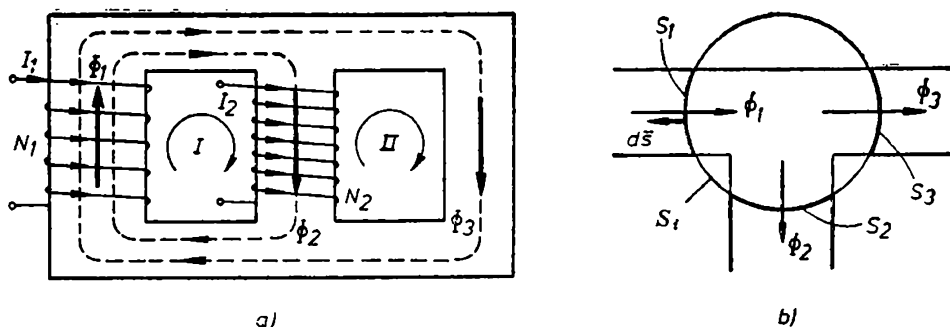


Fig. 4-27. Ochiuri ale circuitului magnetic (*a*) și nod al circuitului magnetic (*b*).

unde s-a ținut seama că numai prin suprafețele  $S_1$ ,  $S_2$  și  $S_3$ ,  $B$  este diferit de zero, prin restul suprafeței închise  $S_i$  inducția fiind nulă.

Pe baza definiției fluxului magnetic printr-o suprafață deschisă, relația (4-55) devine :

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \quad (4-56)$$

sau, în general

$$\sum_{v=1}^n \Phi_v = 0, \quad (4-57)$$

adică suma algebrică a fluxurilor magnetice din secțiunile laturilor concurente într-un nod al unui circuit magnetic este egală cu zero. Sînt pozitive fluxurile orientate dinspre nod și negative cele orientate înspre nod.

*Teorema a II-a* a lui Kirchhoff se aplică pentru ochiuri ale circuitului magnetic și se enunță în modul următor : suma algebrică a tensiunilor magnetomotoare (solenatiilor) ce acționează într-un ochi al circuitului magnetic este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică din acel ochi :

$$\sum_{v=1}^l U_{mv} = \sum_{v=1}^l \Phi_v R_{mv}, \quad (4-58)$$

unde  $l$  este numărul de laturi ale ochiului. Pentru aplicarea acestei teoreme este necesar să se stabilească anticipat, arbitrar, un sens de referință în ochiul de circuit în raport cu care se stabilește semnul fiecărei tensiuni magneto-



motoare (solenatii), respectiv a căderilor de tensiune magnetică. Pentru circuitul ramificat din fig. 4-27, a, rezultă :

— pentru ochiul I :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = N_1 I_1 - N_2 I_2 = \Phi_1 R_{m1} + \Phi_2 R_{m2},$$

— pentru ochiul II :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = N_2 I_2 = -\Phi_2 R_{m2} + \Phi_3 R_{m3},$$

unde  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  și  $\Phi_3$  sînt fluxurile magnetice prin secțiunile celor trei laturi ale circuitului, iar  $R_{m1}$ ,  $R_{m2}$  și  $R_{m3}$  sînt rezistențele magnetice ale acestor laturi.

Cele explicate mai sus referitor la teoremele lui Kirchhoff permit o reprezentare simbolică a circuitului magnetic ramificat din fig. 4-27, a prin schema echivalentă din fig. 4-28. O astfel de reprezentare este valabilă pentru orice circuit magnetic, oricît de complex ar fi. Pe această bază, calculul circuitelor (rețelelor) magnetice se face în mod analog cu calculul rețelor electrice, cu următoarea corespondență între mărimi :  $\Phi \Leftrightarrow I$ ,  $U_m \Leftrightarrow U_e$ ,  $R_m \Leftrightarrow R$ ,  $V \Leftrightarrow V_H$ .

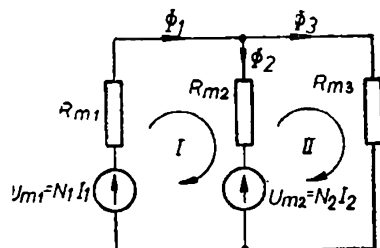


Fig. 4-28. Schema echivalentă a circuitului magnetic.

### 4.8.3. CALCULUL CIRCUITELOR MAGNETICE PREVĂZUTE CU BOBINE DE EXCITAȚIE

Calculul circuitelor magnetice prevăzute cu bobine de excitație se referă la următoarele probleme :

1. Determinarea secțiunii și lungimii circuitului magnetic.
2. La dimensiuni geometrice date, să se determine solenatia (amperspirele), astfel ca în întrefierul circuitului magnetic să se realizeze o inducție magnetică de o anumită valoare (circuitele magnetice prevăzute cu întrefier sînt cele mai des întîlnite în construcția mașinilor și aparatelor electrice).
3. Determinarea inducției magnetice în întrefier (sau a fluxului) pentru o solenatie dată și dimensiuni geometrice cunoscute ale circuitului.

Rezolvarea primei probleme este simplă, în sensul că pentru a realiza un anumit flux magnetic în miezul circuitului, se determină secțiunea acestui miez, astfel ca inducția magnetică să aibă o valoare corespunzătoare zonei nesaturate, sau în apropierea cotului curbei de magnetizare, a materialului folosit pentru realizarea miezului. În ceea ce privește lungimea circuitului magnetic, aceasta rezultă din considerente constructive.

Pentru problema a doua, modul de rezolvare se arată cu referire la o situație concretă. Se consideră circuitul magnetic neomogen din fig. 4-26. Fie  $B_{\delta 1}$  valoarea impusă a inducției magnetice în întrefier, pentru care rezultă :

$$H_{\delta 1} = \frac{B_{\delta 1}}{\mu_0}. \quad (4-59)$$

Neglijind dispersia, fluxul magnetic în secțiunea  $S_f$  a miezului și în secțiunea  $S_\delta$  a întrefierului este același

$$\Phi = B_f S_f = B_\delta S_\delta, \quad (4-60)$$

de unde rezultă :

$$B_f = \frac{S_\delta}{S_f} B_\delta. \quad (4-61)$$

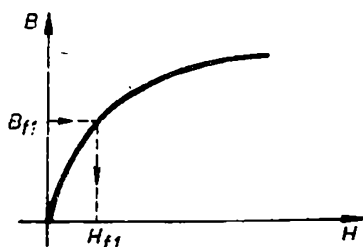


Fig. 4-29. Curba de magnetizare.

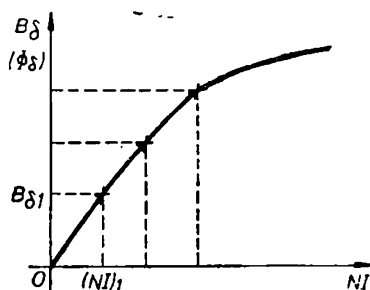


Fig. 4-30. Caracteristica de magnetizare.

Cunoscînd curba de magnetizare  $B(H)$  a materialului feromagnetic din care este realizat miezul (fig. 4-29), pentru  $B_f$ , calculat cu relația (4-61) rezultă  $H_{f1}$ . Apoi, aplicînd legea circuitului magnetic, se obține :

$$H_{f1} l_f + H_\delta \delta = (NI)_1. \quad (4-62)$$

Astfel se determină solenația  $(NI)_1$  care asigură în întrefier inducția  $B_\delta$ . Dacă numărul  $N$  de spire este impus, rezultă cît trebuie să fie curentul  $I$ , astfel ca amperspirele să fie  $(NI)_1$ .

Problema a treia se rezolvă calculînd mai întîi *caracteristica de magnetizare a circuitului* :  $B_\delta(NI)$  sau  $\Phi_\delta(NI)$ . Această caracteristică se determină punct cu punct, după procedeul indicat la problema a doua, avînd o aliură asemănătoare curbei de magnetizare (fig. 4-30). Apoi, din această caracteristică, la valoarea dată a solenației, se citește valoarea inducției în întrefier.

Se atrage atenția asupra deosebirii dintre curba de magnetizare și caracteristica de magnetizare. Prima se referă la un anumit material feromagnetic și reprezintă  $B(H)$  iar a doua se referă la un circuit magnetic neomogen și reprezintă  $B_\delta(NI)$ , sau  $\Phi_\delta(NI)$ .

#### 4.8.4. CALCULUL CIRCUITELOR CU MAGNEȚI PERMANENȚI

Se consideră circuitul din fig. 4-31, realizat cu un magnet permanent, cu dimensiunile precizate în figură. În fig. 4-32 este reprezentată porțiunea situată în cadranul doi a ciclului de histerezis a materialului din care este realizat magnetul permanent. Se are în vedere faptul că mediul magnetului se găsește în stare de polarizare magnetică permanentă, vectorul de magnetizare

$\vec{M}_f$  fiind diferit de zero în punctele acestui mediu. În întrefier  $\vec{M}_\delta = 0$ . Linii inducției magnetice  $\vec{B}$  sînt închise, adică au același sens în mediul magnetului și în întrefier (cîmp de vectori eminentemente solenoidal). În ceea ce privește intensitatea  $\vec{H}$  a cîmpului magnetic, acesta este produs de sarcinile magnetice  $+Q_m$  și  $-Q_m$  (mărimi de calcul), situate la cei doi poli ai magnetului

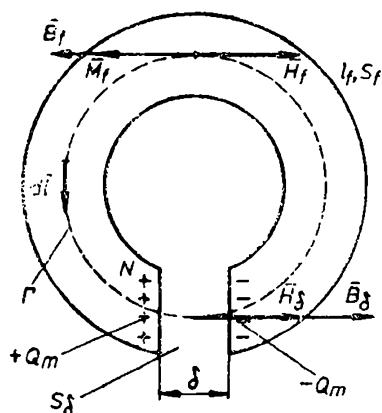


Fig. 4-31. Magnet permanent.

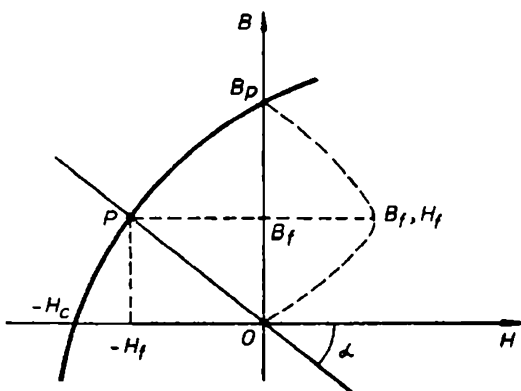


Fig. 4-32. Curbe de calcul ale circuitului magnetic cu magnet permanent.

permanent, ceea ce conferă caracterul potențial al acestui cîmp, orientat de la sarcinile magnetice pozitive spre cele negative. Ca urmare,  $\vec{H}_f$  din interiorul magnetului are rol demagnetizant (este opus lui  $\vec{B}_f$ ), motiv pentru care referirile se fac la porțiunea ciclului de histerezis din cadranul doi ( $B_f > 0$ ,  $H_f < 0$ ).

Legea legăturii dintre  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  și  $\vec{M}$  se exprimă prin următoarele relații scrise pentru punctele din interiorul magnetului și pentru punctele din întrefier :

$$\vec{B}_f = \mu_0 \vec{H}_f + \vec{M}_f, \quad \vec{B}_\delta = \mu_0 \vec{H}_\delta. \quad (4-63)$$

Aplicînd legea circuitului magnetic pentru conturul închis  $\Gamma$ , se obține :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = -H_f l_f + H_\delta \delta = 0, \quad (4-64)$$

unde semnul minus rezultă din produsul scalar al vectorilor  $\vec{H}_f$  și  $d\vec{l}$  care sînt în opoziție.

Fluxul magnetic în secțiunea magnetului și în întrefier este același, adică :

$$\Phi = B_\delta S_\delta = B_f S_f. \quad (4-65)$$

Din aceste relații se determină inducția magnetică în miez :

$$B_f = \frac{S_\delta}{S_f} B_\delta = \mu_0 \frac{l_f S_\delta}{\delta S_f} H_f \text{ sau } B_f = -\mu_0 \frac{l_f S_\delta}{\delta S_f} (-H_f). \quad (4-66)$$

Această relație exprimă o dreaptă (fig. 4-32) care fixează punctul de funcționare  $P$  pe caracteristica magnetului permanent. Panta dreptei este :

$$\operatorname{tg} \alpha = -\mu_0 \frac{l_f S_\delta}{\delta S_f} \quad (4-67)$$

și depinde de lungimea  $\delta$  a întrefierului.

Din relațiile

$$B_{\delta} = \frac{S_f}{S_{\delta}} B_f, \quad B_{\delta} = \mu_0 H_{\delta} = \mu_0 \frac{l_f}{\delta} H_f$$

se obține următoarea expresie pentru inducția magnetică în întrefier :

$$B_{\delta} = \sqrt{\mu_0 \frac{l_f S_f}{\delta S_{\delta}} B_f H_f}, \quad (4-68)$$

de unde se remarcă faptul că  $B_{\delta}$  depinde de produsul  $B_f H_f$ , a cărui valoare maximă are loc pentru o anumită poziție a punctului  $P$ , adică pentru o anumită valoare (optimă) a întrefierului  $\delta$ .

Cîmpul demagnetizant  $H_f$  are, în timp, efect dăunător asupra calității magnetului permanent. Din fig. 4-31 și din relația (4-67) rezultă că  $H_f = 0$  pentru  $\delta = 0$ . Din acest motiv, păstrarea magneților permanenți se face așezînd între poli o bucată de material feromagnetic (pentru a obține  $\delta = 0$ ).

Din relația (4-66) se deduce :

$$H_f = \frac{\delta S_f}{l_f S_{\delta}} \frac{B_f}{\mu_0} = k \frac{B_f}{\mu_0}, \quad (4-69)$$

unde  $k = \frac{\delta S_f}{l_f S_{\delta}}$  se numește *factor de demagnetizare*.

Dacă în construcția circuitului magnetic cu magnet permanent intervin și piese polare feromagnetice (fig. 4-24, a), calculul circuitului magnetic se face neglijînd intensitatea cîmpului magnetic din aceste piese.

Circuitele magnetice cu magneți permanenți sînt folosite în special la instrumentele electrice de măsurat.

**Aplicația 4-6.** Un circuit magnetic toroidal (fig. 4-26), realizat din tole, are lungimea mijlocie a miezului  $l_f = 13$  cm, întrefierul  $\delta = 1$  cm și secțiunile  $S_f = 1,77$  cm<sup>2</sup>,  $S_{\delta} = 2$  cm<sup>2</sup>.

Numărul de spire al bobinei de excitație este  $N = 800$ , iar curba de magnetizare a materialului este dată prin valorile din următoarea tabelă :

$B$ [T]	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$H$ [AS/m] · $10^2$	0,8	1,2	1,5	1,88	2,75	4	7,5	17	32	60	105

Să se determine curentul  $I$  din bobină, astfel ca inducția magnetică în întrefier să fie  $B_{\delta} = 0,8$  T. Dispersia se neglijează.

*Rezolvare.* Se obțin :

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = \frac{0,8}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 63,8 \cdot 10^4 \text{ AS/m},$$

$$B_f = \frac{S_{\delta}}{S_f} B_{\delta} = \frac{2}{1,77} 0,8 = 0,9 \text{ T}.$$

La această valoare a lui  $B_f$ , din curba de magnetizare rezultă :  $H_f = 1,5 \cdot 10^2$  AS/m.

Aplicînd legea circuitului magnetic se obține :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_f l_f + H_{\delta} \delta = NI,$$

adică :

$$I = \frac{H_1 l_1 + H_2 \delta}{N} = 8 \text{ A.}$$

Se remarcă faptul că cele mai multe amperspire sînt necesare pentru crearea cîmpului magnetic în întrefier, 6380 AS față de 19,5 AS, corespunzătoare miezului.

## 4.9. ÎNLĂNȚUIRI MAGNETICE ȘI INDUCTANȚE

### 4.9.1. ÎNLĂNȚUIRI MAGNETICE

Pentru definirea noțiunii de înlănțuire magnetică se consideră o bobină cu  $N_1$  spire, parcursă de curentul  $i_1$ , care produce un cîmp magnetic, și o a doua bobină, cu  $N_2$  spire, așezată în apropiere de prima bobină, care nu este parcursă de curent (fig. 4-33). Cele două bobine fiind considerate cu spire concentrate, liniile cîmpului magnetic creat de curentul din prima bobină înlănțuie complet spirele primei bobine și numai o parte din aceste linii înlănțuie și spirele bobinei a doua.

Fluxul magnetic determinat de liniile care înlănțuie ambele bobine, notat cu  $\Phi_{11}$  pentru secțiunea primei bobine și cu  $\Phi_{12}$  pentru secțiunea bobinei a doua, se numește *flux util*, iar fluxul magnetic determinat de liniile care înlănțuie numai prima bobină se numește *flux de dispersie* și se notează cu  $\Phi_{1d}$ . Fluxul total prin secțiunea primei bobine este :

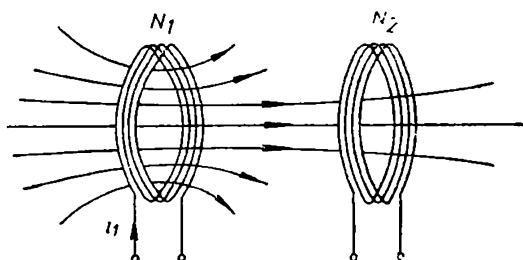


Fig. 4-33. Două bobine cuplate magnetic.

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{1d}. \quad (4-70)$$

Avînd în vedere că  $\Phi = \int \vec{B} d\vec{s}$ , trebuie precizat sensul elementului de suprafață  $d\vec{s}$  pentru cele două bobine, ceea ce se face cu regula burghiului drept în funcție de sensul de referință din fiecare bobină. Pentru prima bobină, sensul de referință se alege același cu sensul curentului  $i_1$  și rezultă valori pozitive pentru fluxurile  $\Phi_{11}$  și  $\Phi_{1d}$ . În schimb, pentru a doua bobină, care nu este parcursă de curent, sensul de referință ales conduce fie la valoare pozitivă, fie la valoare negativă pentru fluxul  $\Phi_{12}$ . Mai trebuie subliniat că fluxurile  $\Phi_{11}$  și  $\Phi_{12}$  au aceeași valoare  $\Phi_{11} = |\Phi_{12}|$ , deoarece sînt determinate de același număr de linii ale cîmpului magnetic.

Se numește înlănțuire magnetică, notată cu  $\psi$ , produsul dintre fluxul magnetic  $\Phi$  din secțiunea unei bobine și numărul de spire  $N$  al bobinei, adică :

$$\psi = \Phi N. \quad (4-71)$$

(Dacă fluxul  $\Phi$  nu este același prin secțiunea fiecărei spire, se ia în considerare un flux mijlociu). În cazul considerat, se disting : o *înlănțuire magnetică proprie* (totală) a primei bobine  $\psi_1 = \Phi_1 N_1$ , o *înlănțuire magnetică reciprocă* (mutuală)

între prima și a doua bobină  $\psi_{12} = \Phi_{12}N_2$ , o *înlănțuire magnetică proprie utilă* a primei bobine  $\psi_{11} = \Phi_{11}N_1$  și o *înlănțuire magnetică de dispersie* a primei bobine  $\psi_{1a} = \Phi_{1a}N_1$ .

În cazul cînd a doua bobină este parcursă de curentul  $i_2$ , se obțin în mod analog înlănțuirile magnetice  $\psi_2, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{2a}$ .

Dacă ambele bobine sînt străbătute simultan de curenții  $i_1$ , respectiv  $i_2$ , se obține un flux magnetic comun  $\Phi = \Phi_{12} + \Phi_{21}$ , determinat de totalitatea liniilor cîmpului magnetic ce înlănțuie complet ambele bobine, în raport cu care nu se definesc înlănțuiri magnetice.

Considerarea celor două bobine cu spirele concentrate constituie o idealizare, făcută în scopul unei prezentări mai simple a problemei. Realitatea este că spirele nu sînt concentrate și că fluxul magnetic nu are aceeași valoare prin suprafața tuturor spirelor bobinei, așa cum s-a considerat în relațiile scrise mai sus. În acest caz, așa cum s-a precizat, se operează cu un flux magnetic mijlociu.

Înlănțuirea magnetică este cunoscută și sub denumirea de *flux total*.

## 4.9.2. INDUCTANȚE

Prin inductanță se înțelege mărimea fizică egală cu raportul dintre înlănțuirea magnetică și curentul electric care cauzează înlănțuirea respectivă, adică :

$$L = \frac{\Psi}{i}. \quad (4-72)$$

Avînd în vedere expresiile din paragraful precedent ale înlănțuirilor magnetice, rezultă :

— inductanța proprie :

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1} = \frac{\Phi_{11}N_1}{i_1}, \quad L_2 = \frac{\Psi_2}{i_2} = \frac{\Phi_{22}N_2}{i_2}; \quad (4-73)$$

— inductanța reciprocă (mutuală) :

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_1} = \frac{\Phi_{12}N_2}{i_1}, \quad L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_2} = \frac{\Phi_{21}N_1}{i_2}; \quad (4-74)$$

— inductanța proprie utilă :

$$L_{11} = \frac{\psi_{11}}{i_1} = \frac{\Phi_{11}N_1}{i_1}, \quad L_{22} = \frac{\psi_{22}}{i_2} = \frac{\Phi_{22}N_2}{i_2}; \quad (4-75)$$

— inductanța de dispersie :

$$L_{1a} = \frac{\psi_{1a}}{i_1} = \frac{\Phi_{1a}N_1}{i_1}, \quad L_{2a} = \frac{\psi_{2a}}{i_2} = \frac{\Phi_{2a}N_2}{i_2}. \quad (4-76)$$

Ținînd seama de relația (4-70), se obține :

$$L_1 = L_{11} + L_{1a}, \quad L_2 = L_{22} + L_{2a}. \quad (4-77)$$

Se precizează că inductanțele mutuale  $L_{12}, L_{21}$  sînt pozitive sau negative, după cum fluxurile  $\Phi_{12}, \Phi_{21}$  sînt pozitive sau negative.

Unitatea de măsură pentru inductanță în sistemul de unități MKSA poartă denumirea de henry [H].

În continuare se prezintă două exemple de calcul în care se arată cum se exprimă inductanțele în funcție de numărul de spire și rezistența magnetică.

a. Inductanța proprie a unei bobine cu miez (fig. 4-34) se calculează în felul următor :

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{\Phi N}{i} = \frac{N^2}{R_m}, \quad (4-78)$$

unde

$$\Phi = \frac{Ni}{R_m} \text{ și } R_m = \frac{l}{\mu S}.$$

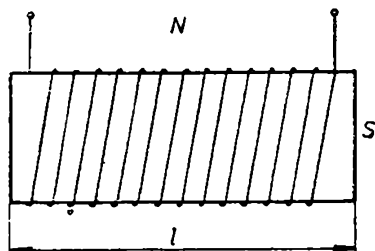


Fig. 4-34. Bobină cilindrică cu miez.

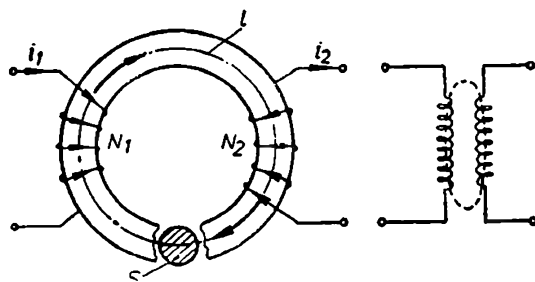


Fig. 4-35. Transformatorul electric monofazat.

Deci :

$$L = \mu \frac{N^2}{l} S, \quad (4-79)$$

în care s-au notat cu  $l$  lungimea bobinei (miezului) și cu  $S$  secțiunea. În aceste relații s-a neglijat câmpul magnetic din exteriorul bobinei, deoarece  $\mu \gg \mu_0$ .

b. Se consideră două bobine, avînd  $N_1$  și  $N_2$  spire așezate pe un circuit magnetic comun, așa cum este cazul transformatorului monofazat (fig. 4-35). Dacă se neglijează fluxul de dispersie, adică se consideră o înlănțuire completă între cele două bobine, avem :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} = \frac{N_1 i_1}{R_m}, \quad \Phi_2 = \Phi_{22} = \frac{N_2 i_2}{R_m}; \quad (4-80)$$

și

$$L_1 = L_{11} = \frac{N_1^2}{R_m}, \quad L_2 = L_{22} = \frac{N_2^2}{R_m}. \quad (4-81)$$

Ținînd seama de sensurile curenților din cele două bobine, rezultă :  $\Phi_{12} = -\Phi_{11} = -\Phi_1$  și  $\Phi_{21} = \Phi_{22} = \Phi_2$ , cu care inductanțele mutuale devin :

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12} N_2}{i_1} = -\frac{N_1 N_2}{R_m}, \quad L_{21} = \frac{\Phi_{21} N_1}{i_2} = \frac{N_2 N_1}{R_m}. \quad (4-82)$$

Din relațiile (4-81) și (4-82) rezultă :

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4-83)$$

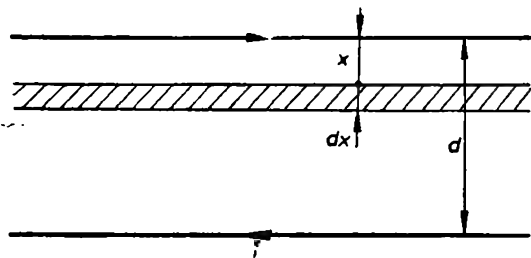
relație care corespunde cuplajului magnetic complet între cele două bobine. În realitate, cuplajul dintre cele două bobine nu este complet, iar relația (4-83) se scrie sub forma :

$$L_{12} = L_{21} = k \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4-84)$$

unde  $k < 1$  este un coeficient denumit *factor de cuplaj magnetic*.

**Aplicația 4-7.** Să se calculeze inductanța proprie a unei linii formată din două conductoare paralele (fig. 4-36).

**Rezolvare.** Se notează cu  $d$  distanța dintre cele două conductoare și cu  $r_0$  raza secțiunii unui conductor. Inducția magnetică la distanța  $x$ , respectiv  $d-x$  de cele două conductoare, conform teoremei lui Biot-Savart Laplace, este :



$$B = \mu_0 \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right),$$

unde  $i$  este curentul din conductoare.

Fluxul magnetic prin suprafața cuprinsă între cele două conductoare se calculează astfel :

Fig. 4-36. Figură explicativă pentru calculul inductanței proprii a unei linii bifilare.

$$d\Phi = B l dx = \mu_0 \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l dx,$$

$$\Phi = \mu_0 \frac{il}{2\pi} \int_{r_0}^{d-r_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \mu_0 \frac{il}{4\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}$$

unde  $l$  este lungimea liniei.

Inductanța pe unitatea de lungime a liniei este :

$$L = \frac{\Phi}{il} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}.$$

### 4.9.3. LEGAREA ÎN SERIE A DOUĂ BOBINE CUPLATE MAGNETIC

Bobinele legate în serie sînt parcurse de același curent și fiind cuplate magnetic, pot fi legate în serie adițional sau în opoziție.

*Legarea în serie adițională* se realizează ca în fig. 4-37, rezultînd inductanțele mutuale  $L_{12}$  și  $L_{21}$  pozitive. Inductanța totală a celor două bobine este :

$$L = L_1 + L_2 + L_{12} + L_{21} \quad (4-85)$$

sau, avînd în vedere că :  $L_{12} = L_{21} = M$ , rezultă :

$$L = L_1 + L_2 + 2 M. \quad (4-86)$$

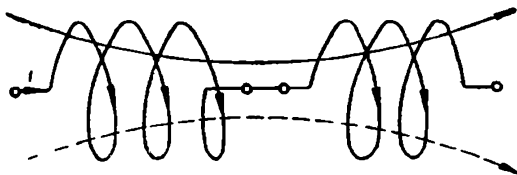


Fig. 4-37. Două bobine legate în serie și cuplate magnetic adițional.

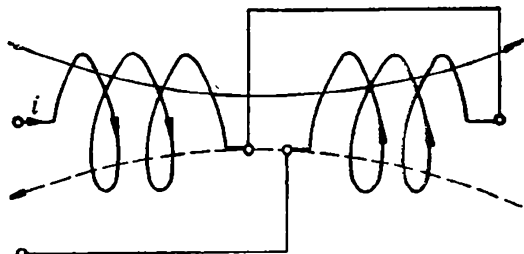


Fig. 4-38. Două bobine legate în serie și cuplate magnetic în opoziție.



Legarea în serie în opoziție se realizează ca în fig. 4-38, rezultând inductanțele mutuale  $L_{12}$  și  $L_{21}$  negative (adică  $-L_{12}$  și  $-L_{21}$ ). În acest caz, inductanța totală a celor două bobine este :

$$L = L_1 + L_2 - L_{12} - L_{21} = L_1 + L_2 - 2M. \quad (4-87)$$

Dacă :  $L_1 = L_2 = M$ , rezultă  $L = 0$ . O astfel de situație o avem la rezistoarele etalon, lipsite de inductanță, bobinate cu fir dublu (fig. 4-39).

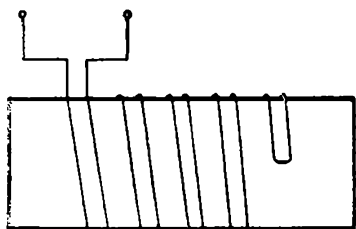


Fig. 4-39. Rezistor bobinat în dublu sens.

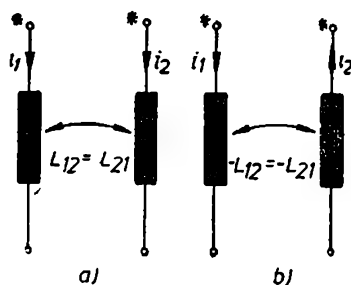


Fig. 4-40. Marcajul bornelor la bobinele cuplate magnetic :

a — aditional; b — în opoziție.

În general bobinele cuplate magnetic pot fi parcurse de același curent (cînd sînt legate în serie) sau de curenți diferiți. Natura cuplajului, aditional sau în opoziție, depinde atît de sensul curentului în fiecare bobină, cît și de sensul de bobinare. Bobinele au cîte una din borne marcată cu steluță (sau alt semn), cu scopul de a cunoaște cum se realizează cuplajul magnetic, aditional sau în opoziție. Regula este următoarea : dacă curenții intră (sau ies) în cele două bobine prin bornele marcate, cuplajul magnetic este aditional (fig. 4-40, a) și dacă curenții au sensuri opuse față de bornele marcate, cuplajul magnetic este în opoziție (4-40, b).

## 4.10. ENERGIA MAGNETICĂ

În cîmpul magnetic este înmagazinată o formă de energie, numită energie magnetică.

S-a arătat că asupra conductoarelor parcurse de curent și a corpurilor magnetizate, situate în cîmpul magnetic, acționează forțe. Prin intermediul lucrului mecanic determinat de aceste forțe apare energia cinetică. Conform principiului de conservare a energiei, energia cinetică nu poate apare decît prin transformarea unei alte forme de energie care, în cazul de față, este energia înmagazinată în cîmpul magnetic. Deci, forțele exercitate de cîmpul magnetic evidențiază posibilitatea transformării energiei magnetice în alte forme de energie prin intermediul lucrului mecanic.

În cele ce urmează se stabilesc relații de calcul a energiei magnetice pe baza unor considerații simple, așa cum s-a procedat și la stabilirea relațiilor de calcul a energiei înmagazinate în cîmpul electric.

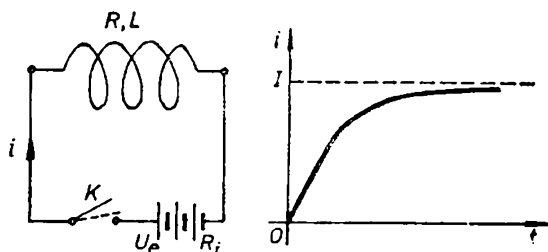


Fig. 4-41. Conectarea unei bobine la o sursă de c.c. :

a - schema electrică; b - variația în timp a curentului.

form legii inducției electromagnetice apare o t.e.m. indusă :

$$u_{eL} = -L \frac{di}{dt} . \quad (4-88)$$

Prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff circuitului din fig. 4-41, a, rezultă :

$$U_e + u_{eL} = (R + R_i) i, \quad (4-89)$$

din care se deduce relația :

$$U_e i \, dt = (R + R_i) i^2 \, dt + Li \, di, \quad (4-90)$$

unde

$U_e i \, dt$  este energia dată de sursă,

$(R + R_i) i^2 \, dt$  — energia calorică dezvoltată prin efect J—L,

$Li \, di$  — energia înmagazinată în câmpul magnetic.

Deci, energia înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei în timpul  $dt$  este :

$$dW_m = Li \, di = i \, d(Li) = i \, d\psi = \frac{\psi}{L} d\psi = \frac{1}{L} d \left\{ \frac{\psi^2}{2} \right\}. \quad (4-91)$$

Prin integrare rezultă :

$$W_m = \frac{1}{L} \int_0^\psi d \frac{\psi^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L} \text{ sau } W_m = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} Li^2, \quad (4-92)$$

unde s-a ținut seama ca  $\psi = Li$  și  $L = \text{const.}$

Pentru  $i = I$  se obține :

$$W_m = \frac{1}{2} \psi I = \frac{1}{2} LI^2. \quad (4-93)$$

În general, dacă câmpul magnetic este produs de  $n$  bobine cuplate magnetic și parcurse de curenți variabili, neglijînd fluxurile magnetice de dispersie, se obține pentru energia magnetică expresia :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \psi_{jk} i_k. \quad (4-94)$$

Din această relație generală se deduce următoarea expresie a energiei înmagazinate în câmpul magnetic creat de două bobine cuplate magnetic, neglijând fluxul de dispersie :

$$W_m = \frac{1}{2} (\psi_{11}i_1 + \psi_{21}i_1 + \psi_{12}i_2 + \psi_{22}i_2). \quad (4-95)$$

Dacă se ține seama și de fluxurile de dispersie, relația energiei magnetice devine :

$$W_m = \frac{1}{2} (\psi_{11}i_1 + \psi_{1d}i_1 + \psi_{21}i_1 + \psi_{12}i_2 + \psi_{22}i_2 + \psi_{2d}i_2)$$

sau

$$W_m = \frac{1}{2} (\psi_1 i_1 + \psi_2 i_2), \quad (4-96)$$

unde

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{1d}, \quad \psi_2 = \psi_{22} + \psi_{2d}.$$

Relația (4-96) se mai poate scrie în forma :

$$W_m = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + L_{21} i_2 i_1 + L_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2), \quad (4-97)$$

unde se poate introduce  $L_{12} = L_{21} = M$ , cu precizarea că termenul  $M i_1 i_2$  reprezintă energia de interacțiune dintre cele două bobine. Dacă se modifică poziția relativă a celor două bobine, se schimbă valoarea inductanței reciproce, deci se schimbă energia magnetică de interacțiune.

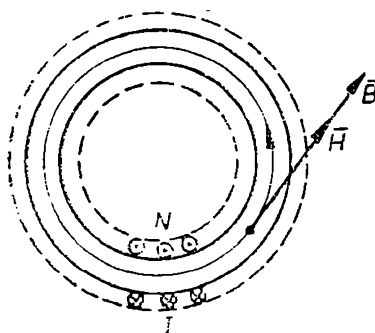


Fig. 4-42. Bobină toroidală.

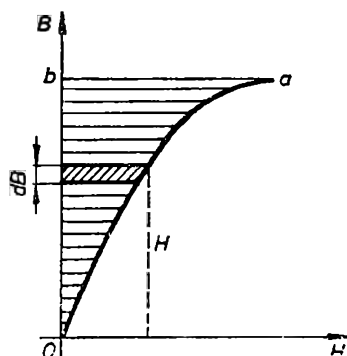


Fig. 4-43. Figură explicativă pentru calculul energiei magnetice înmagazinate într-un miez feromagnetic (în unitatea de volum).

Energia magnetică se poate exprima sub o formă mai generală, în funcție de mărimile de stare  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  ale câmpului magnetic. Se consideră în acest sens o bobină toroidală de diametru mare și secțiune neglijabilă (fig. 4-42), având  $N$  spire parcurse de curentul  $I$ . Câmpul magnetic din interiorul acestei bobine poate fi considerat ca un tub de câmp elementar cu  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  constanți în punctele secțiunii bobinei.

Conform relației (4-93), energia înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei este :

$$W_m = \frac{1}{2} \psi I = \frac{1}{2} \Phi N \frac{Hl}{N} = \frac{1}{2} HBSl,$$

unde s-a ținut seama că  $\psi = \Phi N = BSN$  și  $I = \frac{Hl}{N}$ ,  $l$  fiind lungimea bobinei, iar  $S$  secțiunea.

Volumul spațiului în care există câmp magnetic este  $O = Sl$ . Deci, energia magnetică înmagazinată în unitatea de volum este :

$$w_m = \frac{W_m}{O} = \frac{1}{2} HB \text{ [J/m}^3\text{]}$$

sau, avînd în vedere că vectorii  $\vec{H}$  și  $\vec{B}$  sînt coliniari, rezultă :

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}. \quad (4-98)$$

De aici rezultă forma generală de exprimare a energiei câmpului magnetic produs de curenți liberi :

$$W_m = \frac{1}{2} \int_0^B \vec{H} \vec{B} \, d\vec{B}. \quad (4-99)$$

Pentru câmpul produs de corpuri magnetizate (magneții permanenți) expresia energiei magnetice din unitatea de volum este :

$$w_m = \int_0^B \vec{H} \, d\vec{B} = \int_0^B H \, dB. \quad (4-100)$$

Cu această ultimă relație se determină energia înmagazinată în unitatea de volum a unui material feromagnetic magnetizat. În acest sens se ține seama de variația lui  $B$  în funcție de  $H$  reprezentată prin curba de magnetizare (fig. 4-43). Integrala  $\int_0^B H \, dB$  este reprezentată prin suprafața  $Oab$  cuprinsă între curba de magnetizare și axa verticală, care, la o anumită scară, reprezintă tocmai energia magnetică înmagazinată în unitatea de volum a materialului feromagnetic. În mod asemănător se poate arăta că pierderile prin histerezis sînt proporționale cu suprafața cuprinsă de ciclul de histerezis.

#### 4.11. FORȚE ÎN CÎMPUL MAGNETIC

În timp ce forțele determinate de câmpul electric au valori relativ mici, forțele determinate de câmpul magnetic au valori foarte importante, avînd numeroase aplicații tehnice : motoare electrice, electromagneți, relee etc. Calculul lor se face fie pe baza teoriei forțelor generalizate (forțe Lagrange), fie pe baza unor considerațiuni mai simple.

#### 4.11.1. ELEMENTE DIN TEORIA FORȚELOR GENERALIZATE ÎN CIMPUL MAGNETIC

Se consideră un sistem de  $n$  bobine cuplate magnetic, alimentate de la surse exterioare ce au t.e.m.  $u_e$ . Bilanțul energetic al sistemului considerat se exprimă prin relația :

$$\sum_{k=1}^n u_{ek} i_k dt = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt + dW_m + dL, \quad (4-101)$$

unde

$\sum_{k=1}^n u_{ek} i_k dt$  este energia primită de la sursele exterioare în timpul  $dt$  ;

$\sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt$  — energia disipată prin efect J — L ;

$dW_m$  — variația energiei magnetice a sistemului ;

$dL$  — lucrul mecanic elementar determinat de forțele ce acționează în sistem ;

$R_k$  — rezistența electrică a bobinei  $k$ .

Lucrul mecanic elementar  $dL$  se exprimă prin intermediul forței generalizate  $X$  :

$$dL = X dx, \quad (4-102)$$

unde  $x$  este coordonata generalizată, care poate fi o distanță sau un unghi. Dacă  $x$  este o distanță,  $X$  este o forță propriu-zisă iar dacă  $x$  este un unghi,  $X$  este un cuplu.

Prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff rezultă :

$$u_{ek} + u_{eLk} = R_k i_k, \quad (4-103)$$

unde  $u_{eLk}$  este t.e.m. indusă în bobina  $k$  care, conform legii inducției electromagnetice, este :

$$u_{eLk} = - \sum_{j=1}^n L_{jk} \frac{di_j}{dt} = - \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_{jk}}{dt}. \quad (4-104)$$

După înmulțirea cu  $i_k dt$  și înlocuirea lui (4-104) în (4-103), se obține relația :

$$u_{ek} i_k dt - \sum_{j=1}^n i_k d\psi_{jk} = R_k i_k^2 dt \quad (4-105)$$

care, prin însumarea pentru toate bobinele sistemului, devine :

$$\sum_{k=1}^n u_{ek} i_k dt - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i_k d\psi_{jk} = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt. \quad (4-106)$$

Din relațiile (4-101), (4-102) și (4-106) se obține

$$X dx = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i_k d\psi_{jk} - dW_m. \quad (4-107)$$

În continuare, pentru exprimarea forței generalizate  $X$ , se disting două cazuri :

a. Sub acțiunea forțelor generalizate, modificarea stării sistemului are loc în așa fel că *fluxul se păstrează constant*, ceea ce înseamnă  $d\psi_{jk}=0$ . În această situație, relația (4-107) devine :

$$X dx = -dW_m,$$

de unde

$$X = - \left( \frac{dW_m}{dx} \right)_{\Phi=\text{const.}} \quad (4-108)$$

b. Sub acțiunea forțelor generalizate modificarea din sistem are loc în așa fel încît *curentul se păstrează constant*. În acest caz relația (4-107) se poate scrie astfel :

$$X dx = d \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i_k \psi_{jk} - dW_m = dW_m,$$

unde s-a ținut seama de (4-94). Astfel, rezultă :

$$X = \left( \frac{dW_m}{dx} \right)_{i=\text{const.}} \quad (4-109)$$

Din cele prezentate mai sus referitor la teoria forțelor generalizate, reținem ca esențiale relațiile (4-108) și (4-109), cunoscute și sub denumirea de *teoreme ale forțelor generalizate în câmpul magnetic*. Dacă, în urma calculelor, rezultă pentru forța generalizată  $X$  o valoare pozitivă, aceasta acționează în sensul majorării coordonatei generalizate  $x$ . Forța generalizată negativă acționează în sensul micșorării coordonatei generalizate.

**Aplicația 4-8.** O bobină cilindrică de lungime  $l=9$  cm și raza  $r=1$  cm are  $N=400$  spire parcurse de curentul continuu  $I=0,2$  A. În interiorul bobinei este introdus pe lungimea  $x=3$  cm un miez feromagnetic cu permeabilitatea relativă  $\mu_r=1000$  (fig. 4-44). Să se calculeze :

a. Energia magnetică a sistemului.

b. Forța ce acționează asupra miezului.

Se neglijează dispersia și câmpul magnetic exterior bobinei.

**Rezolvare.** a. Energia magnetică este :

$$W_m = \frac{1}{2} \psi I = \frac{1}{2} N \Phi I,$$

unde se înlocuiește

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{NI}{R_m} = \frac{NI}{R_{m1} + R_{m2}} = \\ &= \frac{NI}{\frac{l-x}{\mu_0 S} + \frac{x}{\mu S}}, \quad S = \pi r^2 \end{aligned}$$

Fig. 4-44. Bobină cilindrică cu miez parțial introdus în interiorul său.

și rezultă :

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi r^2 (NI)^2}{l + x \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right)}.$$

Înlocuind valorile numerice, se obține  $W_m = 25,2 \cdot 10^{-6}$  J.

b. Forța ce acționează asupra miezului se calculează cu relația (4-109):

$$F = \left( \frac{dW_m}{dx} \right)_{I=\text{const.}} = - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi r^2 (NI)^2 \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right)}{\left[ l + x \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right) \right]^2}.$$

Deoarece  $\frac{1}{\mu_r} - 1 < 0$ , rezultă  $F > 0$ , adică această forță acționează în sensul majorării coordonatei Lagrange  $x$  (miezul este atras în interiorul bobinei).

Valoarea numerică a forței este:  $F = 5 \cdot 10^{-4}$  N.

#### 4.11.2. FORȚA CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA UNUI CONDUCTOR PARCURS DE CURENT, AȘEZAT ÎN CÎMPUL MAGNETIC (FORȚA MAGNETOELECTRICĂ)

Se consideră un conductor rectiliniu, de lungime  $l$ , parcurs de curentul  $I$  și situat între polii unui magnet permanent (cîmp magnetic omogen) (fig. 4-45). Forța ce acționează asupra conductorului se calculează cu formula lui Laplace:

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (4-110)$$

Sensul forței se găsește cu ajutorul regulii burghiului drept. Valoarea forței elementare este:  $dF = IB dl$ , de unde rezultă:

$$F = IBl. \quad (4-111)$$

S-a ținut seama că unghiul dintre vectorul  $d\vec{l}$ , luat în lungul conductorului în sensul curentului, și vectorul  $\vec{B}$  este  $90^\circ$  și că inducția magnetică este constantă în tot lungul conductorului.

Această forță, numită magnetoelectrică, are aplicații deosebit de importante. Pe această bază funcționează motoarele electrice, instrumentele de măsurat magnetoelectrice etc.

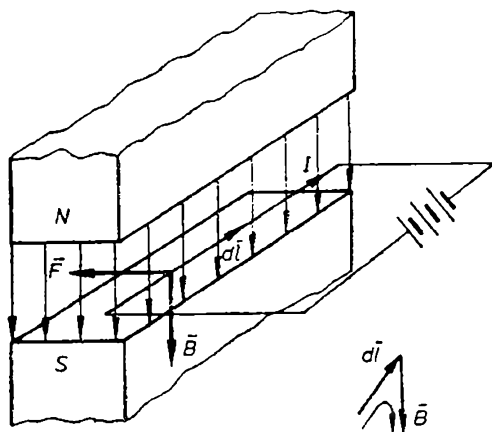


Fig. 4-45. Forța magnetoelectrică.

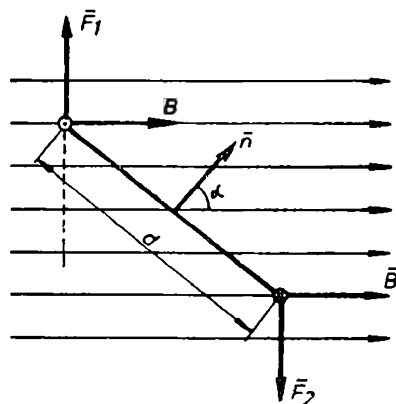


Fig. 4-46. Cuplul de rotire a unei spire dreptunghiulare parcurse de curent, situată în cîmp magnetic uniform.

**Aplicația 4-9.** Să se calculeze cuplul ce acționează asupra unei spire parcurse de curent, situată în câmp magnetic omogen.

**Rezolvare.** Se consideră o spirală dreptunghiulară, de dimensiuni  $l$  și  $d$ , parcurse de curentul  $I$  și situată într-un câmp magnetic omogen (fig. 4-46). Conform celor arătate mai sus, rezultă  $F_1 = F_2 = IBl$ . Cuplul este :

$$C = F_1 d \sin \alpha = IBl d \sin \alpha$$

sau

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B} = IS [\vec{n} \times \vec{B}], \quad (4-112)$$

unde  $IS\vec{n} = \vec{m}$  este momentul magnetic al spirei,  $S = ld$  fiind suprafața spirei, iar  $\vec{n}$  normala la suprafață, cu sensul determinat cu ajutorul regulii burghiului drept în funcție de sensul curentului prin spirală.

### 4.11.3. FORȚA DINTRE DOUĂ CONDUCTOARE PARALELE PARCURSE DE CURENT (FORȚA ELECTRODINAMICĂ)

Pentru determinarea forței dintre două conductoare paralele parcurse de curent, se consideră că unul din conductoare este așezat în câmpul magnetic produs de curentul ce trece prin celălalt conductor (fig. 4-47). Folosind relația (4-110) și cu notațiile din figură, rezultă :

$$d\vec{F}_1 = I_1 [d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2]; \quad d\vec{F}_2 = I_2 [d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1].$$

Sensul forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  se stabilește cu ajutorul regulii burghiului drept. Pentru determinarea valorilor acestor forțe se efectuează produsele vectoriale, ținând seama că unghiul dintre  $\vec{B}$  (coliniar cu  $\vec{H}$ ) și  $d\vec{l}$  este de  $90^\circ$ . Rezultă :

$$dF_1 = I_1 B_2 dl_1; \quad dF_2 = I_2 B_1 dl_2$$

sau, având în vedere că  $B_1$  și  $B_2$  sînt constanți în lungul celor două conductoare, se deduce :

$$F_1 = I_1 B_2 l; \quad F_2 = I_2 B_1 l,$$

unde  $l$  este lungimea, aceeași pentru ambele conductoare.

Ținând seama de teorema lui Biot-Savart-Laplace, rezultă :

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}; \quad B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d},$$

unde  $d$  este distanța dintre conductoare, iar  $\mu_0$  permeabilitatea magnetică a vidului (în cazul de față a aerului).

Deci, valorile forțelor pe unitatea de lungime ( $l=1$ ) sînt :

$$f_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d}; \quad f_2 = \mu_0 \frac{I_2 I_1}{2\pi d}. \quad (4-113)$$

**În concluzie,** conductoarele parcurse de curenți în același sens se atrag și se resping atunci cînd sensul curenților este opus.

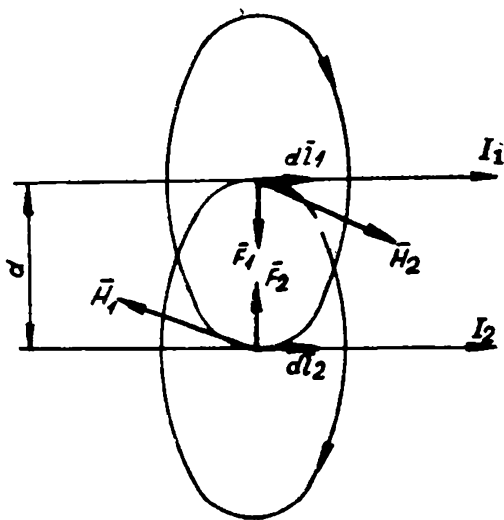


Fig. 4-47. Forța electrodinamică.



Problema prezentată are aplicații la instrumentele de măsurat de tip electrodinamic. De asemenea, pe această bază s-a stabilit și etalonul „amper” folosit în sistemul de unități MKSA ca a patra unitate fundamentală.

#### 4.11.4. ELECTROMAGNEȚI. FORȚA PORTANTĂ

Un electromagnet constă dintr-o bobină așezată pe un miez de fier (jug) și o armătură din material feromagnetic (fig. 4-48). Când prin bobină trece curent, armătura este atrasă de către electromagnet. Valoarea limită a acestei forțe, la care armătura nu se desprinde de electromagnet, se numește *forță portantă a electromagnetului*.

Determinarea expresiei de calcul a forței portante se face pe baza forțelor generalizate. Se consideră fluxul constant în secțiunea întrefierului, deci :

$$X = - \left( \frac{dW_m}{dx} \right)_{\Phi = \text{const.}}$$

Energia magnetică elementară se determină

din relația (4-99), adică :  $dW_m = \frac{1}{2} HB \, dx$ .

Admițind că intensitatea cîmpului magnetic în jug și în armătură este nulă, înseamnă că întreaga energie magnetică este înmagazinată în cîmpul magnetic din întrefier, adică :  $W_m = \frac{1}{2} HBSx$ , unde  $S$  este suprafața activă a electromagnetului iar  $x$  este întrefierul. Deci :

$$dW_m = \frac{1}{2} HBS \, dx ; \quad X = - \frac{dW_m}{dx} = - \frac{1}{2} HBS.$$

Se observă că forța generalizată este negativă, deci acționează în sensul micșorării coordonatei generalizate, adică a întrefierului  $x$ .

Forța portantă este :

$$F = |X| = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S, \quad (4-114)$$

unde s-a înlocuit  $H = \frac{B}{\mu_0}$ .

Se constată că forța portantă a electromagnetului este proporțională cu inducția magnetică la patrat. Întrucît valoarea inducției crește pe măsură ce întrefierul se micșorează, forța va fi mai mare cînd întrefierul este mai mic.

În cazul alimentării electromagnetului în curent alternativ, inducția variază sinusoidal, iar forța are variații pulsatorii, cu frecvență dublă față de frecvența de variație a curentului alternativ (fig. 4-49). Așa se explică de ce electromagneții de curent alternativ funcționează cu zgomot (vibrații).

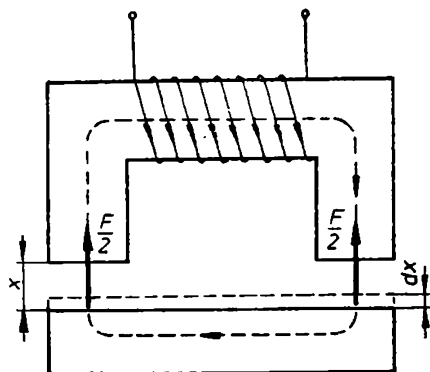


Fig. 4-48. Electromagnet.

Electromagneții au multiple aplicații în construcția aparatelor electrice (relee, contactoare etc.) și în industrie (macarale cu electromagnet, separatoare magnetice, ridicătoare de frână electromagnetice etc.).

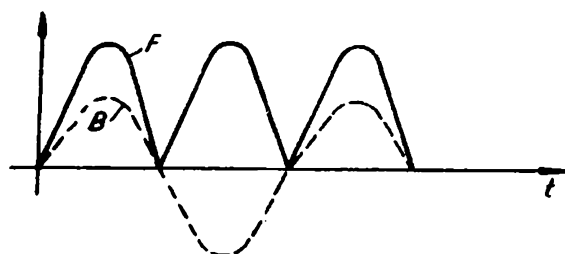


Fig. 4-49. Variația pulsatorie a forței portante la electromagnetul de c.a.

#### 4.11.5. ACȚIUNEA CÎMPULUI MAGNETIC ASUPRA UNEI SARCINI ELECTRICE ÎN MIȘCARE (FORȚA LORENTZ)

Asupra particulelor încărcate cu sarcini electrice și în stare de mișcare într-un câmp magnetic, se exercită de către câmpul magnetic o forță, cunoscută sub denumirea de *forță Lorentz*, exprimată prin relația :

$$\vec{F}_B = Q_p \vec{v} \times \vec{B} \quad (4-115)$$

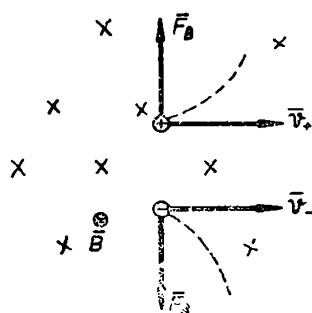
unde  $Q_p$  este sarcina electrică a particulei ;

$\vec{v}$  — viteza de mișcare a particulei în câmpul magnetic ;

$\vec{B}$  — vectorul inducției magnetice .

În fig. 4-50 este reprezentată forța  $\vec{F}_B$  pentru cazurile  $Q_p > 0$  și  $Q_p < 0$ , cu liniile lui  $\vec{B}$  perpendiculare pe planul figurii. Sub acțiunea forței lui Lorentz traiectoria de mișcare a particulelor se modifică (linia întreruptă).

Expresia forței Lorentz se poate deduce din forța



Laplace (relația 4-1) avînd în vedere că  $i = \frac{dQ_p}{dt}$ , deci :

$$\vec{F}_B = \frac{dQ_p}{dt} d\vec{l} \times \vec{B} = dQ_p \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = dQ_p \vec{v} \times \vec{B}.$$

× Dacă  $dQ_p = q$  este sarcina electronului, atunci :

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (4-116)$$

Forța Lorentz este de natură neelectrică și poate fi echivalentă cu forța determinată de un câmp electric imprimat de intensitate :

Fig. 4-50. Forța Lorentz.

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_B}{q} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (4-117)$$

În general, efectele ce se constată la corpurile conductoare și semiconductoare parcurse de curent și aflate în câmp magnetic se numesc *efecte galvanomagnetice*. Primul efect de acest gen, descoperit în 1856 de W. Thomson, este *efectul magnetorezistiv*, care constă în modificarea rezistenței electrice a corpului conductor în prezența câmpului magnetic. Pe această bază se realizează traductorul cu spirală din bismut pentru măsurarea inducției magnetice  $B$ .

În 1879, E. H. Hall descoperă efectul galvanomagnetic care îi poartă numele — *efectul Hall* — constînd în următoarele : la o placă conductoare parcursă de curent și aflată într-un cîmp magnetic, cu liniile de cîmp perpendiculare pe placă, se constată existența unei tensiuni între două puncte ale plăcii, echipotenziale în lipsa cîmpului magnetic. Fenomenul este mult mai pronun-

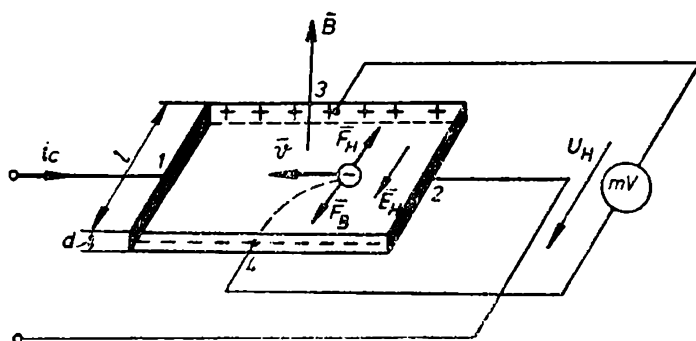


Fig. 4-51. Sonda Hall.

țat la semiconductoare decît la metale. Explicația apariției acestei tensiuni, denumită tensiune Hall, este dată de acțiunea forței Lorentz asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice în stare de mișcare ordonată din placă. În fig. 4-51 este reprezentată o astfel de placă, de dimensiuni mici (sondă Hall), situată în cîmpul magnetic de inducție  $\vec{B}$ , perpendiculară pe placă, și prevăzută cu patru electrozi : 1—2 electrozi plini, pentru curentul de comandă  $i_c$  și 3—4 electrozi punctuali pentru culegerea tensiunii Hall  $u_H$ , măsurată de milivoltmetrul  $mV$ .

Curentul  $i_c$  din sonda Hall este determinat de mișcarea ordonată, cu viteza  $\vec{v}$  a electronilor liberi. Se observă sensul forței Lorentz  $\vec{F}_B$ , care face ca pe una din fețele laterale ale sondei să se acumuleze sarcini negative și pe cea opusă sarcini electrice pozitive. Evident, sarcinile pozitive și negative de pe cele două fețe opuse determină o diferență de potențial între electrozii 3—4, adică tensiunea  $u_H$ , respectiv intensitatea  $\vec{E}_H$  a cîmpului electric în placă. Cîmpul  $\vec{E}_H$  intervine cu forța  $\vec{F}_H = q\vec{E}_H$  asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice.

Procesul de separare al sarcinilor electrice pozitive și negative continuă pînă în momentul cînd se creează echilibrul exprimat prin :  $\vec{F}_B + \vec{F}_H = 0$ , din care se obține :

$$\vec{E}_H = -\vec{E}_i = -\vec{v} \times \vec{B}. \quad (4-118)$$

În această stare de echilibru, purtătorii mobili de sarcini electrice din sondă au o traiectorie de mișcare ordonată, în linie dreaptă, cu viteza  $\vec{v}$ .

Densitatea curentului din sondă este :

$$\vec{J} = Nq\vec{v}, \quad (4-119)$$

din care se scoate  $\vec{v}$  și se înlocuiește în (4-118), rezultînd :

$$\vec{E}_H = -\frac{1}{Nq} \vec{J} \times \vec{B} = K_H \vec{J} \times \vec{B}, \quad (4-120)$$

unde  $K_H = -\frac{1}{Nq}$  este constanta Hall, dependentă de natura materialului sondei.

Tensiunea Hall se obține astfel :

$$u_H = \int_P^{P'} \vec{E}_H d\vec{l} = K_H \int_l \vec{J} \times \vec{B} d\vec{l} = K_H B \int_l \frac{i_c}{S} dl,$$

adică :

$$u_H = \frac{K_H}{d} i_c B, \quad (4-121)$$

unde  $l$  și  $d$  sînt lățimea și grosimea plăcuței. Se observă că tensiunea Hall depinde de natura materialului (prin constanta  $K_H$ ), de grosimea  $d$  a plăcuței și este direct proporțională cu valoarea curentului de comandă  $i_c$  și a inducției magnetice  $B$  (pentru așezarea plăcuței în cîmpul magnetic ca în fig. 4-51).

Sonda Hall, denumită și generatorul Hall, oferă multiple posibilități de măsurare. Spre exemplu, cu ajutorul ei se poate măsura indirect inducția magnetică  $B$ , adică, dacă se măsoară  $i_c$  și  $u_H$  și se cunosc  $K_H$  și  $d$ , rezultă din (4-121)  $B$ .

#### 4.11.6. ACCELERATOARE DE PARTICULE

În fizica nucleară se folosesc diverse tipuri de instalații cu ajutorul cărora se poate imprima o mare energie cinetică particulelor elementare stabile sau cu viață destul de lungă (electroni, protoni, ioni etc.). Accelerarea are loc prin interacțiunea dintre particulele încărcate electric și cîmpurile electric și magnetic, obținute prin mijloace exterioare. Expresia forței ce acționează asupra particulei încărcate cu sarcina  $Q_p$  este :

$$\vec{F} = Q_p (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4-122)$$

Acceleratoarele de particule se deosebesc între ele prin : forma traiectoriei imprimate particulei, natura particulelor accelerate și domeniul de energii realizate etc.

*Acceleratoarele liniare* imprimă particulelor o traiectorie aproximativ rectilinie, lipsind componenta normală pe traiectorie a inducției cîmpului magnetic.

*Acceleratoarele ciclice* imprimă particulelor o traiectorie în forma de curbă închisă sau formă de spirală. În ultimul caz, raza de curbura crește pe măsura accelerării.

Tipurile constructive de acceleratoare pot fi împărțite în următoarele patru categorii :

— acceleratoare directe, la care forța de accelerare ce acționează asupra particulelor este determinată de un cîmp electric staționar sau cvazistaționar (în raport cu timpul de tranzit al particulei prin întregul sistem de accelerare) : energia imprimate particulelor de aceste acceleratoare este de ordinul 10 MeV, iar traiectoria este rectilinie ;

— acceleratoare de inducție, la care cîmpul electric accelerator este creat de cîmpul magnetic variabil în timpul procesului de accelerare ; energia imprimate particulelor este de ordinul 10 . . . 400 MeV, iar traiectoria poate fi rectilinie sau circulară (exemplu, betatronul asigură 340 MeV) ;

— acceleratoare rezonante, la care accelerarea se realizează prin trecerea succesivă a fasciculului de particule printre electrozi alimentați cu tensiune de înaltă frecvență ; energia asigurată de astfel de acceleratoare este de ordinul

30...30 000 MeV, iar traiectoria particulelor poate fi rectilie, circulară sau spirală ;

— acceleratoare cu undă progresivă, la care accelerarea se produce sub acțiunea unei unde electromagnetice ghidate în lungul traiectoriei ; energia imprimată particulelor este de ordinul 1 000 MeV, iar traiectoria este rectilie.

Se studiază în prezent un nou tip de accelerator, bazat pe interacțiunea dintre particula accelerată și câmpul celorlalte particule.

## 4.12. LEGEA CIRCUITULUI MAGNETIC

Legea circuitului magnetic este una dintre legile fundamentale ale câmpului electromagnetic, stabilită de Maxwell pentru corpuri în repaus și completată de Hertz pentru corpuri în mișcare. Înainte de a enunța și a explica această lege, se reamintesc unele noțiuni fundamentale referitoare la câmpul electromagnetic.

Câmpul electromagnetic este o formă obiectivă de existență a materiei în mișcare, deosebită de forma substanță, al cărui mediu este constituit atât din mediile corporale, cât și din spațiul vid. Câmpul electromagnetic este cauzat de stările variabile de electrizare și magnetizare ale corpurilor și spațiului și constituie unitatea între câmpul electric variabil în timp și câmpul magnetic variabil în timp. Macroscopic, starea locală și instantanee a câmpului electromagnetic se descrie complet cu un sistem de patru mărimi vectoriale, dintre care două de natură electrică ( $\vec{E}$  și  $\vec{D}$ ) și două de natură magnetică ( $\vec{H}$  și  $\vec{B}$ ). Aceste mărimi sînt, în cazul câmpului electromagnetic, funcțiuni atât de spațiu, cât și de timp, spre deosebire de câmpul electrostatic și câmpul magnetic staționar și magnetostatic, unde sînt funcțiuni numai de spațiu.

Câmpul electromagnetic este sediul energiei electromagnetice. Spre deosebire de energia electrică (electrostatică) și energia magnetică, energia electromagnetică se propagă la distanță prin intermediul câmpului electromagnetic din spațiu, ceea ce constituie o calitate deosebit de importantă a acestei forme de energie, cu aplicații multiple în diverse domenii.

Legea circuitului magnetic exprimă legătura dintre intensitatea câmpului magnetic și curenții ce produc acest câmp. Sub formă integrală, legea precizează că, în orice moment, tensiunea magnetomotoare de-a lungul oricărei curbe închise  $\Gamma$ , situată în câmpul electromagnetic, este egală cu suma a doi termeni : primul este solenația corespunzătoare curenților de conducție care străbat suprafața deschisă  $S_\Gamma$  sprijinită pe conturul  $\Gamma$  și al doilea este derivata în raport cu timpul a fluxului electric prin aceeași suprafață, adică

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \vec{J} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \vec{D} d\vec{s}. \quad (4-123)$$

Dacă suprafața  $S_\Gamma$  este imobilă (invariabilă în timp), variația în timp a fluxului electric este determinată numai de variația în timp a inducției electrice  $\vec{D}$  în punctele suprafeței, iar legea circuitului magnetic se exprimă prin relația :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \vec{J} d\vec{s} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} \quad (4-124)$$

sau

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = i + i_D, \quad (4-125)$$

unde

$$i = \int_{S_{\Gamma}} \vec{J} d\vec{s} \quad (4-126)$$

este curentul electric de conducție prin suprafața  $S_{\Gamma}$  iar

$$i_D = \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} = \int_{S_{\Gamma}} \vec{J}_D d\vec{s} \quad (4-127)$$

este curentul electric de deplasare prin aceeași suprafață.

Introducerea curentului de deplasare  $i_D$  se datorește lui Maxwell (1862), prin care se asigură continuitatea liniilor de curent într-un circuit. Astfel, dacă

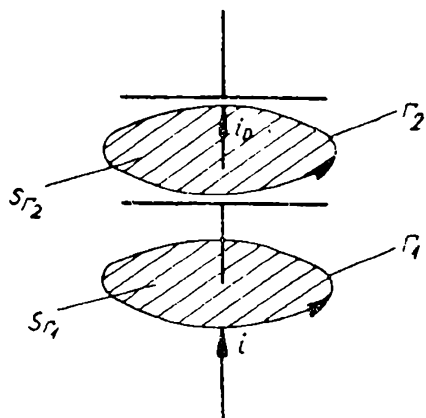


Fig. 4-52. Curentul de conducție  $i$  și curentul de deplasare  $i_D$  prin circuitul unui condensator.

se consideră în fig. 4-52 o porțiune de circuit electric care conține un condensator, parcursă de un curent variabil, în porțiunea de circuit ocupată de mediul conductor există curentul electric de conducție  $i$ , curentul de deplasare fiind neglijabil, iar în porțiunea de circuit ocupată de dielectricul condensatorului există curentul de deplasare  $i_D$ , curentul de conducție în dielectric fiind neglijabil. Pentru o suprafață  $S_{\Gamma_1}$  mărginită de conturul  $\Gamma_1$  și străbătută numai de curentul de conducție, legea circuitului magnetic conține în membrul drept numai termenul  $i$ , iar pentru suprafața  $S_{\Gamma_2}$  mărginită de conturul  $\Gamma_2$  și străbătută numai de curentul de deplasare, în membrul doi se reține numai termenul  $i_D$ .

Forma diferențială a legii circuitului magnetic, pentru corpuri în repaus, se obține

din forma integrală (4-124) prin transformarea integralei de linie în integrală de suprafață (teorema lui Stokes), adică :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_{\Gamma}} \text{rot } \vec{H} d\vec{s} = \int_{S_{\Gamma}} \vec{J} d\vec{s} + \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} = \int_{S_{\Gamma}} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s},$$

de unde rezultă :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4-128)$$

Această relație este cunoscută și sub denumirea de *ecuația I-a a lui Maxwell pentru câmpul electromagnetic*.

Pentru corpuri în stare de mișcare, legea circuitului magnetic obține formele integrală și diferențială dezvoltate, care pot fi studiate din tratatele de specialitate.

Întrucât legea circuitului magnetic stă la baza calculelor de proiectare a circuitelor magnetice ce intervin în construcția mașinilor și aparatelor electrice, sînt necesare anumite precizări privind aplicarea ei.

1. În regim staționar  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$  (sau  $i_D = 0$ ), iar legea circuitului magnetic obține forma particulară denumită teorema lui Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \int_{S_{\Gamma}} \bar{J} d\bar{s}. \quad (4-129)$$

Această relație este folosită la calculul circuitelor magnetice excitate de c.c., așa cum s-a arătat la paragrafele anterioare.

2. În regim cvasistaționar  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cong 0$ , adică curentul de deplasare prin orice suprafață mărginită de un contur este neglijabil (exceptând situația când suprafața intersectează dielectricul unui condensator). Regimul cvasistaționar înglobează și circuitele magnetice excitate în c.a. de joasă și medie frecvență. Așa că, și la calculul acestor circuite, legea se exprimă sub aceeași formă ca în regim staționar (relația 4-129).

**Aplicația 4-10.** Se consideră în fig. 4-53 circuitul magnetic al unei mașini de c.c., compus din : jugul statoric, miezul polilor de excitație, miezul rotorului și întrefier. Bobina de excitație pentru o pereche de poli de excitație are  $N$  spire și este parcursă de curentul  $I_e$ . Să se explice aplicarea legii circuitului magnetic pentru acest caz.

**Rezolvare.** Circuitul magnetic considerat se compune din mai multe porțiuni omogene în serie, cu următoarele lungimi medii și secțiuni :  $l_s, S_s$  — jugul statoric ;  $l_p, S_p$  — polul de excitație (inclusiv piesele polare) ;  $\delta, S_{\delta}$  — întrefierul ;  $l_r, S_r$  — jugul rotorului. Conturul de integrare  $\Gamma$  din relația (4-129) se compune din aceste lungimi medii, confundându-se cu traseul unei linii de cîmp magnetic. Cîmpul magnetic din fiecare porțiune de circuit se consideră uniform.

În aceste condiții, t.m.m. din membrul stîng al relației (4-129) se descompune în termeni de forma  $Hl$  corespunzători fiecărei porțiuni de circuit, iar membrul drept reprezintă solenația totală, corespunzătoare bobinelor de excitație de pe cei doi poli. Deci, legea circuitului magnetic se scrie în forma :

$$H_s l_s + 2H_p l_p + 2H_{\delta} \delta + H_r l_r = NI_e. \quad (4-130)$$

Evident, amperspirele totale  $NI_e$  se compun din amperspirele necesare pentru magnetizarea fiecărei porțiuni de circuit, dintre care cele corespunzătoare întrefierului au valoarea cea mai mare.

Dacă se consideră cunoscute dimensiunile geometrice ale circuitului, fluxul magnetic în întrefier, precum și curba de magnetizare a materialelor feromagnetice folosite, calculul amperspirelor de excitație se face după următorul procedeu, prezentat sumar :

— pentru întrefier :

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = \frac{\Phi_{\delta}}{\mu_0 S_{\delta}}, \quad H_{\delta} \delta = (NI_e)_{\delta};$$

— pentru miezul polilor :

$$B_p = \frac{\Phi_p}{S_p} = \frac{\Phi_{\delta}}{S_p} \rightarrow H_p \text{ (din curba de}$$

magnetizare),  $H_p l_p = (NI_e)_p$ ;

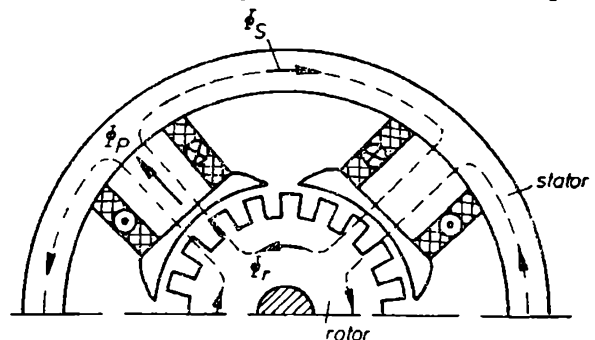


Fig. 4-53. Circuitul magnetic al unei mașini electrice.

— pentru jugul statoric :

$$B_s = \frac{\Phi_s}{S_s} = \frac{\Phi_\delta}{2S_s} \rightarrow H_s \text{ (din curba de magnetizare), } H_s l_s = (NI_s)_s ;$$

— pentru miezul rotoric :

$$B_r = \frac{\Phi_r}{S_r} = \frac{\Phi_\delta}{2S_r} \rightarrow H_r \text{ (din curba de magnetizare), } H_r l_r = (NI_r)_r ;$$

$$NI_e = (NI_e)_s + 2 (NI_e)_p + 2 (NI_e)_\delta + (NI_e)_r.$$

S-au neglijat dispersia, precum și influența dinților și creștăturilor din rotor.

## 4.13. LEGEA INDUCȚIEI ELECTROMAGNETICE

Legea inducției electromagnetice este, ca și legea circuitului magnetic, una din legile fundamentale ale câmpului electromagnetic, formulată de Maxwell și Hertz. Înainte de a enunța și explica această lege, se fac câteva considerațiuni asupra fenomenului de inducție electromagnetică descoperit de Faraday (1831).

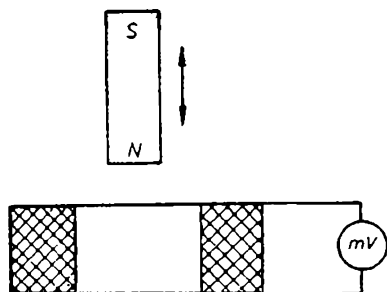


Fig. 4-54. Magnet permanent în mișcare relativă față de o bobină.

Se consideră o bobină, avînd la borne legat un milivoltmetru, în interiorul căreia se introduce și se scoate un magnet permanent (fig. 4-54). Se constată următoarele :

— fiecare mișcare relativă între bobină și magnetul permanent este însoțită de o deviație a milivoltmetrului ;

— deviația milivoltmetrului este cu atît mai mare cu cît viteza de deplasare relativă dintre magnet și bobină este mai mare ;

— sensul de deviație a milivoltmetrului se schimbă cînd magnetul se apropie, respectiv se îndepărtează de bobină.

Această experiență simplă dovedește existența unui fenomen nou, denumit *inducție electromagnetică*, prin care în bobină ia naștere o tensiune electromotoare indusă, măsurată de milivoltmetru. Se pot concepe și alte experiențe prin care se scoate în evidență acest fenomen. De exemplu, dacă se consideră două bobine vecine (cuplate magnetic) din care una este parcursă de un curent variabil în timp, se constată că în a doua apare o tensiune electromotoare indusă (v. transformatorul electric).

Generalizînd observațiile experimentale, se poate preciza că, ori de cîte ori suprafața mărginită de un contur este străbătută de un flux magnetic variabil în timp, în lungul conturului apare o tensiune electromotoare indusă. Dacă conturul considerat urmărește un circuit electric închis, t.e.m. indusă dă naștere unui curent electric (curent indus) în circuit.

Legea inducției electromagnetice exprimată sub formă integrală precizează că tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur  $\Gamma$  închis este egală cu derivata în raport cu timpul, luată cu semn schimbat, a fluxului magnetic prin suprafața  $S_\Gamma$  ce se sprijină pe contur :

$$u_{e\Gamma} = - \frac{d\Phi_{S\Gamma}}{dt} . \quad (4-131)$$



Semnul minus din această relație este legat de sensul tensiunii electromotoare induse, stabilit de către Lenz. Conform *regulii lui Lenz*, sensul tensiunii electromotoare induse este în așa fel încît curentul determinat prin circuit de această tensiune creează un flux magnetic ce se opune variațiilor fluxului inițial (efectul se opune cauzei). Pentru clarificarea acestei reguli, se consideră în fig. 4-55 o spiră prin suprafața căreia există un flux magnetic  $\Phi$  va-

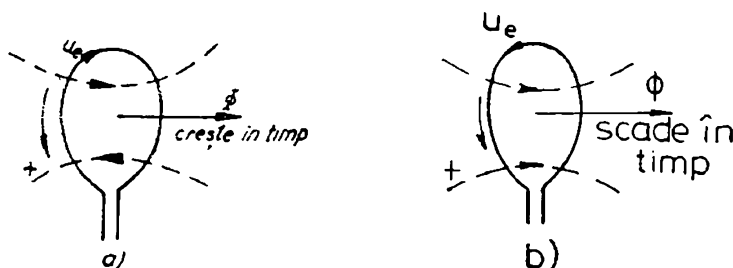


Fig. 4-55. Sensul t.e.m. induse.

riabil în timp. Dacă  $\Phi$  crește în timp (fig. 4-55, a), atunci  $d\Phi > 0$ , iar din relația (4-124) rezultă  $u_e < 0$ , deoarece întotdeauna  $dt > 0$ . Adică, t.e.m. are sens negativ față de sensul pozitiv din spiră stabilit cu ajutorul regulii burghiului drept, în funcție de sensul liniilor cîmpului magnetic (sensul fluxului). Curentul determinat în spiră de t.e.m. indusă dă naștere unui cîmp magnetic cu sensul liniilor opus față de  $\Phi$  (se opune creșterii lui  $\Phi$ ). Dacă  $\Phi$  scade în timp (fig. 4-55, b), atunci  $d\Phi < 0$  iar  $u_e > 0$ . În acest caz, curentul determinat de t.e.m. indusă dă naștere unui cîmp magnetic cu sensul liniilor în direcția lui  $\Phi$  (se opune scăderii lui  $\Phi$ ).

Deoarece fluxul magnetic este :

$$\Phi_{S_T} = \int_{S_T} \vec{B} d\vec{s} = \int_{S_T} \mu \vec{H} d\vec{s}, \quad (4-132)$$

rezultă că variația în timp a acestui flux poate fi cauzată de :

- variația în timp a intensității cîmpului magnetic  $\vec{H}$  ;
- variația în timp a permeabilității magnetice  $\mu$  ;
- variația în timp a suprafeței  $S_T$ .

Primele două cauze determină variația în timp a inducției magnetice  $\vec{B}$ . Prin variația în timp a suprafeței  $S_T$  trebuie înțeles atît variația mărimei acestei suprafețe, cît și variația orientării sale în cîmpul magnetic ( $d\vec{s}$  este vector). Pe baza acestor observații, se disting următoarele două situații în care se induce tensiunea electromotoare.

1. Inducția magnetică  $\vec{B}$  este variabilă în timp, iar conturul (spira) este fixă în spațiu. În acest caz, t.e.m. indusă este :

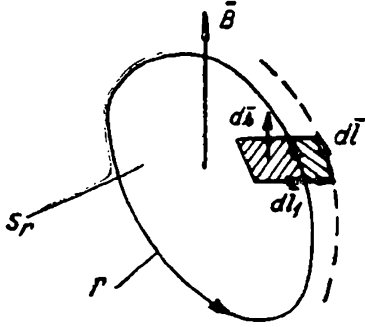
$$u_{e1} = \left( - \frac{d\Phi_{S_T}}{dt} \right)_{S_T = \text{const.}} = - \int_{S_T} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}. \quad (4-133)$$

Această tensiune electromotoare indusă se mai numește și *tensiune de pulsație*.

2. Inducția magnetică  $\vec{B}$  este constantă în timp, iar conturul (spira) în mișcare. În această situație :

$$u_{e2} = \left( - \frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \right)_{B=\text{const.}} = - \int_{S_\Gamma} \vec{B} \frac{d}{dt} \{d\vec{s}\},$$

unde, pentru a găsi expresia derivatei  $\frac{d}{dt} \{d\vec{s}\}$ , se consideră în fig. 4-56 o spirală rigidă în mișcare, astfel că elementul de suprafață  $d\vec{s} = d\vec{l}_1 \times d\vec{l} = -d\vec{l} \times d\vec{l}_1$  variază în timp numai datorită variației lui  $d\vec{l}_1$ . Deci :



$$\frac{d}{dt} \{d\vec{s}\} = -d\vec{l} \times \frac{d\vec{l}_1}{dt} = -d\vec{l} \times \vec{v},$$

unde  $\vec{v} = \frac{d\vec{l}_1}{dt}$  este viteza de translație a elementului  $d\vec{l}$  de pe contur. Înlocuind acest rezultat în expresia t.e.m.  $u_{e2}$ , se obține :

$$u_{e2} = \oint_{\Gamma} \vec{B} [d\vec{l} \times \vec{v}] = \oint_{\Gamma} [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}, \quad (4-134)$$

Fig. 4-56. Spiră în mișcare în câmp magnetic constant.

unde s-a ținut seama că în produsul mixt a vectorilor  $\vec{B}$ ,  $d\vec{l}$  și  $\vec{v}$  se pot face permutări circulare ale poziției vectorilor. Această t.e.m. se mai numește și *tensiune indusă prin mișcare*.

În general, când avem atât o variație în timp a inducției magnetice, cât și o mișcare a conturului (corpurilor), t.e.m. indusă are expresia :

$$u_{e\Gamma} = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} + \oint_{\Gamma} [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}. \quad (4-135)$$

Această relație exprimă totodată și legea inducției electromagnetice sub formă integrală dezvoltată.

Exprimarea sub formă diferențială a legii inducției electromagnetice se poate obține din relația (4-135) având în vedere că :

$$u_{e\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l}, \quad (4-136)$$

unde  $\vec{E}$  este intensitatea câmpului electric ce apare în fenomenul inducției electromagnetice. De asemenea, se ține seama de teorema lui Stokes prin care o integrală de linie se transformă în integrală de suprafață. Astfel, se obține :

$$\int_{S_\Gamma} \text{rot } \vec{E} d\vec{s} = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} + \int_{S_\Gamma} \text{rot } [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{s},$$

de unde rezultă expresia diferențială a legii inducției electromagnetice :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (4-137)$$

În cazul particular al corpurilor în stare de repaus ( $\vec{v}=0$ ), situate într-un câmp magnetic variabil în timp, rezultă :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4-138)$$

Pentru cazul corpurilor în mișcare într-un câmp magnetic constant ( $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ), se obține :

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (4-139)$$

Relația (4-138) este cunoscută sub denumirea de *ecuația a II-a a lui Maxwell pentru câmpul electromagnetic*.

Se prezintă în continuare câteva exemple de calcul a t.e.m. induse.

**Tensiunea electromotoare indusă într-o bobină** situată într-un câmp magnetic variabil în timp este :

$$u_e = -\frac{d\psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4-140)$$

unde  $N$  este numărul de spire al bobinei, iar  $\psi = N\Phi$  este înălțuirea magnetică.

Dacă prin spirele bobinei trece un curent  $i$  variabil în timp, acest curent creează în bobină un câmp magnetic de asemenea variabil în timp. În această situație, în bobină apare o t.e.m. indusă, denumită t.e.m. de autoinducție, care se calculează în modul următor :

$$u_e = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}, \quad (4-141)$$

unde s-a introdus  $\psi = Li$ ,  $L$  fiind inductanța proprie a bobinei, constantă.

**Tensiunile electromotoare induse în bobinele unui transformator.** Se consideră bobinele primară și secundară ale unui transformator electric avînd

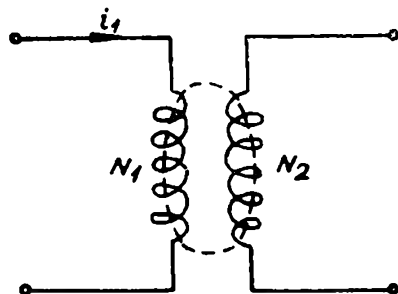


Fig. 4-57. Bobinele unui transformator electric.

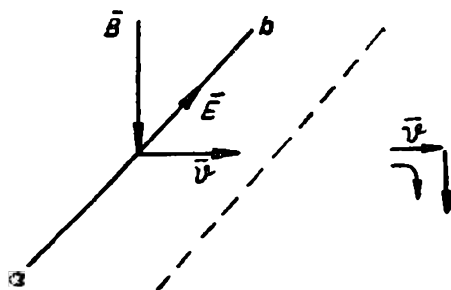


Fig. 4-58. Conductor mobil în câmp magnetic constant.

numărul de spire  $N_1$  și  $N_2$  (fig. 4-57). Dacă prin bobina primară trece un curent  $i_1$  variabil în timp, datorită câmpului magnetic variabil ce ia naștere, în cele două bobine se vor induce tensiunile electromotoare :

$$u_{e1} = -\frac{d\psi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad u_{e2} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{di_1}{dt}, \quad (4-142)$$

unde  $L_1$  este inductanța proprie a bobinei primarului, iar  $L_{12}$  este inductanța reciprocă (mutuală) dintre bobina primară și cea secundară.

**Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor** ce se mișcă cu viteză constantă într-un câmp magnetic omogen (fig. 4-58). Intensitatea câmpului electric indus, conform relației (4-139) este :

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

Sensul vectorului  $\vec{E}$  se stabilește cu regula burghiului drept. T.e.m. indusă este :

$$u_e = \int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \int_a^b [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}$$

de unde, avînd în vedere că  $\vec{B} = \text{const.}$ ,  $\vec{v} \perp \vec{B}$  și  $d\vec{l}$  coliniar cu vectorul  $\vec{v} \times \vec{B}$ , rezultă :

$$u_e = vBl, \quad (4-143)$$

în care  $l$  este lungimea conductorului.

Dacă conductorul se mișcă în câmp fără să întretaie liniile câmpului magnetic, atunci  $u_e = 0$  deoarece fie că  $\vec{v} \times \vec{B} = 0$ , fie că  $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$  este perpendicular pe conductor, adică pe  $d\vec{l}$ .

**Aplicația 4-11.** Un conductor filiform și rectiliniu, de lungime foarte mare, este parcurs de curentul cu variație sinusoidală în timp,  $i(t) = I_m \sin \omega t$ . În planul conductorului se găsește o spirală dreptunghiulară, avînd lățimea  $b$  și lungimea  $h$ , cu una din laturi la distanța  $a$  de conductor (fig. 4-59). Să se determine :

- T.e.m. indusă în spirală ;
- Inductanța mutuală între conductor și spirală.

**Rezolvare.** a. Liniile câmpului magnetic sînt perpendiculare pe suprafața spirei. Cu legea circuitului magnetic (4-129) se calculează intensitatea  $\vec{H}$  a câmpului magnetic determinat de curentul  $i(t)$  într-un punct al suprafeței plane a spirei, situat la distanța  $r$  de conductor :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = i(t), \quad H 2\pi r = i(t), \quad H = \frac{i(t)}{2\pi r}.$$

Inducția magnetică în același punct este :

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{i(t)}{2\pi r}.$$

Pentru calculul fluxului magnetic prin suprafața spirei, se consideră suprafața elementară  $ds = h dr$  pentru care se obține :

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{s} = B ds = \mu_0 \frac{i(t)}{2\pi r} h dr.$$

Prin integrare, pentru întreaga suprafață, rezultă :

$$\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} i(t) \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} i(t) \ln \frac{a+b}{a}.$$

Fig. 4-59. Conductor drept, parcurs de curent variabil și spira dreptunghiulară în planul conductorului.

T.e.m. indusă în spirală se obține din legea inducției electromagnetice scrisă în forma (4-133), adică :

$$u_e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \frac{di(t)}{dt} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \omega I_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (4-144)$$

b. Inductanța mutuală între conductor (1) și spirală (2) este :

$$L_{12} = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}. \quad (4-145)$$

**Aplicația 4-12.** Un disc din aluminiu de rază  $r_0$  se rotește într-un câmp magnetic omogen cu viteza unghiulară  $\omega$ , discul fiind perpendicular pe liniile câmpului magnetic (fig. 4-60). Să se determine t.e.m. indusă în disc.

**Rezolvare.** Intensitatea câmpului electric indus, într-un punct situat la distanța  $r$  de axă, este :  $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ . Vectorul  $\vec{E}$  este orientat spre periferia discului. T.e.m. indusă se calculează cu relația (4-134), ținând seama că  $d\vec{l} = d\vec{r}$  este elementul de linie luat în lungul razelor, în sensul lui  $\vec{E}$ , iar unghiul dintre vectorii  $\vec{v}$  și  $\vec{B}$  este  $90^\circ$ . Se obține :

$$u_e = \int v B dl = \int_0^{r_0} r \omega B dr = \omega B \int_0^{r_0} r dr,$$

adică :

$$u_e = \frac{1}{2} \omega r_0^2 B, \quad (4-146)$$

unde s-a introdus  $v = \omega r$ .

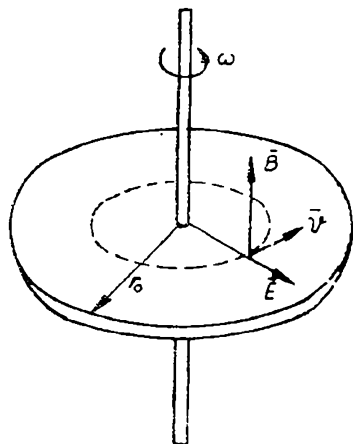


Fig. 4-60. Disc metalic rotitor în câmp magnetic constant.

## 4.14. CURENȚI TURBIONARI

Atunci când într-o piesă metalică masivă există un câmp magnetic variabil în timp, sau când piesa se mișcă într-un câmp magnetic constant, în piesa respectivă se induc tensiuni electromotoare care dau naștere la curenți electrice, numiți *curenți turbionari*, sau *curenți Foucault* (fig. 4-61, a). În concret, curenții turbionari există în circuitele magnetice ale mașinilor și aparatelor electrice de c.a., în miezul rotorului mașinilor de c.c., provocând pierderi de

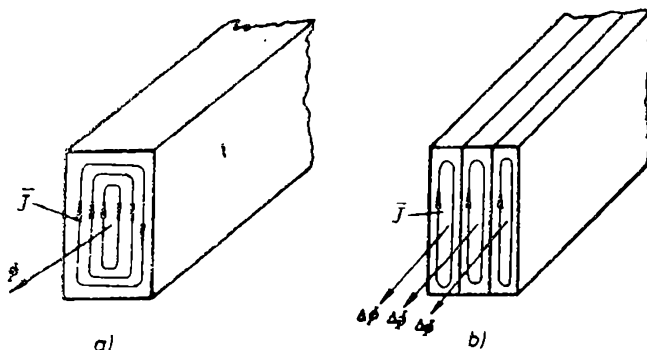


Fig. 4-61. Curenții turbionari în miezul feromagnetic masiv (a) și realizat din tole (b).

putere prin efect Joule-Lenz și înrăutățind parametrii de funcționare. Există și aplicații utile ale curenților turbionari, la tratamentele termice prin curenți de inducție, la cuptoarele cu inducție folosite la topirea metalelor, la frânele electromagnetice etc.

Pentru a micșora curenții turbionari, respectiv pierderile determinate de aceștia, se folosește metoda de a confecționa miezurile feromagnetice din tole subțiri, de 0,35 sau 0,5 mm, izolate între ele cu lac sau hirtie (fig. 4-61, b).

Miezurile bobinelor de medie frecvență se realizează din pulbere feromagnetică presată cu un material liant (miezuri de tip permalloy). Prin aceasta se majorează rezistența electrică a circuitului prin care se închid curenții turbionari, respectiv se micșorează intensitatea acestor curenți, deci scad pierderile care sînt proporționale cu patratul intensității curentului.

Pierderile sub formă de căldură datorate curenților turbionari se pot calcula cu relația :

$$p_F = \sigma_F (fB\Delta)^2 \text{ [W/kg]}, \quad (4-147)$$

unde  $f$  este frecvența de variație a cîmpului magnetic, în  $\text{Hz}$  ;

$B$  — valoarea maximă a inducției magnetice, în  $\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$  ;

$\Delta$  — grosimea tolelor, în m ;

$\sigma_F$  — un coeficient de pierderi, a cărui valoare variază între 2,2 și 4,8, în funcție de calitatea tolelor.

## 4.15. ENERGIA ȘI PUTEREA ELECTROMAGNETICĂ

Energia electromagnetică aparține cîmpului electromagnetic. Ceea ce este caracteristic acestei forme de energie, este faptul că se propagă la distanță, prin spațiu, cu viteza dată de relația :

$$v_u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4-148)$$

$$\text{În vid } \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ și } v_{u0} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Cîmpul electromagnetic fiind unitatea dintre cîmpul electric variabil în timp și cîmpul magnetic variabil în timp, energia electromagnetică constă din oscilația permanentă între energia electrică și energia magnetică. Cînd energia electrică crește în raport cu timpul, energia magnetică scade, și invers, astfel încît suma lor rămîne mereu constantă, neglijînd bineînțeles pierderile.

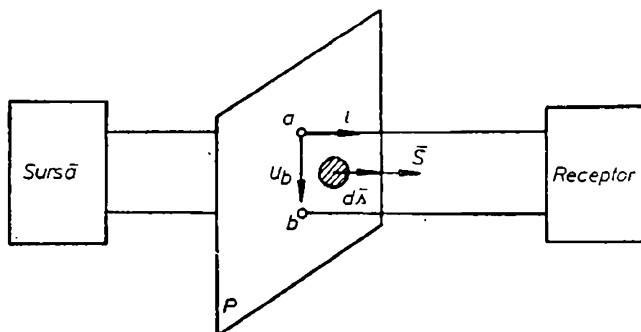


Fig. 4-62. Transmiterea energiei electromagnetice printr-o linie de transport.

În fig. 4-62 se consideră o linie de transport de energie în curent alternativ monofazat. În spațiul înconjurător celor două conductoare apare un câmp electric și un câmp magnetic variabile în timp (câmp electromagnetic). Spectrul liniilor celor două câmpuri la un moment dat, cu intensitățile câmpului electric  $\vec{E}$  și a câmpului magnetic  $\vec{H}$  tangente la aceste linii, este reprezentat în fig. 4-63. Cei doi vectori  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sînt perpendiculari între ei în orice moment și în orice punct din spațiu.

Pentru studiul și calculul transmiterii la distanță a energiei electromagnetice se folosește vectorul Poynting :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (4-149)$$

care reprezintă energia electromagnetică ce străbate unitatea de suprafață, perpendiculară pe direcția de propagare, în unitatea de timp, adică reprezintă puterea electromagnetică prin unitatea de suprafață. Pentru explicare, se consideră linia monofazată prin care energia electromagnetică se transmite de la sursă la receptor. Trebuie reținut faptul că energia electromagnetică se transmite prin câmpul electromagnetic existent în spațiul înconjurător celor două conductoare ale liniei, vectorul Poynting fiind orientat de la sursă spre consumator.

Energia electromagnetică care străbate în unitatea de timp suprafața extinsă la infinit a planului  $P$ , perpendiculară pe cele două conductoare, adică puterea electromagnetică, se obține din relația :

$$p = \int_S \vec{S} \, d\vec{s} = \int_{l_E} \int_{l_H} (\vec{E} \times \vec{H}) (d\vec{l}_E \times d\vec{l}_H), \quad (4-150)$$

unde s-a ținut seama de relația (4-149) și s-a avut în vedere că  $d\vec{s} = d\vec{l}_E \times d\vec{l}_H$ ,  $d\vec{l}_E$  și  $d\vec{l}_H$  fiind elemente din liniile câmpurilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  (fig. 4-63).

Făcînd uz de unele cunoștințe din analiza vectorială și avînd în vedere că  $\vec{E}$  este perpendicular pe  $d\vec{l}_H$  și  $\vec{H}$  este perpendicular pe  $d\vec{l}_E$  relația (4-150) devine :

$$p = \int_{l_E} \vec{E} \, d\vec{l}_E \oint_{l_H} \vec{H} \, d\vec{l}_H = u_b i, \quad (1-151)$$

unde  $u_b = \int_{l_E} \vec{E} \, d\vec{l}_E = \int_a^b \vec{E} \, dl$  este tensiunea dintre cele două conductoare ale liniei, iar  $i = \oint_{l_H} \vec{H} \, d\vec{l}_H$  este curentul electric al liniei.

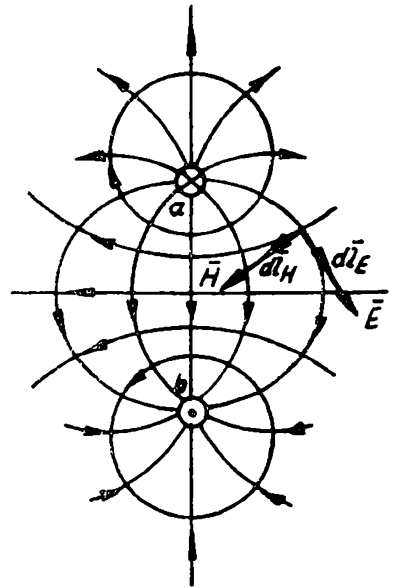


Fig. 4-63. Liniile câmpurilor electric și magnetic.

## Capitolul 5

### CIRCUITE MONOFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

#### 5.1. NOȚIUNI ASUPRA MĂRIMILOR CU VARIAȚIE PERIODICĂ ÎN TIMP

##### 5.1.1. MĂRIMI PERIODICE, ALTERNATIVE ȘI SINUSOIDALE. FAZA ȘI DEFAZAJUL

În aplicațiile practice ale fenomenelor electrice și magnetice se întâlnesc cazuri cînd tensiunile, curenții, inducțiile magnetice etc., sînt mărimi periodice. Spre exemplu, tensiunea electrică  $u$  este cu variație periodică în raport cu timpul  $t$  dacă :

$$u(t) = u(t+T) = u(t+2T) = \dots = u(t+kT), \quad (5-1)$$

unde  $T$  se numește *perioadă* și reprezintă intervalul de timp minim după care tensiunea trece prin aceleași valori (fig. 5-1). *Frecvența de variație*  $f$  reprezintă numărul de perioade cuprinse în unitatea de timp (într-o secundă), și se măsoară în hertzi [Hz]:

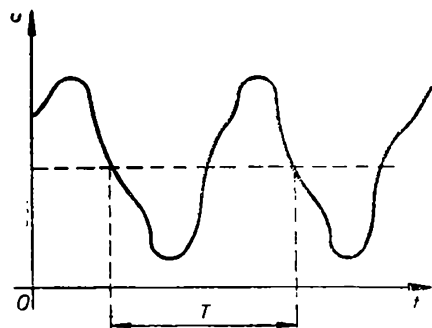


Fig. 5-1. Tensiune cu variație periodică, pulsatorie, în timp.

$$f = \frac{1}{T}. \quad (5-2)$$

Mărimile periodice se numesc *pulsatorii* dacă toate valorile sale sînt de un singur semn (fig. 5-1). Mărimile periodice sînt *alternative* dacă de-a lungul unei perioade își schimbă semnul.

Mărimile periodice alternative sînt simetrice dacă obțin, după o jumătate de perioadă, aceeași valoare, însă cu semn schimbat:  $u(t) = -u\left(t + \frac{T}{2}\right)$ . Dacă această relație nu este satisfăcută, mărimea respectivă este nesimetrică.

Mărimea  $u(t)$  este pară dacă  $u(t) = u(-t)$  și este impară dacă  $u(t) = -u(-t)$ .

Funcțiile periodice alternative, după care variază mărimile electrice și magnetice, sînt sinusoidale sau nesinusoidale. Cele nesinusoidale pot fi descompuse, cu ajutorul seriei Fourier, în funcții periodice de sinusuri și cosinusuri, de diferite frecvențe, denumite *armonice*. O funcție cu variație sinusoidală în timp se scrie sub forma :

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha), \quad (5-3)$$



în care,

$u$  este valoarea instantanee (sau momentană) a mărimii sinusoidale, adică valoarea pe care mărimia o are la un moment dat (se notează cu literă mică),

$U_m$  — valoarea maximă, sau amplitudinea (se notează cu literă mare și indicele  $m$ ),

$\omega = 2\pi f$  — pulsația, sau frecvența unghiulară, măsurată în radiani/secundă,

$\alpha$  — faza inițială.

Prin *faza* unei mărimi cu variație sinusoidală în timp se înțelege valoarea argumentului funcțiunii respective. De exemplu, pentru funcția (5-3), faza este:  $\omega t + \alpha$ . Valoarea fazei în momentul inițial ( $t=0$ ) se numește *fază inițială*, care determină valoarea funcției în acest moment:  $U_m \sin \alpha$ .

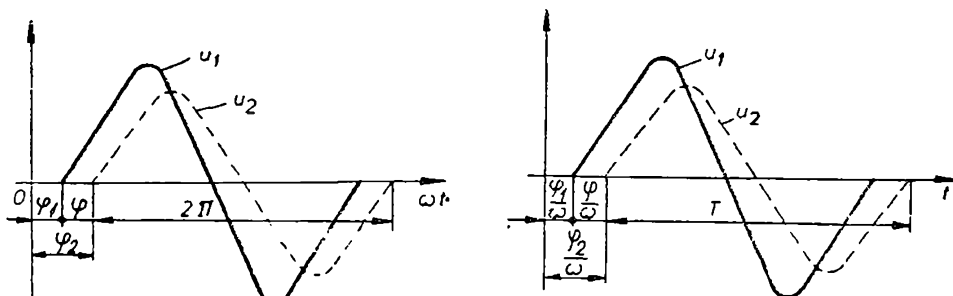


Fig. 5-2. Tensiuni sinusoidale defazate.

Defazajul dintre două mărimi sinusoidale cu aceeași pulsație se exprimă prin diferența fazelor lor. Dacă ne referim, spre exemplu, la mărimile sinusoidale  $u_1 = U_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1)$ ,  $u_2 = U_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2)$ , reprezentate în fig. 5-2, defazajul dintre ele este:

$$\varphi = (\omega t - \varphi_1) - (\omega t - \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (5-4)$$

Cu alte cuvinte, două mărimi sinusoidale cu aceeași perioadă sînt defazate între ele dacă nu obțin simultan valoarea maximă, respectiv valoarea minimă. În cazul din fig. 5-2, tensiunea  $u_2$  este defazată în urmă față de tensiunea  $u_1$  deoarece mai întîi trece prin valoarea maximă pozitivă tensiunea  $u_1$  și apoi trece prin valoarea maximă pozitivă tensiunea  $u_2$ , în timpul perioadei  $T$ .

Două mărimi sinusoidale sînt în fază dacă obțin simultan valoarea maximă, respectiv minimă, adică defazajul dintre ele este nul ( $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi = 0$ ). Deci fazele inițiale ale acestor mărimi sînt egale ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ).

Dacă cele două mărimi sinusoidale se anulează simultan dar, în timp ce una este maximă, a doua este minimă, ele sînt în opoziție de fază, defazajul lor fiind:  $\varphi = \pm \pi$ .

Două mărimi sinusoidale sînt în cuadratură dacă în timp ce una din mărimi se anulează, a doua trece prin maxim sau minim, defazajul lor fiind:

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Dacă pe axa absciselor se reprezintă valorile timpului  $t$ , defazajul se exprimă prin  $\frac{\varphi}{\omega}$  (fig. 5-2, b), adică se măsoară în unități de timp. Timpul de defazaj este zero în cazul mărimilor ce sînt în fază, este  $\frac{T}{2}$  pentru mărimile în opoziție și  $\frac{T}{4}$  la mărimile în cuadratură.

### 5.1.2. PRODUCEREA UNEI TENSIUNI ELECTROMOTOARE SINUSOIDALE

O tensiune electromotoare sinusoidală se obține prin fenomenul de inducție electromagnetică în generatoarele de tensiune alternativă montate în centralele electrice. În fig. 5-3 este redat, schematic, principiul de funcționare al unui generator de tensiune sinusoidală. Înfășurarea rotorică este redusă

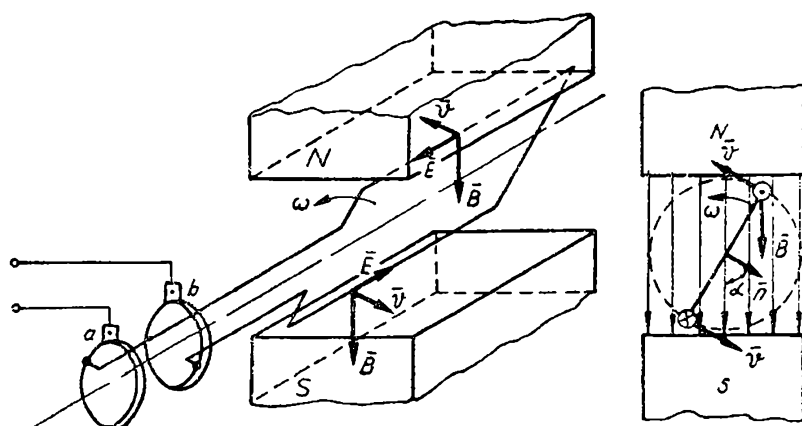


Fig. 5-3. Spiră rotitoare în câmp magnetic uniform.

la o singură spirală ale cărei extremități sînt legate la două inele colectoare pe care glisează două perii,  $a$  și  $b$ , legate la borne. Spira, de formă dreptunghiulară, este rotită cu viteza unghiulară  $\omega$ , constantă, într-un câmp magnetic omogen de inducție  $\vec{B}$ , creat de poli  $N$  și  $S$  ai unui magnet permanent. Rotirea spirei se face în jurul axei sale, care este perpendiculară pe direcția liniilor de câmp. Unghiul  $\alpha$ , format de liniile lui  $\vec{B}$  și normala  $\vec{n}$  la planul spirei, este variabil în timp:  $\alpha = \omega t$ .

Suprafața  $S$  a spirei este străbătută de fluxul magnetic variabil în timp :

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{s} = BS \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t. \quad (5-5)$$

Cînd  $\cos \omega t = 1$  ( $\alpha = \omega t = 0$ ), fluxul prin suprafața spirei are valoare maximă  $\Phi_m = BS$ .

Tensiunea electromotoare indusă în spirală și colectată de periiile  $a$  și  $b$ , conform legii inducției electromagnetice, este :

$$u_e = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin \omega t = U_{em} \sin \omega t. \quad (5-6)$$

Prin urmare, t.e.m. indusă are o variație sinusoidală în timp, avînd amplitudinea :

$$U_{em} = \omega BS. \quad (5-7)$$

Variația în timp a fluxului inductor (relația 5-5) și a t.e.m. induse (relația 5-7) sînt reprezentate în fig. 5-4. Se remarcă faptul că fluxul este defazat înainte cu  $\frac{\pi}{2}$  față de t.e.m. indusă.

### 5.1.3. VALORI EFECTIVE ȘI MEDII ALE CURENȚILOR ȘI TENSIUNILOR SINUSOIDALE

Valoarea efectivă a curentului (tensiunii) cu variație sinusoidală în timp se definește pe baza efectului termic după cum urmează : valoarea efectivă a curentului sinusoidal este egală cu acea valoare constantă a unui curent continuu care, trecînd printr-un rezistor cu rezistența  $R$ , dezvoltă în timp de o perioadă aceeași energie calorică ca și curentul sinusoidal ce trece prin același rezistor, în același interval de timp. Pe baza acestei definiții se poate scrie :

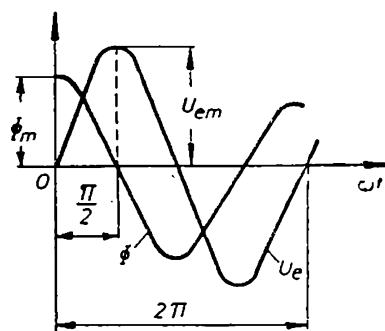


Fig. 5-4. Variația în timp a fluxului inductor și a t.e.m. induse.

$$Q = RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt, \quad (5-8)$$

unde  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$  este curentul sinusoidal și  $I$  este valoarea efectivă a curentului. Rezultă :

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - \varphi) dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2(\omega t - \varphi)}{2} dt,$$

de unde, prin efectuarea integralei, se obține :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (5-9)$$

În mod asemănător, se deduce valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (5-10)$$

Importanța valorilor efective ale curentului și tensiunii constă în aceea că instrumentele de măsurat de tip electromagnetic și electrodinamic măsoară tocmai aceste valori efective. De asemenea, aceste mărimi intervin în exprimarea puterilor activă, reactivă și aparentă.

În ceea ce privește valoarea medie a unei mărimi sinusoidale, aceasta este nulă dacă se calculează în raport cu o perioadă. De aceea, în regimul sinusoi-

dal, nu se determină valoarea medie pentru o perioadă  $T$ , ci pentru  $\frac{T}{2}$ . În aceste condiții, considerînd  $u = U_m \sin \omega t$ , se obține :

$$U_{med} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m, \quad (5-11)$$

unde s-a ținut seama că  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

În mod analog, pentru valoarea medie a curentului sinusoidal se obține :

$$I_{med} = \frac{2}{\pi} I_m. \quad (5-12)$$

Valorile medii ale curentului și tensiunii prezintă importanță în sensul că acestea se măsoară cu ajutorul instrumentelor de tip magnetoelectric prevăzute cu redresor.

Raportul dintre valoarea efectivă și valoarea medie a unei mărimi periodice depinde de forma curbei și se numește *factor de formă*. În cazul mărimilor sinusoidale, factorul de formă  $k_f$  este :

$$k_f = \frac{U}{U_{med}} = \frac{I}{I_{med}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11. \quad (5-13)$$

*Factorul de amplitudine* al unei mărimi periodice este definit ca raportul dintre valoarea maximă și valoarea efectivă a acelei mărimi. Pentru mărimile sinusoidale, factorul de amplitudine  $k_a$  are valoarea :

$$k_a = \frac{U_m}{U} = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} = 1,41. \quad (5-14)$$

Pentru curbele avînd o formă mai ascuțită decît sinusoida, rezultă  $k_f < 1,11$  și  $k_a < 1,41$ , iar pentru cele avînd o formă mai plată decît sinusoida se obține  $k_f > 1,11$  și  $k_a > 1,41$ .

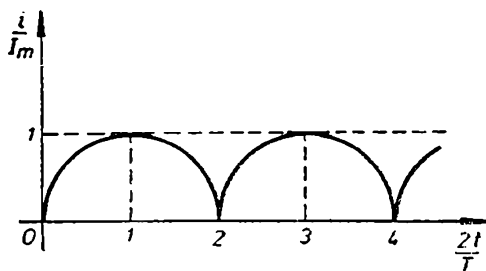


Fig. 5-5. Curent cu variație pulsatorie în timp.

**Aplicația 5-1.** Un curent pulsatoriu variază în timp după o curbă în formă de semicerc (fig. 5-5). Să se determine valoarea efectivă a acestui curent.

**Rezolvare.** În fig. 5-5 s-au reprezentat pe axe valorile relative ale curentului și timpului. Rezultă următoarea ecuație a cercului ce trece prin origine :

$$\left(\frac{i}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{2t}{T} - 1\right)^2 = 1,$$

de unde se obține :

$$i = \sqrt{I_m^2 \frac{4}{T} \left(t - \frac{t^2}{T}\right)}.$$

Valoarea efectivă a acestui curent este :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \frac{4}{T} \left(t - \frac{t^2}{T}\right) dt} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_m.$$

#### 5.1.4. REPREZENTAREA MĂRIMILOR SINUSOIDALE

Mărimile sinusoidale se pot reprezenta și exprima în diferite moduri, obținându-se așa-numitele diagrame de reprezentare a mărimilor sinusoidale, respectiv relații de exprimare a lor.

a. **Diagrama liniară** (carteziană) a mărimilor sinusoidale de forma :

$$u = U_m \sin \omega t = \sqrt{2} U_{\text{ef}} \sin \omega t,$$

$$i = I_m \sin (\omega t - \varphi) = \sqrt{2} I \sin (\omega t - \varphi)$$

se obține reprezentând în plan variația în timp a acestor mărimi, punând pe abscisă valorile timpului  $t$ , sau valorile unghiului  $\omega t$ , iar pe ordonată valorile instantanee (momentane) ale mărimilor respective (v. fig. 5-2).

b. **Diagrama fazorială.** O mărime sinusoidală este univoc determinată dacă se cunosc amplitudinea și faza sa. Diagrama fazorială a unei mărimi sinusoidale de forma  $i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$  se obține asociind amplitudinii un segment de dreaptă  $OA = I_m$ , ce se rotește în jurul originii  $O$  a axelor de coordonate, în sensul trigonometric, cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ , denumit *fazor al amplitudinii* (fig. 5-6). Unghiul pe care acest fazor îl face cu direcția pozitivă a axei absciselor reprezintă argumentul  $\omega t - \varphi$  al funcției sinusoidale, iar proiecția sa pe axa verticală reprezintă valoarea momentană  $i$ .

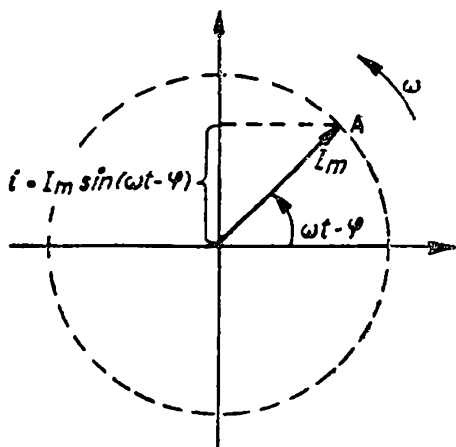


Fig. 5-6. Fazorul amplitudinii curentului.

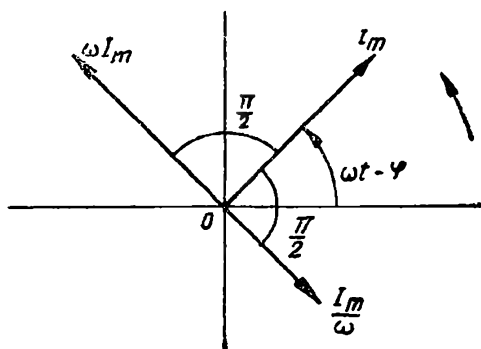


Fig. 5-7. Fazorii amplitudinilor derivatei ( $\omega I_m$ ) și integralei ( $\frac{I_m}{\omega}$ ) ai curentului sinusoidal cu amplitudinea  $I_m$ .

În diagrama fazorială se reprezintă, în general, mai multe mărimi sinusoidale ca : tensiuni, curenți etc. Toate aceste mărimi trebuie să aibă însă aceeași frecvență de variație. Pe baza acestei reprezentări se pot face operații de adunare și scădere a mărimilor sinusoidale de aceeași natură, de determinare a defazajelor dintre ele etc. (v. aplicația 5-2).

Fazorii derivatei și integralei unei mărimi sinusoidale  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ , reprezentați în fig. 5-7, se obțin simplu :

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t - \varphi) = \omega I_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int i dt = -\frac{1}{\omega} I_m \cos(\omega t - \varphi) = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Deci, derivata unei mărimi sinusoidale este defazată înainte cu  $\frac{\pi}{2}$  față de mărimea respectivă, iar integrala în urmă cu  $\frac{\pi}{2}$ .

În aplicațiile practice, diagramele fazoriale se folosesc, obișnuit, fără a mai trasa și axele de coordonate, reprezentându-se numai fazorii amplitudinilor, cu defazajele corespunzătoare și indicându-se printr-o săgeată sensul pozitiv de rotație (invers mișcării acelor ceasornicului). O astfel de reprezentare se numește *diagramă fazorială a amplitudinilor*. Având în vedere că raportul dintre amplitudinea unei mărimi sinusoidale și valoarea sa efectivă este constant, egal cu  $\sqrt{2}$ , în locul diagramei fazoriale a amplitudinilor se folosește, adesea, diagrama fazorială a valorilor efective. În fig. 5-8 sînt reprezentate diagramele fazoriale a amplitudinilor și a valorilor efective pentru mărimile :

$$u = U_m \sin \omega t = \sqrt{2}U \sin \omega t, \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi).$$

Proiectînd fazorul curentului pe direcția fazorului tensiunii și pe o direcție perpendiculară pe tensiune se obțin componenta activă și componenta reactivă a curentului :

$$I_{ma} = I_m \cos \varphi, \quad I_a = I \cos \varphi ;$$

$$I_{mr} = I_m \sin \varphi, \quad I_r = I \sin \varphi. \quad (5-15)$$

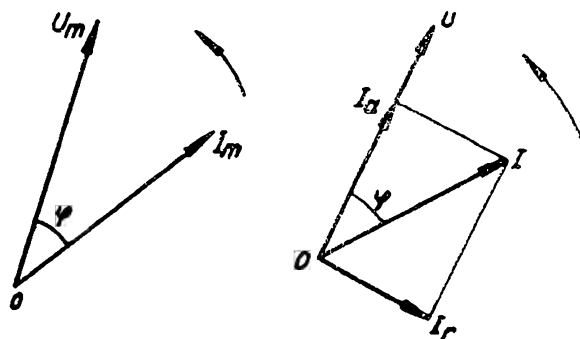


Fig. 5-8. Diagrame fazoriale ale amplitudinilor și ale valorilor efective pentru tensiune și curent.

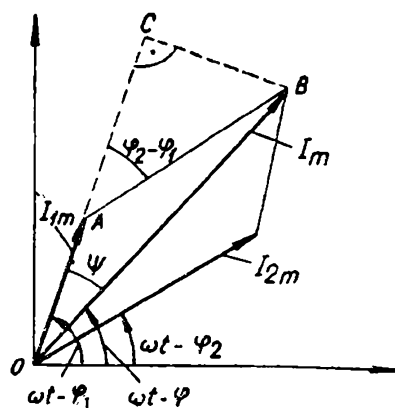


Fig. 5-9. Diagrama fazorială de însumare a doi curenți sinusoidali.

**Aplicația 5-2.** Folosind diagrama fazorială a amplitudinilor, să se determine curentul  $i = i_1 + i_2$ , unde  $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1)$ ,  $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2)$ .

**Rezolvare.** Curentul  $i$  are o expresie de forma :  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ , unde  $I_m$  și  $\varphi$  urmează a se determina în funcție de  $I_{1m}$ ,  $I_{2m}$ ,  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ .

În fig. 5-9 este reprezentată diagrama fazorială a celor trei curenți. Amplitudinea  $I_m$  se obține prin însumarea geometrică a amplitudinilor  $I_{1m}$  și  $I_{2m}$ :  $I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ . Din triunghiul  $OAB$  se obține:

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Din triunghiul dreptunghic  $OBC$  rezultă:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{BC}{OC} = \frac{I_{2m} \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{I_{1m} + I_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Având în vedere că  $\omega t - \varphi_1 = \omega t - \varphi + \psi$ , se obține:  $\varphi = \varphi_1 + \psi$ .

**c. Reprezentarea în complex.** Un număr complex, caracterizat prin modulul și argumentul său, poate servi la reprezentarea simbolică a unei mărimi sinusoidale. Există reprezentarea în complex nesimplificată și reprezentarea în complex simplificată a mărimilor cu variație sinusoidală în timp.

Reprezentarea în complex nesimplificată se obține luând modulul mărimii complexe egal cu amplitudinea, iar argumentul egal cu faza mărimii sinusoidale. De exemplu, mărimii sinusoidale  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$  i se asociază biunivoc mărirea complexă:

$$\underline{I} = I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m \cos(\omega t - \varphi) + j I_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (5-16)$$

unde  $j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}$  este unitatea imaginară.

Partea reală și partea imaginară a mărimii complexe sînt:

$$\operatorname{Re}\{\underline{I}\} = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad \operatorname{Im}\{\underline{I}\} = I_m \sin(\omega t - \varphi) = i.$$

Se remarcă faptul că partea imaginară este egală cu valoarea instantanee a mărimii sinusoidale.

Reprezentarea în complex simplificată se face considerînd modulul mărimii complexe egal cu valoarea efectivă, iar argumentul egal cu faza inițială a mărimii cu variație sinusoidală în timp. De exemplu, curentul  $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$  se reprezintă în complex simplificat prin relația:

$$\underline{I} = I e^{-j\varphi}. \quad (5-17)$$

Reprezentînd în planul complex (planul Gauss) mărimile complexe prin care se exprimă simbolic mărimile sinusoidale, se obține diagrama în complex a acestor mărimi. În fig. 5-10 este reprezentat în planul complex curentul exprimat sub formă complexă prin relația (5-16).

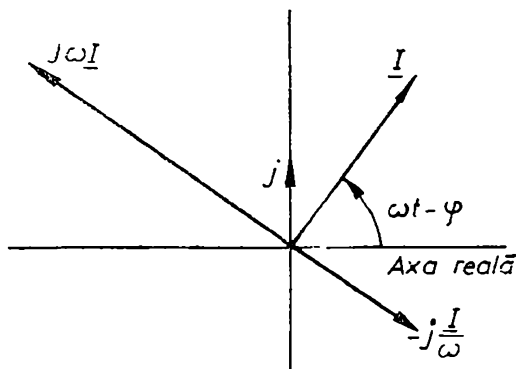


Fig. 5-10. Reprezentarea în planul complex a curentului sinusoidal, a derivatei și integralei sale.

Derivata și integrala mărimii complexe (5-16) sînt :

$$\frac{dI}{dt} = j\omega I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = j\omega \underline{I}, \quad (5-18)$$

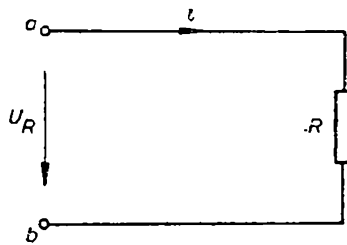
$$\int \underline{I} dt = \frac{1}{j\omega} I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = -j \frac{1}{\omega} \underline{I},$$

a căror reprezentare este redată în fig. 5-10. Ținînd seama că  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ ,  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ , prin înmulțirea mărimii complexe ( $\underline{I}$ ) cu  $j$  și  $-j$ , aceasta se rotește în sensul trigonometric, respectiv în sens opus, cu  $\frac{\pi}{2}$  radiani.

## 5.2. ELEMENTE IDEALE DE CIRCUIT ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 5.2.1. REZISTORUL IDEAL

Se consideră un rezistor avînd rezistența  $R$  și cu inductanța și capacitatea neglijabile (rezistor ideal), alimentat cu tensiunea sinusoidală :  $u_R = U_{Rm} \sin \omega t$  (fig. 5-11). Curentul prin rezistor, ca valoare instantanee, se obține din legea conducerii electrice (legea lui Ohm) :



$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_{Rm}}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t, \quad (5-19)$$

în care  $I_m = \frac{U_{Rm}}{R}$  este amplitudinea curentului.

Valoarea efectivă a curentului prin rezistor este :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}R} = \frac{U_R}{R}, \quad (5-20)$$

unde  $U_R = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}}$  este valoarea efectivă a tensiunii la bornele rezistorului.

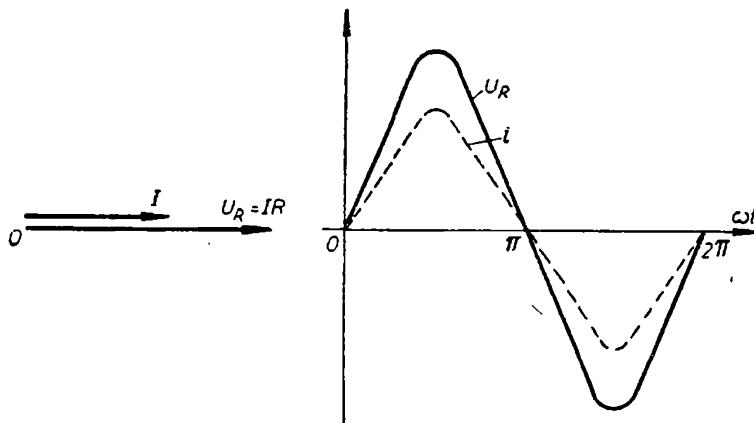


Fig. 5-12. Diagrame pentru rezistorul ideal.



Se remarcă faptul că, curentul electric prin rezistor este în fază cu tensiunea aplicată la bornele sale, diagramele fazorială și carteziană fiind cele reprezentate în fig. 5-12.

### 5.2.2. BOBINA IDEALĂ

Fie o bobină cu  $N$  spire, situată într-un mediu liniar, alimentată cu tensiunea la borne  $u_L$  și parcursă de curentul  $i = I_m \sin \omega t$  (fig. 5-13). Se consideră neglijabilă rezistența și capacitatea spirelor în raport cu inductanța  $L$  a bobinei (bobină ideală).

Înlănțuirea magnetică  $\psi = Li$  este o mărime sinusoidală, în fază cu curentul  $i$  deoarece  $L = \text{const.}$ , adică :

$$\psi = LI_m \sin \omega t. \quad (5-21)$$

Variația fluxului prin secțiunea spirelor bobinei induce în acestea o tensiune electromotoare care, conform legii inducției electromagnetice, este :

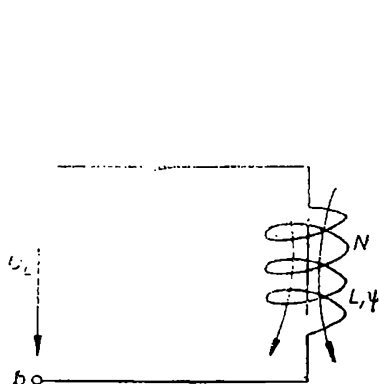


Fig. 5-13. Bobina ideală.

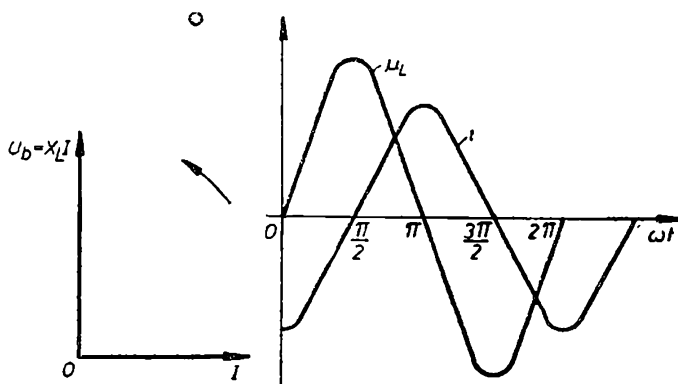


Fig. 5-14. Diagrame pentru bobina ideală.

$$u_e = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = U_{em} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (5-22)$$

unde

$$U_{em} = \omega L I_m = X_L I_m \quad (5-23)$$

este amplitudinea t.e.m. induse.

Mărimea

$$X_L = \omega L \quad (5-24)$$

se numește *reactanța inductivă* a bobinei și, ca și rezistența electrică, se măsoară în ohmi.

Tensiunea  $u_L$  aplicată la bornele bobinei este egală și de semn opus cu  $u_e$  deoarece  $\oint \vec{E} d\vec{l} = u_L + u_e = 0$ , rezistența și capacitatea circuitului fiind neglijabile. Deci,

$$u_L = -u_e = \omega L I_m \cos \omega t = U_{em} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (5-25)$$

adică, tensiunea la bornele bobinei ideale este defazată cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea curentului prin bobină (același lucru cu a spune: curentul defazat în urmă cu  $\frac{\pi}{2}$  față de tensiune).

Diagramele fazorială și carteziană ale tensiunii  $u_L$  și curentului  $i$  sînt reprezentate în fig. 5-14.

Amplitudinea curentului prin bobină, respectiv valoarea sa efectivă sînt:

$$I_m = \frac{U_{Lm}}{X_L}, \quad I = \frac{U_L}{X_L}. \quad (5-26)$$

Mărima  $X_L I$  se numește cădere de tensiune inductivă (ca valoare efectivă).

### 5.2.3. CONDENSATORUL IDEAL

Se consideră un condensator cu capacitate  $C$  (constantă), cu rezistivitate infinită a dielectricului dintre armături (condensator ideal), conectat la tensiunea sinusoidală  $u_C = U_{cm} \sin \omega t$  (fig. 5-15). Curentul electric din circuit este:

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (C u_C) = C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_{cm} \cos \omega t$$

adică

$$i = \frac{U_{cm}}{X_C} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (5-27)$$

Mărima

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5-28)$$

se numește *reactanța capacitivă* a condensatorului, măsurată în ohmi.

Deci, la condensatorul ideal curentul electric este defazat cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea tensiunii la borne. Diagramele fazorială și carteziană pentru acest caz sînt reprezentate în fig. 5-16.

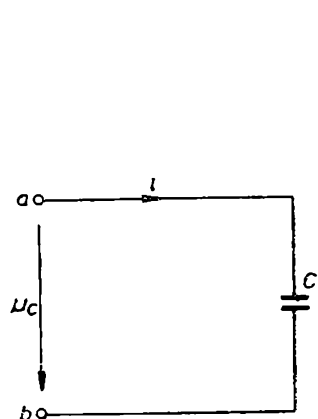


Fig. 5-15. Condensatorul ideal.

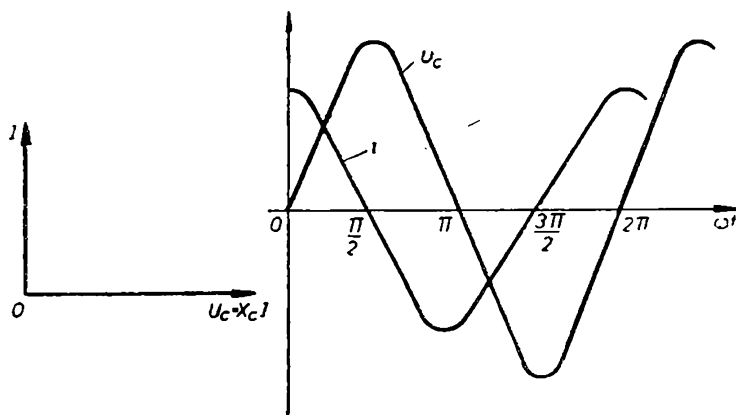


Fig. 5-16. Diagrame pentru condensatorul ideal.

Amplitudinea, respectiv valoarea efectivă a curentului din circuitul condensatorului sînt :

$$I_m = \frac{U_{cm}}{X_C}, \quad I = \frac{U_C}{X_C}. \quad (5-29)$$

Mărimea  $X_C I$  se numește cădere de tensiune capacitivă (valoare efectivă).

### 5.3. CIRCUIT RLC SERIE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL. IMPEDANȚA ȘI ADMITANȚA CIRCUITULUI

Se consideră un circuit format dintr-un rezistor cu rezistența  $R$ , o bobină cu inductanța  $L$  și un condensator cu capacitatea  $C$  legate în serie și alimentat cu tensiunea de borne sinusoidală :  $u_b = U_{bm} \sin \omega t$  (fig. 5-17).

Prin cele trei elemente legate în serie circulă același curent  $i$ , care provoacă căderile de tensiune :

$$u_R = Ri, \quad u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt + \frac{Q_0}{C} \quad (5-30)$$

unde, în regim permanent sinusoidal, constanta de integrare  $\frac{Q_0}{C} = 0$ .

Tensiunea la borne  $u_b$  acoperă căderile de tensiune din circuit,  $u_b = u_R + u_L + u_C$ , sau :

$$u_b = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt, \quad (5-31)$$

care reprezintă ecuația integro-diferențială a curentului din circuit.

Cunoscîndu-se  $R$ ,  $L$ ,  $C$  și tensiunea la borne  $u_b$ , se pune problema determinării curentului permanent din circuit, deci a găsirii soluției particulare a ecuației integro-diferențiale. Cum  $u_b$  este o funcție sinusoidală de timp și  $R$ ,  $L$ ,  $C$  sînt mărimi constante, rezultă că fiecare termen din membrul drept al egalității (5-31) trebuie să fie o funcție sinusoidală de timp, de aceeași frecvență. Se încearcă deci pentru curentul permanent  $i$  o expresie de forma :

$$i = I_m \sin (\omega t - \varphi), \quad (5-32)$$

rămînînd de determinat amplitudinea  $I_m$  și defazajul  $\varphi$ .

Înlocuind pe  $i$  din (5-32) în ecuația integro-diferențială (5-31), pe care trebuie să o satisfacă pentru orice valoare a timpului, se obține :

$$U_{bm} \sin \omega t = RI_m \sin (\omega t - \varphi) + (X_L - X_C) I_m \cos (\omega t - \varphi). \quad (5-33)$$

Pentru determinarea defazajului dintre tensiunea  $u_b$  și curentul  $i$ , în identitatea (5-33) se introduce  $t=0$ , obținîndu-se :

$$0 = RI_m \sin (-\varphi) + (X_L - X_C) I_m \cos (-\varphi),$$

de unde rezultă :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}, \quad (5-34)$$

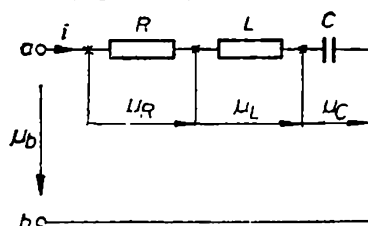


Fig. 5-17. Circuit RLC în serie.

în care

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (5-35)$$

este *reactanța* (totală) a circuitului.

S-a determinat în acest fel defazajul  $\varphi$  dintre tensiunea  $u_b$  și curentul  $i$ , în funcție de parametrii  $R$ ,  $L$  și  $C$  ai circuitului.

De remarcat că reactanța  $X$  poate fi pozitivă dacă  $X_L > X_C$ , negativă dacă  $X_L < X_C$  sau chiar zero dacă  $X_L = X_C$ . După semnul reactanței se disting:

— circuite cu caracter inductiv, la care  $X > 0$ ,  $\varphi > 0$ , adică curentul  $i$  este defazat în urmă față de tensiunea  $u_b$ ;

— circuite cu caracter capacitiv, la care  $X < 0$ ,  $\varphi < 0$ , adică curentul  $i$  este defazat înainte față de tensiunea  $u_b$ ;

— circuite cu caracter rezistiv, la care  $X = 0$ ,  $\varphi = 0$ , curentul  $i$  fiind în fază cu tensiunea  $u_b$ .

Ținând seama de relația (5-35), rezultă:

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}. \quad (5-36)$$

Pentru determinarea amplitudinii  $I_m$  a curentului, în identitatea (5-33) se introduce  $t = \frac{\varphi}{\omega}$ , obținându-se:

$$U_{bm} \sin \varphi = X I_m,$$

unde, înlocuind pe  $\sin \varphi$  cu valoarea sa dată de (5-36), rezultă:

$$I_m = \frac{U_{bm}}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_{bm}}{Z}. \quad (5-37)$$

Mărimea

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (5-38)$$

se numește *impedanța* circuitului, măsurată în ohmi, care nu depinde de valoarea tensiunii și curentului, ci numai de parametrii  $R$ ,  $L$  și  $C$  ai circuitului precum și de frecvență ( $\omega = 2\pi f$ ). Se poate deci defini impedanța unui circuit ca raportul dintre amplitudinea tensiunii la borne și amplitudinea curentului prin circuit, sau ca raportul valorilor efective ale tensiunii și curentului, adică:

$$Z = \frac{U_{bm}}{I_m} = \frac{U_b}{I}. \quad (5-39)$$

Pe baza relației (5-38), se poate scrie:  $Z^2 = R^2 + X^2$ , de unde rezultă că parametrii  $Z$ ,  $R$  și  $X$  pot reprezenta laturile unui triunghi dreptunghic, denumit *triunghiul impedanței* (fig. 5-18, a).

*Admitanța* unui circuit de c.a. se notează cu  $Y$  și se definește ca fiind egală cu valoarea inversă a impedanței:

$$Y = \frac{1}{Z}. \quad (5-40)$$

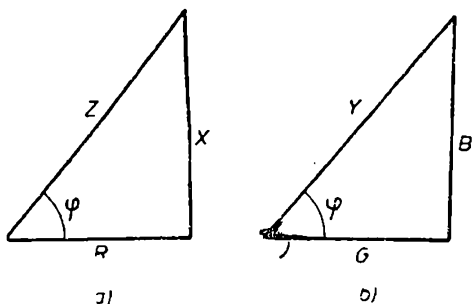


Fig. 5-18. Triunghiul impedanței (a) și al admitanței (b).

Ținând seama de (5-38), rezultă :

$$Y^2 = \frac{1}{R^2 + X^2} = \frac{R^2}{(R^2 + X^2)^2} + \frac{X^2}{(R^2 + X^2)^2} = G^2 + B^2, \quad (5-41)$$

unde

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} \quad (5-42)$$

este conductanța și

$$B = \frac{X}{(R^2 + X^2)} = \frac{X}{Z^2} \quad (5-43)$$

este susceptanța circuitului de c.a.

În baza relației (5-41) se poate construi *triunghiul admitanței*, reprezentat în fig. 5-18, b.

Din triunghiul impedanței și triunghiul admitanței se deduc următoarele relații :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{B}{G}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z} = \frac{B}{Y}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{G}{Y}. \quad (5-44)$$

*Impedanța ca mărime complexă* se definește prin raportul dintre reprezentările în complex nesimplificat sau simplificat ale tensiunii la borne și curentului din circuit (paragraful 5.1.4), adică :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}} = Z e^{j\varphi}, \quad (5-45 a)$$

unde  $Z = \frac{U_{bm}}{I_m} = \frac{U_b}{I}$  este modulul impedanței.

Folosind relațiile lui Euler :  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ ,  $e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$ , impedanța complexă se poate scrie :

$$\underline{Z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi, \quad (5-45 b)$$

de unde, ținând seama de relațiile (5-44), rezultă :

$$\underline{Z} = R + jX. \quad (5-45 c)$$

*Admitanța complexă* este :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = Y e^{-j\varphi} \quad (5-46 a)$$

sau

$$\underline{Y} = Y \cos \varphi - j Y \sin \varphi \quad (5-46 b)$$

respectiv,

$$\underline{Y} = G - jB. \quad (5-46 c)$$

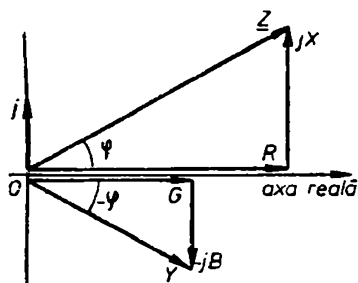


Fig. 5-19. Reprezentarea în planul complex a impedanței  $\underline{Z}$  și admitanței  $\underline{Y}$ .

În planul complex din fig. 5-19 sînt reprezentate impedanța  $\underline{Z}$  și admitanța  $\underline{Y}$  ca mărimi complexe.

Folosind exprimarea în complex a mărimilor, se obține :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}} = \underline{U}_b \underline{Y}. \quad (5-47)$$

Diagrama fazorială a valorilor efective pentru circuitul reprezentat în fig. 5-17 se construiește în felul următor (fig. 5-20) :

— dintr-o origine  $O$  arbitrară și pe o direcție de asemenea arbitrară se ia un segment de dreaptă orientat care, la o anumită scară a curenților, este egal cu valoarea efectivă  $I$  a curentului ;

— căderea de tensiune ohmică,  $U_R = RI$ , este în fază cu curentul  $I$  ; deci, din originea  $O$ , tot pe direcția și sensul curentului, se ia un segment care la o anumită scară a tensiunilor, este egal cu  $U_R$  ;

— căderea de tensiune inductivă,  $U_L = X_L I$ , este defazată cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea curentului ; la vârful lui  $U_R$  se duce deci, perpendicular pe curent, segmentul  $U_L$  ;

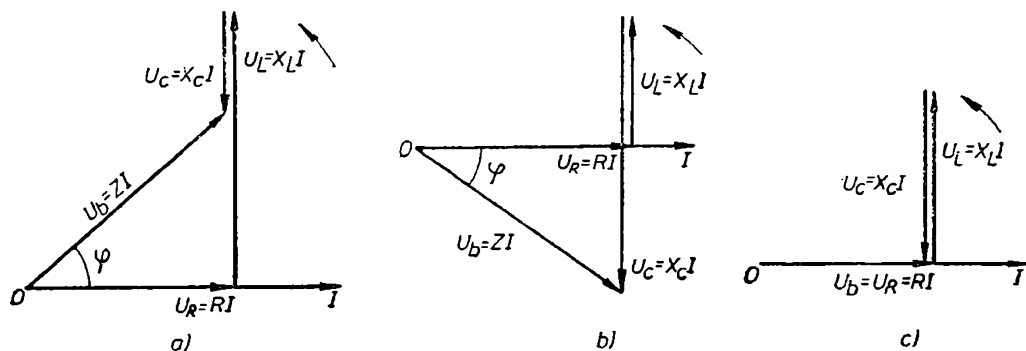


Fig. 5-20. Diagrama fazorială a circuitului RLC serie.

— căderea de tensiune capacitivă,  $U_C = X_C I$ , este defazată în urmă față de curent cu unghiul  $\frac{\pi}{2}$  ; la vârful lui  $U_L$  se duce, în sens opus cu  $U_L$ , segmentul  $U_C$  ;

— însumînd geometric aceste căderi de tensiune se obține tensiunea la bornele circuitului care, la scara aleasă a tensiunilor, reprezintă valoarea efectivă  $U_b$  :

$$U_b = \overline{U_R + U_L + U_C}. \quad (5-48)$$

În cazul circuitului cu caracter inductiv ( $X_L > X_C$ , deci  $U_L > U_C$ ) diagrama fazorială este cea din fig. 5-20, a, pentru circuitul cu caracter capacitiv ( $X_L < X_C$ , deci  $U_L < U_C$ ) diagrama este cea din fig. 5-20, b, iar pentru cazul circuitului cu caracter ohmic ( $X_L = X_C$ , deci  $U_L = U_C$ ), denumit și circuit cu rezonanță de tensiune, se obține diagrama din fig. 5-20, c.

Din diagrama reprezentată în fig. 5-20 se obține :

$$U_b = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (5-49)$$

## 5.4. CIRCUIT CU RLC ÎN PARALEL ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

Se consideră circuitul format prin legarea în paralel a unui rezistor cu rezistența  $R$ , a unei bobine cu inductanța  $L$  și a unui condensator cu capacitatea  $C$ , la bornele căruia se aplică tensiunea sinusoidală  $u_b = \sqrt{2} U_b \sin \omega t$  (fig. 5-21).

Conform primei teoreme a lui Kirchhoff, se poate scrie următoarea relație între valorile instantanee ale curenților din laturile ce concură în nodul  $A$  :  $i = i_R + i_L + i_C$ . Tensiunea aplicată elementelor de circuit legate în paralel fiind aceeași, valorile efective ale celor trei curenți sînt :

$$I_R = \frac{U_b}{R}, \quad I_L = \frac{U_b}{X_L} = \frac{U_b}{\omega L}, \quad I_C = \frac{U_b}{X_C} = \omega C U_b. \quad (5-50)$$

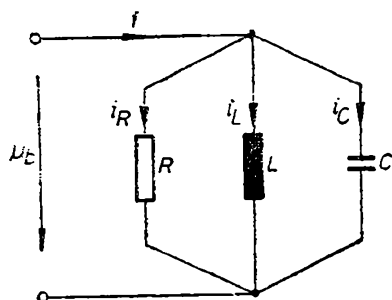


Fig. 5-21. Circuit  $RLC$  în paralel.

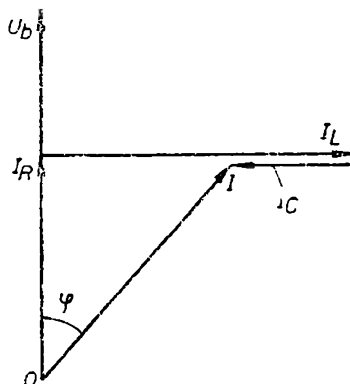


Fig. 5-22. Diagrama fazorială a circuitului  $RLC$  în paralel.

Diagrama fazorială a valorilor efective pentru circuitul din fig. 5-21 se reprezintă ca în fig. 5-22, unde curenul  $I_R$  este în fază cu tensiunea  $U_b$ , curenul  $I_L$  este defazat în urmă față de tensiune cu  $\frac{\pi}{2}$  radiani, iar curenul  $I_C$  este defazat înainte față de tensiune cu  $\frac{\pi}{2}$  radiani. Suma geometrică a acestor trei curenți este curenul total  $I$ , defazat cu unghiul  $\varphi$  față de tensiune :

$$I = \widehat{I_R + I_L + I_C}. \quad (5-51)$$

Dacă  $I_L = I_C$ , atunci circuitul este cu rezonanță de curen, avînd  $\varphi = 0$ . Din diagrama reprezentată în fig. 5-22 se obține :

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}, \quad (5-52)$$

de unde, prin înlocuirea relațiilor (5-50) și avînd în vedere că  $I = U_b Y = \frac{U_b}{Z}$ , rezultă :

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \quad (5-53 a)$$

sau, sub formă complexă :

$$\underline{Y} = G - jB = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right). \quad (5-53 b)$$

## 5.5. CIRCUITE CU IMPEDANȚE ÎN SERIE, ÎN PARALEL ȘI MIXT

### 5.5.1. IMPEDANȚE ÎN SERIE

Două sau mai multe impedanțe sînt legate în serie atunci cînd sînt parcurse de același curent. După cum se va arăta în continuare, impedanța echivalentă nu este egală cu suma impedanțelor (așa ca la rezistențe legate în serie). Numai dacă impedanțele se exprimă sub forma complexă atunci impedanța echivalentă este egală cu suma impedanțelor legate în serie.

Se consideră în fig. 5-23, *a* schema electrică a circuitului unui receptor de impedanță  $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}$  alimentat de la o sursă cu tensiunea la

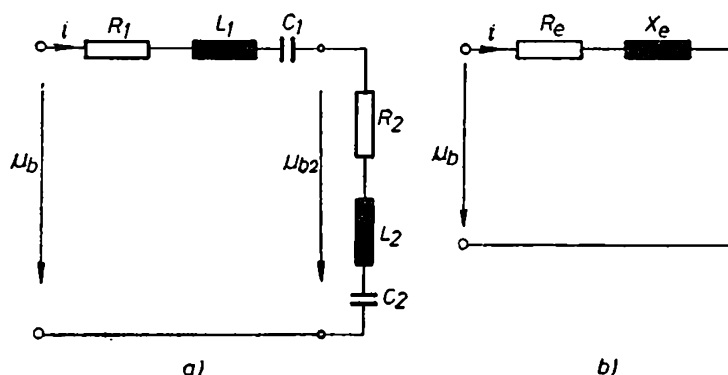


Fig. 5-23. Circuit cu două impedanțe în serie (a) și circuitul echivalent (b).

borne sinusoidală  $u_b = \sqrt{2}U_b \sin \omega t$  prin intermediul unei linii de transport ce are parametrii  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $C_1$  concentrați, respectiv impedanța  $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2}$ . Receptorul și linia de transport constituie două impedanțe legate în serie, parcurse de curentul  $i = \sqrt{2}I \sin (\omega t - \varphi)$ .

Problema determinării curentului  $i$ , cînd se cunosc  $u_b$  și cele două impedanțe, se ușurează dacă circuitul dat în fig. 5-23, *a* se înlocuiește cu un circuit echivalent ca cel din fig. 5-23, *b*. Parametrii  $R_e$  și  $X_e$ , respectiv  $Z_e$ , ai circuitului echivalent trebuie determinați din condiția ca la aceeași tensiune  $u_b$  să se obțină același curent  $i$ . Problema se poate rezolva fie prin metoda grafică, fie prin metoda simbolică, adică recurgînd la exprimarea sub formă complexă a mărimilor.

**Metoda grafică** se bazează pe construcția diagramei fazoriale a circuitului, reprezentată în fig. 5-24, pe baza căreia se poate scrie :

$$\tilde{U}_b^2 = (IZ_e)^2 = OM^2 + MN^2 = I^2 (R_1 + R_2)^2 + I^2 (X_1 + X_2)^2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{MN}{OM}.$$

Deci,

$$Z_e = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2},$$



$$R_e = R_1 + R_2, \quad X_e = X_1 + X_2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e}. \quad (5-54)$$
$$I = \frac{U_b}{Z_e}.$$

După cum rezultă din diagrama reprezentată în fig. 5-24, tensiunea  $U_{b2}$  de la bornele receptorului nu este egală nici ca valoare și nici în fază cu tensiunea  $U_b$  de la începutul liniei. În transportul și distribuția energiei electrice, diferența geometrică  $Z_1 I =$

$= \widehat{U_b} - U_{b2}$  se numește *cădere de tensiune*, iar diferența algebrică  $\Delta U = U_b - U_{b2}$  se numește *pierdere de tensiune*. Pierdere de tensiune se exprimă de obicei în procente din  $U_b$  și prezintă o importanță deosebită la dimensionarea liniilor de transport. În general, pierdere de tensiune admisibilă pe linie este 5% din  $U_b$ .

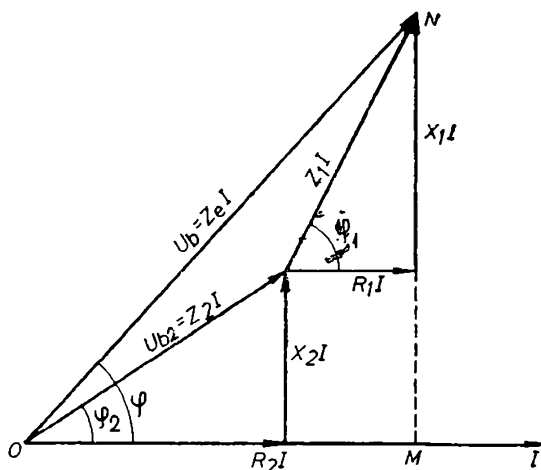


Fig. 5-24. Diagrama fazorială a circuitului cu două impedanțe în serie.

**Metoda simbolică** prezintă avantajul că operațiile de însumare, scădere etc., dintre mărimi nu se fac grafic, ci algebric. Mărimile fiind exprimate sub formă complexă, caracterul de însumare grafică se păstrează prin faptul că, însumând (algebric) două mărimi complexe, se adună între ele părțile reale, respectiv părțile imaginare.

Pentru circuitul reprezentat în fig. 5-23, impedanțele complexe, legate în serie, sînt :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

Tensiunea la bornele circuitului este egală cu suma căderilor de tensiune pe aceste două impedanțe, respectiv este egală cu căderea de tensiune pe impedanța echivalentă :

$$U_b = IZ_1 + IZ_2 = IZ_e, \quad (5-55)$$

de unde rezultă impedanța echivalentă :

$$Z_e = Z_1 + Z_2 = R_e + jX_e, \quad (5-56)$$

în care

$$R_e = R_1 + R_2, \quad X_e = X_1 + X_2.$$

Curentul din circuit și defazajul sînt :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_e}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e} = \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}. \quad (5-57)$$

În general, la legarea în serie a mai multor impedanțe  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$ , impedanța echivalentă ca mărime complexă este :

$$\underline{Z}_e = \sum_{v=1}^n \underline{Z}_v. \quad (5-58)$$

### 5.5.2. IMPEDANȚE ÎN PARALEL

Două sau mai multe impedanțe sînt legate în paralel atunci cînd au la borne aceeași tensiune. În fig. 5-25 este reprezentată schema circuitului electric a două receptoare cu impedanțele  $Z_1$  și  $Z_2$  legate în paralel. La borne

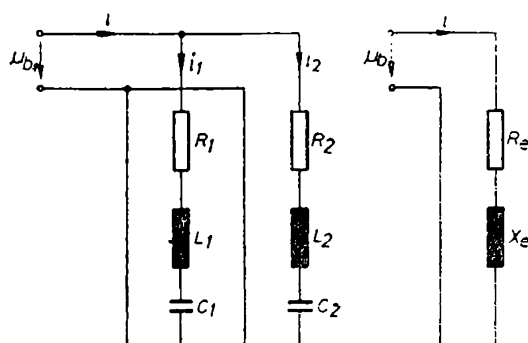


Fig. 5-25. Circuit cu două impedanțe în paralel și circuitul echivalent.

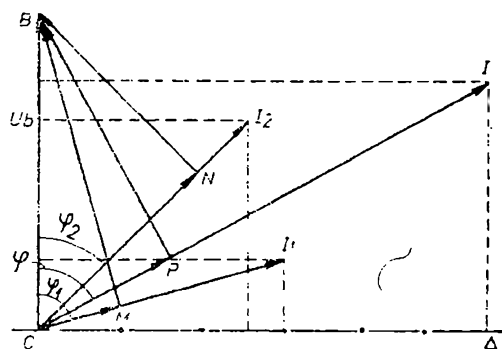


Fig. 5-26. Diagrama fazorială a circuitului cu două impedanțe în paralel.

se aplică tensiunea sinusoidală  $u_b = \sqrt{2}U_b \sin \omega t$  care determină curenții  $i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$  și  $i_2 = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t - \varphi_2)$ .

Determinarea curentului total  $i = i_1 + i_2 = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$  se face ușor dacă se cunosc parametrii  $R_e$  și  $X_e$  ai impedanței echivalente. Impedanța echivalentă, conectată la aceeași tensiune  $u_b$ , trebuie să absoarbă același curent  $i$  ca și cele două impedanțe în paralel. Această problemă se poate rezolva fie prin metoda grafică, fie prin metoda simbolică.

**Metoda grafică.** Valorile efective ale curenților sînt :

$$I_1 = \frac{U_b}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{U_b}{Z_2}, \quad I = \frac{U_b}{Z_e}, \quad (5-59)$$

avînd următoarele defazaaje față de tensiunea la borne :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{R_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{R_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e}, \quad (5-60)$$

Determinarea parametrilor  $R_e$  și  $X_e$  se face pe baza diagramei fazoriale a circuitului reprezentată în fig. 5-26, unde s-a avut în vedere că  $\widehat{I_1 + I_2} = I$ . Semnificația segmentelor din diagramă este următoarea :

$OM = R_1 I_1$  — căderea ohmică de tensiune la primul receptor ;

$MB = X_1 I_1$  — căderea reactivă de tensiune la primul receptor ;

$ON = R_2 I_2$  }  
 $NB = X_2 I_2$  } — căderile de tensiune la al doilea receptor ;

$OP = R_e I$  }  
 $PB = X_e I$  } — căderile de tensiune pe rezistența, respectiv reactanța echivalentă.

Din diagramă se determină pe cale grafică curentul  $I$ , ținînd cont de scara curenților, precum și defazaajul  $\varphi$ . De asemenea, măsurînd segmentele  $OP$  și  $PB$  la scara tensiunilor și împărțind cu valoarea lui  $I$ , rezultă  $R_e$  și  $X_e$ . Proiectînd cei trei curenți pe  $U_b$  și pe o dreaptă  $\Delta$  perpendiculară pe  $U_b$ , se obțin relațiile :

$$I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2,$$

$$I \sin \varphi = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2.$$

Ținînd seama și de relațiile (5-59), (5-60), rezultă :

$$\frac{R_e}{Z_e^2} = \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2}, \quad \frac{X_e}{Z_e^2} = \frac{X_1}{Z_1^2} + \frac{X_2}{Z_2^2}$$

sau :

$$G_e = G_1 + G_2, \quad B_e = B_1 + B_2. \quad (5-61)$$

Așadar, la circuitele cu impedanțe în paralel, se adună conductanțele, respectiv susceptanțele, pentru a obține conductanța, respectiv susceptanța echivalentă a circuitului. Aceasta, spre deosebire de circuitele cu impedanțe legate în serie unde se adună rezistențele, respectiv reactanțele.

Admitanța echivalentă  $Y_e$  și impedanța echivalentă  $Z_e$  devin cunoscute de îndată ce se cunosc  $G_e$  și  $B_e$ , adică :

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2}, \quad Z_e = \frac{1}{Y_e} = \sqrt{R_e^2 + X_e^2},$$

unde

$$R_e = \frac{G_e}{Y_e^2} = \frac{G_e}{G_e^2 + B_e^2}, \quad X_e = \frac{B_e}{Y_e^2} = \frac{B_e}{B_e^2 + G_e^2}$$

respectiv,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_e}{G_e}.$$

**Metoda simbolică** de calcul a circuitelor cu impedanțe în paralel, cu referire la circuitul reprezentat în fig. 5-25, *a*, constă în determinarea curenților prin cele două impedanțe și curențului total, ca mărimi complexe :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_e}. \quad (5-62)$$

Avînd în vedere prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată în complex :  $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$  și ținînd seama de (5-62), rezultă :

$$\frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_e} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_2}$$

sau

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2, \quad (5-63)$$

unde

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

În general, la legarea în paralel a mai multor impedanțe (admitanțe),  $\underline{Z}_1$  ( $\underline{Y}_1$ ),  $\underline{Z}_2$  ( $\underline{Y}_2$ ), ...,  $\underline{Z}_n$  ( $\underline{Y}_n$ ), impedanța (admitanța) echivalentă ca mărime complexă este :

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_v}, \quad \underline{Y}_e = \sum_{v=1}^n \underline{Y}_v. \quad (5-64)$$

În cazul cînd numai două impedanțe  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$  sînt legate în paralel, impedanța echivalentă se calculează cu relația :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (5-65)$$

De remarcat că la circuitele serie se adună impedanțele, iar la circuitele paralel se adună admitanțele, ca mărimi complexe.

### 5.5.3. IMPEDANȚE ÎN CONECTARE MIXTĂ (SERIE ȘI PARALEL)

În numeroase situații, circuitele electrice monofazate conțin impedanțe conectate atît în serie, cît și în paralel. Metoda cea mai expeditivă de calcul a unor astfel de circuite este cea simbolică, adică de exprimare sub formă complexă a mărimilor. Metoda grafică este mult prea complicată pentru a fi folosită în acest caz.

Impedanța complexă echivalentă a circuitului ce conține impedanțe în conectare mixtă se determină simplu, așa cum se arată în aplicația următoare referitoare la un caz concret.

**Aplicația 5-3.** Se consideră trei impedențe:  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ ,  $\underline{Z}_2 = j\omega L_2$ ,  $\underline{Z}_3 = -j\frac{1}{\omega C_3}$  conectate între ele conform schemei din fig. 5-27. Să se determine impedanța echivalentă a circuitului și curenții.

*Rezolvare.*

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23},$$

unde  $\underline{Z}_{23}$  este impedanța echivalentă a impedențelor  $\underline{Z}_2$  și  $\underline{Z}_3$  conectate în paralel:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\frac{L_2}{C_3}}{j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_3}\right)}.$$

Deci

$$\underline{Z}_e = R_e + jX_e = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{\frac{L_2}{C_3}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_3}}\right),$$

în care:

$$R_e = R_1, \quad X_e = \omega L_1 - \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C_3 - 1}.$$

Curenții din circuit se calculează cu relațiile:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_e}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_b - \underline{I}_1 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{I}_1 \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_b - \underline{I}_1 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{I}_1 \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_3},$$

în care apare și tensiunea la borne exprimată în formă complexă,  $\underline{U}_b$ . Considerînd valoarea momentană a acestei tensiuni  $u_b = \sqrt{2}U_b \sin \omega t$  și recurgînd la exprimarea în formă complexă simplificată, se obține:  $\underline{U}_b = U_b e^{j\omega t} = U_b$ .

În afară de circuitele cu impedențe în conectare mixtă (serie și paralel), există și circuite cu impedențe în conectare complexă (în formă de poligon sau de stea). În astfel de situații, impedanța echivalentă poate fi găsită numai după ce se realizează una sau mai multe transfigurări, din poligon în stea sau din stea în poligon. La capitolul 6, referitor la rețele electrice trifazate, se va prezenta metoda de transfigurare de la triunghi la stea și invers.

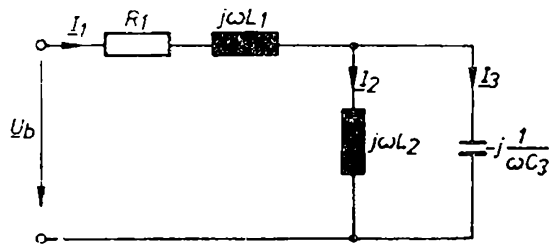


Fig. 5-27. Circuit cu elemente în conectare mixtă.

## 5.6. CIRCUITE CUPLATE MAGNETIC

Cuplajul magnetic se realizează prin intermediul bobinelor între care există inductanțe mutuale (reciproce). Bobinele cuplate magnetic pot fi legate în serie, în paralel sau pot aparține unor circuite distincte, așa cum este cazul circuitului primar și circuitului secundar al unui transformator electric.

Prin intermediul inductanțelor de cuplaj magnetic, apare o t.e.m. indusă în prima bobină de către curentul variabil din a doua bobină, respectiv în a doua bobină apare o t.e.m., indusă de curentul variabil din prima bobină :

$$u_{e21} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}, \quad u_{e12} = -L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (5-66, a)$$

sau, sub formă complexă

$$\underline{U}_{e21} = -j\omega L_{21} \underline{I}_1, \quad \underline{U}_{e12} = -j\omega L_{12} \underline{I}_2. \quad (5-66, b)$$

Acești t.e.m. induse le corespund căderi de tensiune pe cele două bobine, egale și de semn opus cu t.e.m. induse.

Cunoscând că inductanța mutuală dintre două bobine cuplate este  $L_{12} = L_{21} = M$ , corespunzător acestuia se introduce impedanța de cuplaj magnetic :

$$\underline{Z}_M = j\omega M. \quad (5-67)$$

Așadar, la calculul circuitelor în care intervin cuplaje magnetice se ține seama și de impedanța de cuplaj. În cele ce urmează se prezintă unele exemple prin care se ilustrează modul de evidențiere a cuplajelor magnetice.

**Exemplul 1.** Se consideră un circuit ce conține două bobine legate în serie și cuplate magnetic adițional (fig. 5-28). Tensiunea sinusoidală  $u_b$  aplicată la bornele circuitului este egală cu suma căderilor de tensiune din circuit :

$$u_b = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + L_{21} \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + L_{12} \frac{di}{dt}$$

sau

$$u_b = (R_1 + R_2) \frac{di}{dt} + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}. \quad (5-68, a)$$

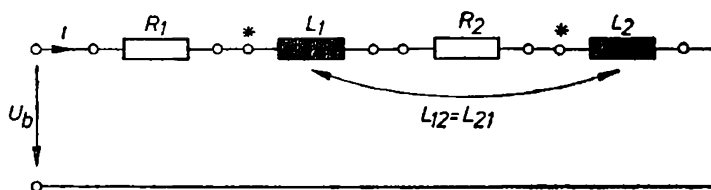


Fig. 5-28. Circuit serie cu bobine cuplate magnetic.

Sub formă complexă, această ecuație devine

$$\underline{U}_b = (R_1 + R_2) \underline{I} + j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \underline{I}. \quad (5-68, b)$$

Impedanța echivalentă a acestui circuit este :

$$\underline{Z} = R_1 + R_2 + j\omega (L_1 + L_2 + 2M), \quad (5-69)$$

în care  $R_1 + R_2 = R_e$  este rezistența echivalentă și  $L_1 + L_2 + 2M = L_e$  este inductanța echivalentă (v. paragraful 4.9.3).

Ecuația circuitului poate fi scrisă și sub forma

$$\underline{U}_b = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M) \underline{I}, \quad (5-70)$$

unde  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$  și  $\underline{Z}_M = j\omega M$ .

**Exemplul 2.** Se consideră autotransformatorul coborîtor de tensiune (fig. 5-29, a), respectiv ridicător de tensiune (fig. 5-29, b).

La autotransformatorul coborîtor de tensiune cuplajul magnetic între bobina parcursă de curentul  $i_1$  și bobina parcursă de curentul  $i_3$  este adițional și, pe baza schemei electrice reprezentată în partea dreaptă a fig. 5-29, a, se scriu următoarele ecuații:

— în raport cu valorile momentane

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$u_{b1} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{31} \frac{di_3}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (5-71, a)$$

$$u_{b2} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_{13} \frac{di_1}{dt}$$

— în formă complexă

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{U}_{b1} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{31} \underline{I}_3 + R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \quad (5-71, b)$$

$$\underline{U}_{b2} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 = R_3 \underline{I}_3 + j\omega L_3 \underline{I}_3 + j\omega L_{13} \underline{I}_1$$

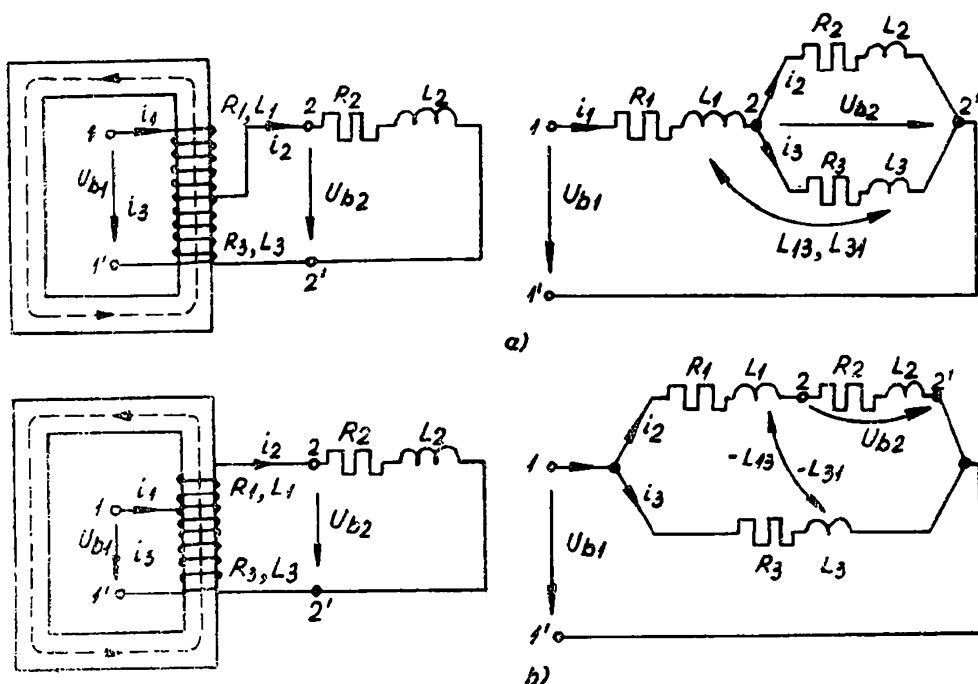


Fig. 5-29. Autotransformatorul coborîtor de tensiune (a) și ridicător de tensiune (b).

În schimb, pentru autotransformatorul ridicător de tensiune cuplajul magnetic între bobina parcursă de curentul  $i_2$  și bobina parcursă de curentul  $i_3$  este în opoziție. În această situație, schema electrică este cea reprezentată în partea dreaptă a fig. 5-29, b, pe baza căreia se obțin ecuațiile:

— în forma referitoare la valorile momentane

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$u_{b1} = R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} - L_{13} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_{b2} = R_2 i_2 + L_1 \frac{di_2}{dt} - L_{31} \frac{di_3}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$
(5-72, a)

— în formă complexă

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{U}_{b1} = R_3 \underline{I}_3 + j\omega L_3 \underline{I}_3 - j\omega L_{13} \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_{b2} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_1 \underline{I}_2 - j\omega L_{31} \underline{I}_3 + R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2$$
(5-72, b)

Dacă se cere să se determine curenții din circuitul autotransformatorului, este avantajos să se folosească forma complexă a ecuațiilor (formă algebrică).

**Exemplul 3.** Se consideră cuplajul magnetic între circuitul primar și circuitul secundar al unui transformator (fig. 5-30, a). Se introduc notațiile  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$  — impedanța circuitului primar,  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$  — impedanța circuitului secundar,  $\underline{Z}_M = j\omega M$  — impedanța de cuplaj magnetic între circuitul primar și cel secundar.

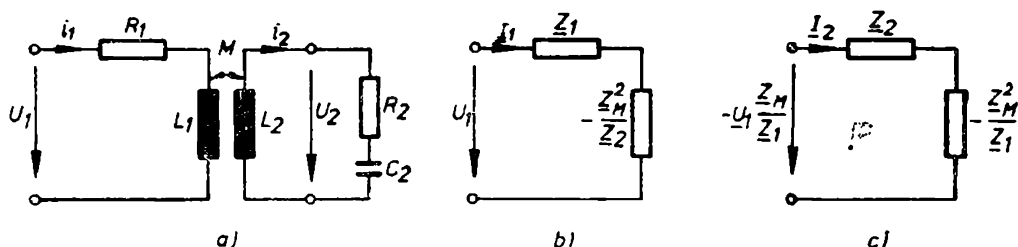


Fig. 5-30. Schemele transformatorului electric.

Ecuațiile în complex ale transformatorului sînt:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2, \quad 0 = \underline{Z}_M \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$
(5-73)

din care rezultă:

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_2},$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{-\underline{U}_1 \underline{Z}_M / \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_1}.$$
(5-74)

Aceste relații ale curenților permit întocmirea schemelor echivalente ale transformatorului redus la primar (fig. 5-30, b), respectiv redus la secundar (fig. 5-30, c).

Mărimea  $\underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_2$  reprezintă *impedanța transpusă* (reflectată) a circuitului secundar la cel primar, iar mărimea  $\underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_1$  reprezintă *impedanța transpusă* a circuitului primar la circuitul secundar.



## 5.7. CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM DE REZONANȚĂ

### 5.7.1. CIRCUIT CU REZONANȚĂ SIMPLĂ DE TENSIUNE

Rezonanța de tensiune poate să apară în circuitele de curent alternativ ce conțin bobine și condensatoare legate în serie. În fig. 5-31, *a* este reprezentată schema electrică a unui astfel de circuit constând dintr-o rezistență  $R$ ,

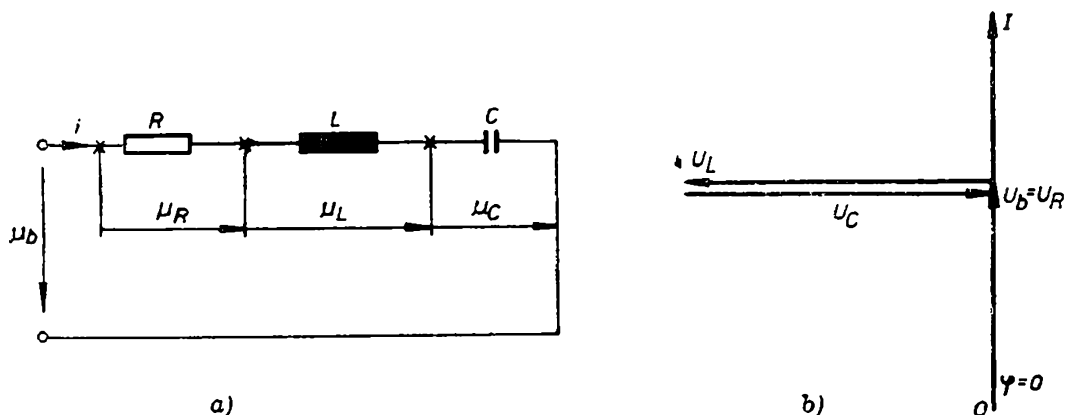


Fig. 5-31. Circuit cu rezonanță simplă de tensiune (a) și diagrama sa (b).

o inductanță  $L$  și o capacitate  $C$  legate în serie. Pentru acest circuit se pot scrie relațiile :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad I = \frac{U_b}{Z}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Valorile efective ale căderilor de tensiune pe cele trei elemente în serie sînt :

$$U_R = RI, \quad U_L = \omega LI \quad \text{și} \quad U_C = \frac{I}{\omega C}.$$

Condiția ca în circuit să apară fenomenul de rezonanță de tensiune este ca  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ , de unde rezultă formula lui Thomson pentru frecvența de rezonanță :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}. \quad (5-75)$$

Cu această condiție îndeplinită, rezultă :

$$Z = R, \quad I = I_0 = \frac{U_b}{R}, \quad \varphi = 0, \quad U_L = U_C.$$

Diagrama circuitului în cazul rezonanței este reprezentată în fig. 5-31, *b*.

Trebuie subliniat faptul că la o tensiune de borne relativ mică pot apare tensiuni  $U_L = U_C$  foarte mari (periculoase pentru izolația bobinei, respectiv pentru dielectricul condensatorului).

Rezonanța de tensiune într-un circuit se poate obține astfel :

— dacă parametrii  $L$  și  $C$  sînt dați, prin alimentarea circuitului cu o tensiune sinusoidală de frecvență  $f_0$  ;

— dacă tensiunea sinusoidală este de frecvență dată, prin modificarea parametrilor  $L$  sau  $C$  , pînă ce condiția de rezonanță (5-75) este satisfăcută.

Pentru studiul rezonanței sînt importante unele mărimi la care ne referim sumar în cele ce urmează.

*Impedanța caracteristică* este egală cu valoarea comună a reactanței inductive și a reactanței capacitive în caz de rezonanță :

$$Z_c = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (5-76)$$

*Factorul de calitate* se exprimă prin raportul dintre impedanța caracteristică și rezistența electrică a circuitului :

$$Q = \frac{Z_c}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} . \quad (5-77)$$

*Factorul de amortizare* se definește prin valoarea inversă a factorului de calitate :

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{Z_c} . \quad (5-78)$$

Raportul dintre curentul din circuit în regim de nerezonanță și curentul la rezonanță este :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U_b}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} : \frac{U_b}{R}$$

sau

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right)^2}} , \quad (5-79)$$

unde  $\varepsilon = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$  .

*Curbele de rezonanță* se obțin reprezentînd raportul  $\frac{I}{I_0}$  în funcție de  $\varepsilon$  (figura 5-32). Analizînd forma acestor curbe se remarcă faptul că la rezonanță, cînd

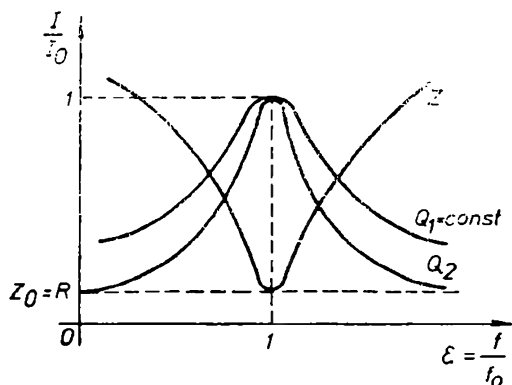


Fig. 5-32. Curbe de rezonanță de tensiune.

$\varepsilon = 1$ , curentul din circuit obține valoare maximă  $I = I_0$ , ceea ce înseamnă că impedanța circuitului este minimă,  $Z = R$ .

*Selectivitatea* este proprietatea circuitului de a conduce la o variație pronunțată a curentului [din circuit] în funcție de frecvență. Un circuit este cu atît mai selectiv, cu cît curba de rezonanță este mai ascuțită.

Fenomenul de rezonanță are la bază oscilația ce apare între energia magnetică

$W_m = \frac{1}{2} i^2 L$  înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei și energia electrică  $W_e = \frac{1}{2} u_c^2 C$  înmagazinată în câmpul electric al condensatorului. Valorile maxime ale acestor energii, corespunzătoare amplitudinilor  $I_m$  și  $U_{cm}$ , sînt egale, ceea ce se poate justifica ținînd seama de relația (5-75).

Un circuit cu rezonanță de tensiune primește de la sursa de tensiune sinusoidală numai energia corespunzătoare pierderilor prin efect Joule-Lenz din circuit. În cazul ideal, cînd  $R=0$ , în circuit nu au loc pierderi și energia absorbită de la sursă este nulă.

Rezonanța de tensiune analizată mai sus se numește simplă din cauză că apare la cel mai simplu circuit electric, respectiv pentru că există o singură valoare a frecvenței pentru care circuitul funcționează în regim de rezonanță.

### 5.7.2. CIRCUIT CU REZONANȚĂ SIMPLĂ DE CURENT

Rezonanța de curent apare în circuitele de curent alternativ ce conțin bobine și condensatoare conectate în paralel. Un astfel de circuit este reprezentat în fig. 5-33, *a*. Tensiunea la bornele elementelor legate în paralel fiind aceeași, se pot scrie pentru valorile efective ale curenților relațiile :

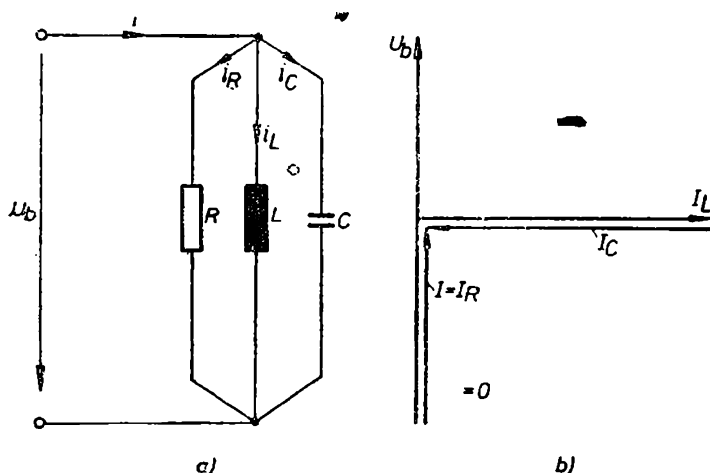


Fig. 5-33. Circuit cu rezonanță simplă de curent (*a*) și diagrama sa (*b*).

$$I_R = \frac{U_b}{R}, \quad I_L = \frac{U_b}{\omega L}, \quad I_C = U_b \omega C, \quad I = U_b Y_e,$$

unde  $Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2}$  este admitanța echivalentă a circuitului.

Defazajul dintre  $U_b$  și  $I$  depinde de raportul dintre susceptanța echivalentă  $B_e$  și conductanța echivalentă  $G_e$  a circuitului :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_e}{G_e} = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}}.$$

Dacă  $B_e=0$ , adică  $I_L=I_C$ , atunci curentul total  $I$  este egal cu  $I_R$  și în fază cu  $U_b$ . În aceste condiții, în circuit are loc rezonanța de curent.

Condiția de rezonanță este îndeplinită pentru o anumită valoare a pulsației pentru care  $B_e = \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0$ , de unde rezultă frecvența de rezonanță (formula lui Thomson) :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (5-80)$$

Dacă condiția de rezonanță este îndeplinită, rezultă  $Y_e = G_e = \frac{1}{R}$ ,  $Z_e = R$ ,  $I_L = I_C$ ,  $I = I_0 = I_R = \frac{U_b}{R}$ ,  $\varphi = 0$ . Pentru această situație, diagrama fazorială a circuitului este cea reprezentată în fig. 5-33, b.

La rezonanță, curenții  $I_L$  și  $I_C$  se exprimă prin relațiile :

$$I_L = I_C = \frac{U_b}{\omega_0 L} = U_b \omega_0 C = Q I_R,$$

unde

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = R \omega_0 C \quad (5-81)$$

este factorul de calitate al circuitului. Dacă  $R > \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ , adică  $Q > 1$ , atunci curenții  $I_L$  și  $I_C$  sînt mai mari decît  $I_R$ , de unde provine și denumirea de *circuit cu rezonanță de curent*.

Caracterizarea proprietății de selectivitate a circuitului cu rezonanță de curent se face pe baza curbei de rezonanță, care reprezintă variația valorii relative  $\frac{I}{I_0}$  a curentului din circuit în raport cu frecvența relativă  $\varepsilon = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Rezultă :

$$I = U_b \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

și

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)^2}. \quad (5-82)$$

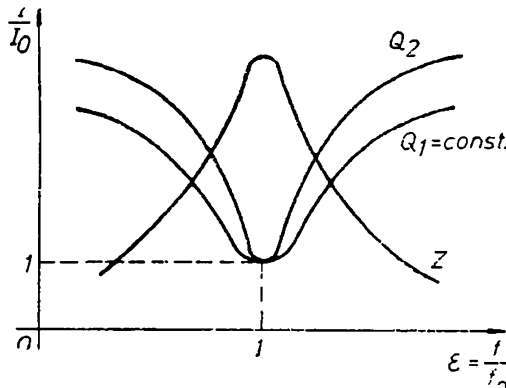


Fig. 5-34. Curbe de rezonanță de curent.

În fig. 5-34 sînt reprezentate două curbe de rezonanță pentru două valori constante ale factorului de calitate  $Q$ . În cazul particular, cînd  $R = \infty$ , curentul absorbit de la sursă în regim de rezonanță este nul, iar impedanța echivalentă a circuitului este infinită. În această situație, în circuit nu există pierderi care să fie acoperite de către sursă. Un astfel de circuit se numește circuit oscilant

ideal, curenții  $I_L$  și  $I_C$  fiind întreținuți prin oscilația dintre energia înmagazinată în câmpul electric al condensatorului și energia câmpului magnetic al bobinei.

Rezonanța de curent analizată mai sus se numește *simplă* pentru că are loc la o singură valoare a frecvenței tensiunii de alimentare.

### 5.7.3. REZONANȚA LA CIRCUITELE ELECTRICE COMPLEXE

La cele două paragrafe precedente s-a arătat că în cazul rezonanței de tensiune, impedanța echivalentă a circuitului obține, pentru frecvența de rezonanță, valoare minimă, curentul din circuit fiind maxim, iar în cazul rezonanței de curent, impedanța echivalentă obține valoare maximă, curentul din circuit fiind minim.

În cazul circuitelor electrice cu elemente în conectare complexă, pot apărea situații (condiții) în care are loc atât rezonanță de tensiune, cât și rezonanță de curent. Condițiile de rezonanță se pot pune sub următoarele aspecte :

— defazajul dintre tensiunea la borne și curentul absorbit de la sursă să fie egal cu zero ;

— impedanța echivalentă a circuitului să fie minimă (rezonanță de tensiune) sau maximă (rezonanță de curent).

Pe baza acestor condiții pot rezulta mai multe valori ale frecvenței pentru care circuitul funcționează în regim de rezonanță (rezonanță multiplă).

**Aplicația 5-4.** O bobină avînd rezistența  $R=6 \Omega$  și reactanța  $X_L=\omega L=8 \Omega$  este alimentată de la o sursă de curent alternativ de frecvență industrială  $f=50$  Hz. Să se determine capacitatea  $C$  care trebuie legată în paralel cu bobina pentru ca în circuit să apară rezonanța de curent.

**Rezolvare.** Circuitul considerat are schema din fig. 5-35. Conductanța și susceptanța echivalentă a circuitului sînt :

$$G_e = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}, \quad B_e = -\omega C + \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2},$$

unde  $\omega = 2\pi f = 314$ .

Condiția ca în circuit să apară rezonanță de curent este :  $B_e = 0$ , adică :

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2},$$

de unde rezultă :

$$C = \frac{1}{\omega} \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{314} \frac{8}{6^2 + 8^2} = 254 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$$

### 5.7.4. FEROREZONANȚA

Fenomenul de ferorezonanță apare în circuitele de c.a. ce conțin bobine cu miez de fier saturat (neliniare) și condensatoare. Circuitul este cu *ferorezonanță de tensiune* la conectarea în serie, respectiv cu *ferorezonanță de curent* la conectarea în paralel a

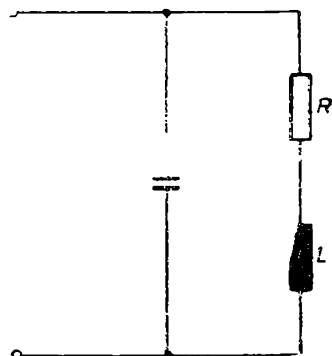


Fig. 5-35. Circuit rezonant.

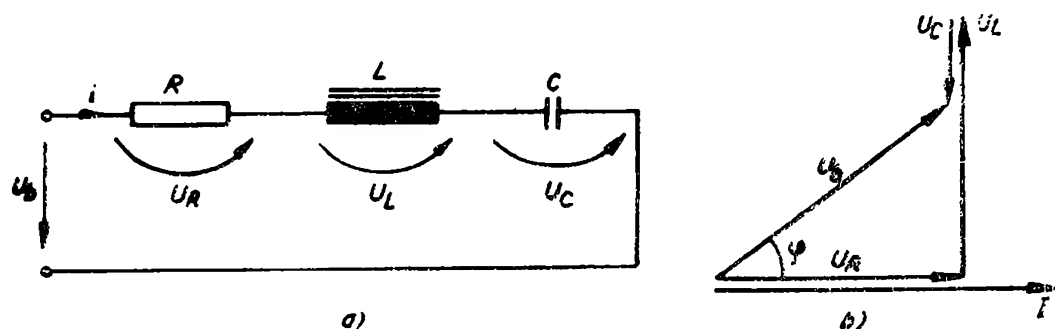


Fig. 5-36. Circuit cu ferorezonanță de tensiune (a) și diagrama sa (b).

bobinei și condensatorului. În cele ce urmează ne referim numai la ferorezonanța de tensiune.

Se consideră circuitul realizat dintr-un rezistor, o bobină cu miez și un condensator conectate în serie (fig. 5-36, a) la bornele cărui se aplică tensiunea sinusoidală cu valoarea efectivă  $U_b$ . Datorită bobinei neliniare, curentul  $I$  din circuit este nesinusoidal, avînd armonica fundamentală  $I_1$  și armonici superioare. În fig. 5-36, b este reprezentată diagrama fazorială a acestui circuit, cu referire la valorile efective ale tensiunilor și a armonicii fundamentale a curentului ( $I_1 \cong I$ ).

Fenomenul de ferorezonanță de tensiune constă în variații în salt și foarte mari ale curentului  $I$  din circuit, precum și a defazajului dintre curent și tensiune la variații lente, crescătoare și descrescătoare, ale tensiunii la borne. Pentru a explica acest fenomen se ține seama de caracteristicile volt-ampere ale celor trei elemente legate în serie și reprezentate în fig. 5-37. De asemenea, se ține seama de relația dintre tensiuni dedusă pe baza diagramei din fig. 5-36, b :

$$U_b = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (5-83)$$

Curentul  $I$  din circuit se modifică în funcție de tensiunea  $U_b$  conform curbei  $OACB$  din fig. 5-37, construită pe baza relației (5-83). Majorînd treptat tensiunea la borne, punctul de funcționare se deplasează din  $O$  spre  $A$  și apoi, printr-un salt de curent, trece în  $B$ , continuîndu-se deplasarea sa în lungul curbei. Această variație bruscă a curentului din circuit este însoțită și de o variație bruscă a defazajului deoarece, pînă în punctul  $A$  avem  $U_L > U_C$ , iar în punctul  $B$  avem  $U_L < U_C$ . Pentru valori descrescătoare ale tensiunii la borne, punctul de funcționare se deplasează pe caracteristica volt-ampere a circuitului de la  $B$  pînă în punctul  $C$  și, mai departe, prin salt trece în  $D$ . Și acest salt de curent este însoțit de o variație bruscă a fazei.

Dacă circuitul este fără pierderi ( $R=0$ ), iar tensiunea la borne și curentul sînt sinusoidale (neglijînd armonicile superioare), atunci punctul  $C$  se situează pe axa absciselor, obținîndu-se caracteristica volt-ampere a circuitului trasată punctat în fig. 5-37.

Circuitele cu ferorezonanță de tensiune sînt folosite la construcția stabilizatoarelor de tensiune. În adevăr, pe porțiunea  $CB$  a caracteristicii, corespunzătoare zonei saturate a miezului bobinei, tensiunea  $U_L$  la bornele bobinei este

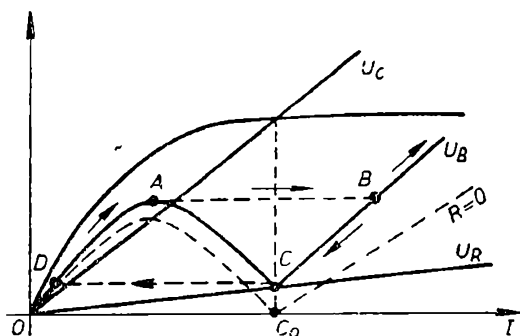


Fig. 5-37. Curbe de ferorezonanță de tensiune.

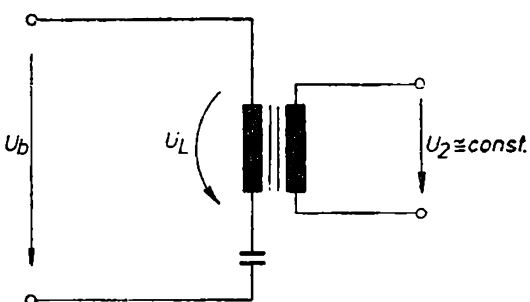


Fig. 5-38. Schema electrică a unui stabilizator de tensiune cu ferorezonanță.

aproximativ constantă, cu toate că tensiunea  $U_b$  de la bornele circuitului se modifică între limite destul de mari. În fig. 5-38 este reprezentată schema electrică a stabilizatorului cu ferorezonanță de tensiune.

## 5.8. PUTEREA LA CIRCUITELE MONOFAZATE ÎN REGIM SINUSOIDAL

La circuitele și rețelele de c.a. în regim sinusoidal intervin trei forme ale puterii : puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă.

### 5.8.1. PUTEREA ACTIVĂ

Într-un circuit monofazat alimentat cu tensiunea  $u_b = \sqrt{2}U_b \sin \omega t$  și parcurs de curentul  $i = \sqrt{2}I \sin (\omega t - \varphi)$ , puterea electromagnetică instantanee este :

$$p = u_b i = \sqrt{2}U_b \sqrt{2}I \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = U_b I \cos \varphi - U_b I \cos (2\omega t - \varphi). \quad (5-84)$$

În fig. 5-39 este reprezentată variația în timp a puterii electromagnetice  $p = u_b i$ . Se remarcă faptul că în decursul unei perioade puterea electromagnetică instantanee obține atât valori pozitive, cât și valori negative. Când puterea electromagnetică instantanee este pozitivă, fluxul de energie electromagnetică este dirijat de la sursă spre receptor, iar când este negativă, fluxul de energie este dirijat de la receptor spre sursă.

Se numește *putere activă*, notată cu  $P$ , valoarea medie a puterii electromagnetice instantanee pe un interval de timp egal cu o perioadă, adică :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = U_b I \cos \varphi, \quad (5-85)$$

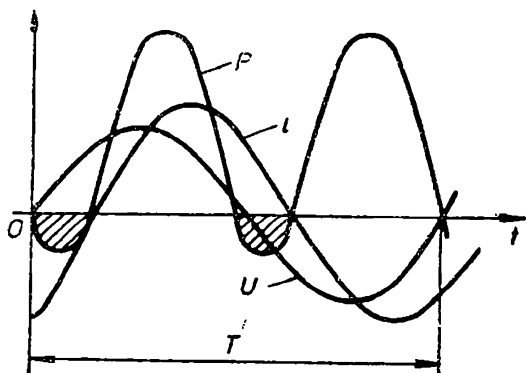


Fig. 5-39. Variația în timp a puterii electromagnetice instantanee  $p$ .

unde s-a ținut seama că valoarea medie pentru o perioadă a celui de-al treilea termen din expresia lui  $p$  (relația 5-84) este zero.

Deci, în regim sinusoidal, puterea activă este egală cu produsul dintre valoarea efectivă a tensiunii la borne  $U_b$ , valoarea efectivă a curentului  $I$  din circuit și cosinusul unghiului de defazaj dintre  $U_b$  și  $I$ . Deoarece  $\cos \varphi$  este maxim cînd  $\varphi = 0$ , rezultă că puterea activă este maximă într-un circuit în care curentul este în fază cu tensiunea și este nulă cînd  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Folosindu-ne de componenta activă  $I_a = I \cos \varphi$  a curentului și de relațiile :  $U_b = IZ$ ,  $I = U_b Y$ ,  $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{G}{Y}$ , rezultă și următoarele forme de exprimare a puterii active :

$$P = U_b I_a = R I^2 = G U_b^2, \quad (5-86)$$

din care se vede că puterea activă este întotdeauna o mărime pozitivă.

Unitatea de măsură a puterii active în sistemul de unități MKSA se numește watt (simbol W).

*Energia activă* este integrala în raport cu timpul a puterii active :

$$W = \int P dt \quad (5-87)$$

și se măsoară în watt-secunde [Ws], watt-ore [Wh] sau kilowatt-ore [kWh].

Dacă  $P = \text{const.}$  în intervalul de timp considerat, atunci energia activă este :  $W = Pt = U_b I \cos \varphi t$ .

## 5.8.2. PUTEREA REACTIVĂ

Pentru a defini puterea reactivă se procedează în felul următor : valoarea momentană a tensiunii  $u_b = U_{bm} \sin \omega t$  aplicată la bornele circuitului se descompune în două componente :

$$u_b = u_{ba} + u_{br},$$

unde  $u_{ba}$  este componenta activă, în fază cu curentul  $i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$ , iar  $u_{br}$  este în cuadratură față de curent (fig. 5-40). Expresiile acestor componente sînt :

$$u_{ba} = U_{bam} \sin (\omega t - \varphi) = U_{bm} \cos \varphi \sin (\omega t - \varphi),$$

$$u_{br} = U_{brm} \sin \left( \omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = U_{bm} \sin \varphi \cos (\omega t - \varphi).$$

Cu aceste componente, puterea electromagnetică instantanee este :

$$\begin{aligned} p &= u_b i = u_{ba} i + u_{br} i = U_{bm} I_m \cos \varphi \sin^2 (\omega t - \varphi) + \\ &+ U_{bm} I_m \sin \varphi \cos (\omega t - \varphi) \sin (\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_{bm} I_m}{2} \cos \varphi [1 - \cos 2 (\omega t - \varphi)] + \\ &+ \frac{U_{bm} I_m}{2} \sin \varphi \sin 2 (\omega t - \varphi), \text{ adică } p = p_i + p_r, \end{aligned}$$

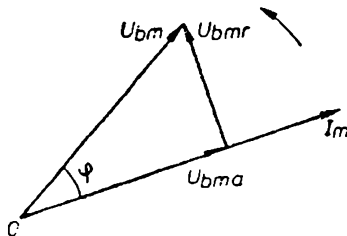


Fig. 5-40. Diagrama fazorială a componentelor activă și reactivă ale tensiunii la borne.



unde

$$p_i = \frac{U_{bm}}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi [1 - \cos 2(\omega t - \varphi)] = U_b I \cos \varphi [1 - \cos 2(\omega t - \varphi)]$$

este puterea instantanee de pulsație, iar

$$p_r = \frac{U_{bm}}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sin \varphi \sin 2(\omega t - \varphi) = U_b I \sin \varphi \sin 2(\omega t - \varphi)$$

este puterea oscilantă, care oscilează între sursă și receptor.

Puterea reactivă, notată cu  $Q$ , se definește ca fiind egală cu amplitudinea puterii oscilante:

$$Q = U_b I \sin \varphi. \quad (5-88)$$

Deci, puterea reactivă este egală cu produsul dintre valorile efective ale tensiunii la borne  $U_b$ , curentului  $I$  din circuit și sinusul unghiului de defazaj dintre  $U_b$  și  $I$ . Trebuie reținut faptul că puterea reactivă nu reprezintă media vreunei componente a puterii electromagnetice instantanee.

Folosind componenta reactivă a curentului  $I_r = I \sin \varphi$  și relațiile  $U_b = IZ$ ,  $I = U_b Y$ ,  $\sin \varphi = \frac{X}{Z} = \frac{B}{Y}$ , rezultă și următoarele forme de exprimare a puterii reactive:

$$Q = U_b I_r = X I^2 = B U_b^2. \quad (5-89)$$

Dacă receptorul are caracter inductiv  $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ , atunci  $Q > 0$ , ceea ce înseamnă că în circuit se consumă puterea reactivă. În schimb, dacă receptorul are caracter capacitiv  $(-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0)$  atunci  $Q < 0$ , ceea ce înseamnă că în circuit se produce putere reactivă. Dacă receptorul este pur ohmic, adică  $\varphi = 0$ , puterea reactivă este nulă.

Unitatea de măsură pentru puterea reactivă este numită volt-ampere-reactiv (simbol VAr). Această denumire a fost adoptată de către Comitetul Electrotehnic Internațional la propunerea profesorului român C. Budeanu.

Corespunzător puterii reactive și într-un interval de timp se obține *energia reactivă*:

$$W_r = \int Q \, dt. \quad (5-90)$$

Dacă  $Q = \text{const.}$  în intervalul de timp considerat, atunci  $W_r = Qt = U_b I \sin \varphi t$ .

Unitatea de măsură pentru energia reactivă este volt-ampere-reactiv-secundă [VArh] sau kilovolt-ampere-reactiv-oră [kVArh].

### 5.8.3. PUTEREA APARENTĂ

Puterea aparentă  $S$  în regim sinusoidal este o mărime definită prin relația:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U_b I, \quad (5-91)$$

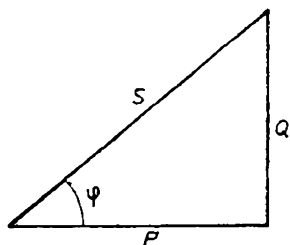
unde s-a ținut seama de relațiile (5-85) și (5-88).

Puterea aparentă se măsoară în volt-ampere [VA], cu multiplii kVA și MVA.

Ținând seama de relațiile  $U_b = IZ$  și  $I = U_b Y$ , puterea aparentă se mai poate exprima și în felul următor :

$$S = ZI^2 = YU_b^2. \quad (5-92)$$

Relația (5-91) dintre puteri permite construirea unui triunghi dreptunghic (fig. 5-41), denumit *triunghiul puterilor*, din care rezultă :



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}, \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}, \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S}. \quad (5-93)$$

#### 5.8.4. REPREZENTAREA ÎN COMPLEX A PUTERILOR

Se consideră un circuit electric la bornele căruia se aplică tensiunea sinusoidală  $u_b = \sqrt{2}U_b \sin(\omega t + \alpha)$  și care este parcurs de curentul  $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$  defazat cu unghiul  $\varphi$  față de tensiune. Exprimiind în complex simplificat aceste două mărimi sinusoidale, se obțin următoarele mărimi complexe, respectiv complex conjugate :

$$\underline{U}_b = U_b e^{j\alpha}; \quad \underline{U}_b^* = U_b e^{-j\alpha}, \\ \underline{I} = I e^{j(\alpha - \varphi)}; \quad \underline{I}^* = I e^{-j(\alpha - \varphi)}.$$

Puterea aparentă se poate exprima în complex în următoarele două moduri :

$$\underline{S} = \underline{U}_b \underline{I}^* = U_b I e^{j\varphi} = U_b I \cos \varphi + j U_b I \sin \varphi = P + jQ, \quad (5-94, a)$$

$$\underline{S} = \underline{U}_b^* \underline{I} = U_b I e^{-j\varphi} = U_b I \cos \varphi - j U_b I \sin \varphi = P - jQ. \quad (5-94, b)$$

Conform acestor relații se obține reprezentarea în planul complex a puterilor ca în fig. 5-42.

Relația (5-94, a) de exprimare în complex a puterii aparente se folosește în cazul circuitelor în serie, unde curentul este același, deci există o singură valoare complexă conjugată a acestuia. În schimb, relația (5-94, b) se folosește la circuitele în paralel, unde tensiunea la borne este aceeași.

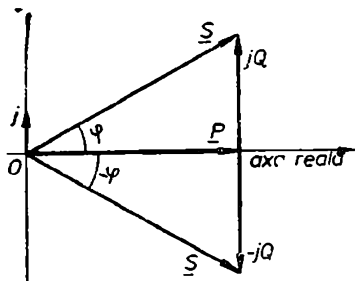


Fig. 5-42. Reprezentarea în planul complex a puterii aparente.

Pe baza celor de mai sus, puterea activă și reactivă se pot exprima prin partea reală, respectiv imaginară a puterii aparente complexe :

$$P = \operatorname{Re} \{ \underline{U}_b \underline{I}^* \} = \operatorname{Re} \{ \underline{U}_b^* \underline{I} \}; \quad Q = \operatorname{Im} \{ \underline{U}_b \underline{I}^* \} = - \operatorname{Im} \{ \underline{U}_b^* \underline{I} \} \quad (5-95)$$

### 5.9. FACTORUL DE PUTERE ȘI IMPORTANȚA SA TEHNICO-ECONOMICĂ

Se consideră un receptor monofazat alimentat de la o sursă de energie prin intermediul unei linii de transport ce are rezistența electrică  $R_L$ . Pierderile prin efect Joule-Lenz pe linie,  $R_L I^2$ , depind de curentul  $I$  al receptorului. Pute-

rea activă  $P = U_b I \cos \varphi$  a receptorului depinde atât de curentul  $I$  cît și de defazajul  $\varphi$  dintre tensiune și curent (considerînd  $U_b = \text{const.}$ ).

Raportul dintre puterea activă  $P$  și puterea activă maximă  $P_{max}$ , corespunzătoare aceluiași pierderi prin efect Joule-Lenz pe linie, se numește *factor de putere*. Deoarece în regim sinusoidal puterea activă maximă este egală cu puterea aparentă ( $P_{max} = S$ ), rezultă :

$$\Delta = \frac{P}{P_{max}} = \frac{P}{S} = \frac{U_b I \cos \varphi}{U_b I} = \cos \varphi, \quad (5-96)$$

adică factorul de putere este egal cu factorul de defazaj  $\cos \varphi$ .

Din expresia puterii active se vede că pentru  $P = \text{const.}$  și  $U_b = \text{const.}$  curentul  $I$  variază invers proporțional cu factorul de putere. Aceasta rezultă și din figura 5-43 în care este reprezentată diagrama fazorială a tensiunii și curentului pentru trei valori ale defazajului, respectiv ale factorului de putere. Se poate scrie :

$$P = U_b I \cos \varphi = U_b I' \cos \varphi' = U_b I'' \cos \varphi''.$$

Valoarea minimă a curentului, respectiv a pierderilor pe linie și în generatoarele electrice, corespund la un factor de putere egal cu unitatea. Evident, pierderile sînt cu atît mai mari cu cît  $I$  este mai mare, deci cu cît  $\cos \varphi$  este mai mic. În consecință, cu cît factorul de putere al receptoarelor este mai mare, cu atît generatoarele din centrale și liniile de transport pot fi încărcate cu o putere activă mai mare.

Așadar, din punct de vedere tehnico-economic, este rațional a avea la receptoare un factor de putere cît mai apropiat de unitate, pe de o parte, pentru a reduce pierderile de putere, iar pe de altă parte, pentru a folosi eficient generatoarele și liniile de transport.

Întreprinderile furnizoare de energie electrică (uzinele electrice) impun întreprinderilor consumatoare să funcționeze cu un factor de putere cît mai mare, adică cît mai apropiat de unitate. Dacă factorul de putere mediu al întreprinderii are o valoare sub cea stabilită, întreprinderea este obligată să plătească o penalizare, care face ca prețul de cost al produselor realizate să crească.

Factorul de putere al întreprinderii consumatoare de energie electrică se schimbă în timp datorită faptului că se conectează și se deconectează de la rețea anumite instalații, motoare electrice etc. Din acest motiv este necesar să se determine un *factor de putere mediu* în raport cu o anumită perioadă, de obicei o lună. Valoarea medie a factorului de putere se obține astfel : cu un contor de energie electrică activă se măsoară energia activă  $W$  din intervalul de timp  $t$ , iar cu un contor de energie reactivă se măsoară, pentru același interval de timp, energia reactivă  $W_r$ , cu care se calculează :

$$(\text{tg} \varphi)_{med} = \frac{U_b (I \sin \varphi)_{med} t}{U_b (I \cos \varphi)_{med} t} = \frac{W_r}{W},$$

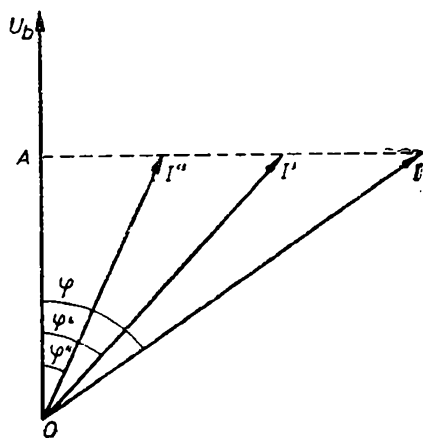


Fig. 5-43. Modificarea curentului și defazajului cînd  $P = \text{const.}$

cu care se obține :

$$(\cos \varphi)_{med} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg}^2 \varphi)_{med}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{W_r}{W}\right)^2}}. \quad (5-97)$$

Factorul de putere mediu se poate determina pentru întreaga întreprindere, pentru o secție, un atelier sau chiar pentru un singur agregat, dependent de locul unde se montează contoarele de energie activă și reactivă.

Factorul de putere al consumatorilor poate fi îmbunătățit prin măsuri tehnico-organizatorice care vizează micșorarea sau compensarea puterii reactive. Principalele măsuri care se iau în acest sens sînt următoarele :

— limitarea mersului în gol al receptoarelor de putere reactivă (motoare asincrone, transformatoare de sudură etc.) ;

— funcționarea motoarelor și transformatoarelor la o sarcină cit mai apropiată de cea nominală, eventual înlocuirea lor dacă sînt supradimensionate ;

— înlocuirea motoarelor asincrone prin motoare sincrone sau sincronizarea motoarelor asincrone de la instalațiile care permit acest lucru (pompe, ventilatoare, compresoare etc., care au o funcționare continuă) ;

— folosirea bateriilor de condensatoare statice pentru îmbunătățirea factorului de putere ;

— folosirea unor compensatoare sincrone (motoare sincrone ce funcționează în gol, supraexcitate).

În cele ce urmează ne referim la îmbunătățirea factorului de putere cu ajutorul condensatoarelor.

Se consideră un receptor avînd parametrii  $R$ ,  $L$ ,  $C$  în serie și puterea activă  $P = U_b I \cos \varphi$ . Impedanța circuitului și factorul de putere sînt :

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}.$$

Considerîndu-se  $X > 0$ , deci  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , curentul  $I$  este defazat cu unghiul  $\varphi$  în urma tensiunii  $U_b$  (fig. 5-44, b).

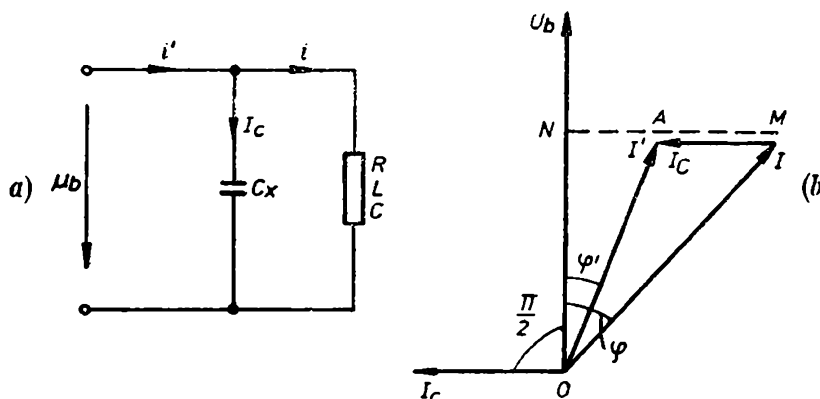


Fig. 5-44. Schema de legare a condensatorului (a) și diagrama curenților (b).

Problema care se pune este de a îmbunătăți factorul de putere de la  $\cos \varphi$  la  $\cos \varphi'$ , deci de a micșora unghiul de defazaj dintre  $U_b$  și  $I$  de la  $\varphi$  la  $\varphi'$ . Pentru aceasta, în paralel cu receptorul se leagă un condensator de capacitate  $C_x$ , care va absorbi curentul  $I_C = U_b \omega C_x$  defazat cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea lui  $U_b$ . Pe linie se obține un curent total  $I' = \widehat{I + I_C}$  (sumă geometrică). De remarcat că puterea activă nu se modifică prin legarea în paralel a condensatorului.

Valoarea capacității  $C_x$  se determină în funcție de puterea  $P$  și tensiunea  $U_b$ . Din fig. 5-44, *b*, ținând seama de scările folosite, se poate scrie :

$$I_C = MA = MN - AN = ON \operatorname{tg} \varphi - ON \operatorname{tg} \varphi' = ON (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = \\ = I \cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')$$

sau

$$I_C = \frac{P}{U_b} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = U_b \omega C_x,$$

de unde rezultă capacitatea  $C_x$  :

$$C_x = \frac{P}{\omega U_b^2} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'). \quad (5-98)$$

Se remarcă faptul că cu cât  $U_b$  este de valoare mai mare, cu atât rezultă o capacitate  $C_x$  de valoare mai mică.

Condensatoarele industriale folosite pentru îmbunătățirea factorului de putere au ca date nominale : capacitatea  $C$ , în F, tensiunea de lucru  $U$ , în volt, puterea reactivă  $Q = U^2 \omega C$ , în kVA, tensiunea de încercare, în kV.

**Aplicația 5-5.** La bornele unui circuit format din impedanțele  $\underline{Z}_1 = (8 + j5) \Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = (12 - j6) \Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = (4 + j9) \Omega$  legate în serie se aplică tensiunea  $U_s = 120$  V. Să se determine curentul din circuit, factorul de putere și puterile activă, reactivă și aparentă.

*Rezolvare.* Impedanța echivalentă a circuitului este :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (24 + j8) \Omega.$$

Considerind tensiunea  $\underline{U}_b = U_b$  ca origine a fazelor (situată pe axa reală), rezultă curentul exprimat în complex simplificat :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}} = \frac{120}{24 + j8} = (4,5 - j1,5) \text{ A}, \quad I = 4,8 \text{ A}.$$

Factorul de putere este :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{24}{\sqrt{24^2 + 8^2}} = 0,923.$$

Puterile activă, reactivă și aparentă sînt :

$$P = U_b I \cos \varphi = 120 \cdot 4,8 \cdot 0,923 = 481,65 \text{ W},$$

$$Q = U_b I \sin \varphi = 120 \cdot 4,8 \cdot 0,304 = 175,1 \text{ VA},$$

$$S = U_b I = 120 \cdot 4,8 = 576 \text{ VA}.$$

Se poate verifica următoarea relație între puteri :

$$S^2 = P^2 + Q^2.$$

## Capitolul 6

### REȚELE ELECTRICE TRIFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

#### 6.1. NOȚIUNI GENERALE

##### 6.1.1. REȚEA TRIFAZATĂ SISTEM TRIFAZAT DE TENSIUNI ȘI DE CURENȚI

Ansamblul constituit din  $m$  circuite electrice monofazate în care acționează  $m$  tensiuni electromotoare de aceeași frecvență, dar cu faze inițiale diferite se numește *rețea electrică polifazăată*. Sistemele electroenergetice sînt constituite aproape în exclusivitate din rețele electrice *trifazate* ( $m=3$ ).

Tensiunile, respectiv curenții, din rețeaua trifazăată constituie sistemul trifazat de tensiuni, respectiv sistemul trifazat de curenți. Dacă valorile efective (sau amplitudinile) tensiunilor trifazate sînt egale și dacă defazajele dintre oricare două tensiuni succesive sînt egale cu  $\frac{2\pi}{3}$  ( $120^\circ$ ), atunci sistemul trifazat de tensiuni este *simetric*. Dacă una sau ambele din aceste condiții nu sînt îndeplinite, sistemul de tensiuni este *nesimetric*. Aceste definiții sînt valabile și pentru curenții trifazați.

Schița unui generator sincron trifazat cu o pereche de poli ( $p=1$ ), folosit în centralele electrice pentru producerea de t.e.m. trifazate este reprezentată în fig. 6-1. Bobinele 1, 2 și 3 a celor trei faze sînt decalate în spațiu una față de alta cu  $120^\circ$ , ceea ce face ca t.e.m. induse în aceste bobine de către cîmpul magnetic al rotorului (inductorului), ce se rotește cu turația constantă  $n$ , să fie defazate în timp cu același unghi.

Valorile momentane (instantanee) ale tensiunilor trifazate simetrice se exprimă prin relațiile :

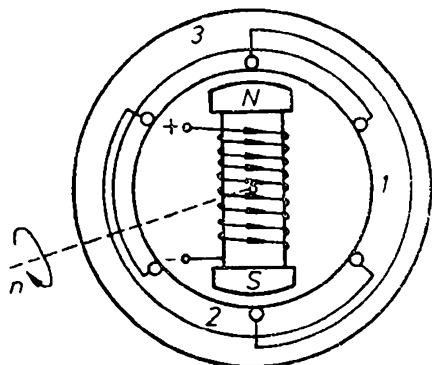


Fig. 6-1. Schița generatorului sincron trifazat cu o pereche de poli de excitație.

$$u_1 = U_{1m} \sin \omega t, \quad u_2 = U_{2m} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$u_3 = U_{3m} \sin \left( \omega t - 2 \frac{2\pi}{3} \right)$$

unde  $U_{1m} = U_{2m} = U_{3m}$  (sau ca valori efective  $U_1 = U_2 = U_3$ ). Reprezentarea liniară a acestor tensiuni este arătată în fig. 6-2, *a* iar diagrama fazorială în fig. 6-2, *b*.

Utilizînd scrierea în complex simplificat și considerînd tensiunea  $\underline{U}_1$  situată pe axa reală

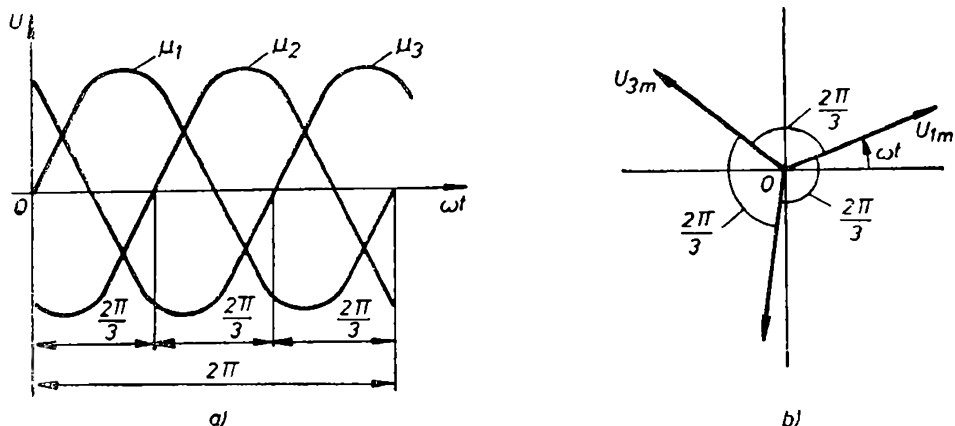
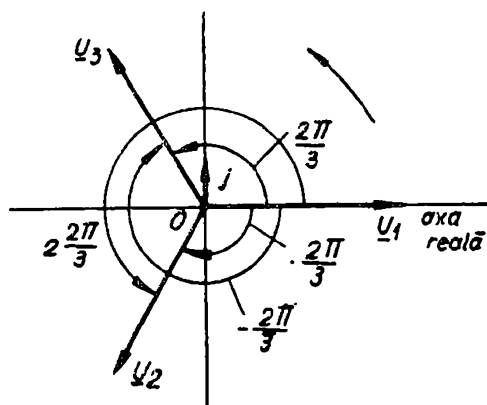


Fig. 6-2. Diagrammele liniară (a) și fazorială (b) ale sistemului de tensiuni trifazate simetrice.

Fig. 6-3. Diagrama în planul complex a sistemului de tensiuni trifazate simetrice.



(fig. 6-3), cele trei tensiuni trifazate simetrice se exprimă prin relațiile :

$$\underline{U}_1 = U_1 e^{j0} = U_1, \quad \underline{U}_2 = U_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}} = U_2 e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad \underline{U}_3 = U_3 e^{j\frac{2\pi}{3}} = U_3 e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \quad (6-2)$$

de unde, avînd în vedere că  $U_1 = U_2 = U_3$ , rezultă :

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0. \quad (6-3)$$

Un sistem trifazat de tensiuni (curenți) simetric poate fi cu *succesiune directă* (fig. 6-4, a) sau cu *succesiune inversă* (fig. 6-4, b). La sistemul cu succesiune directă, pentru ca tensiunea  $\underline{U}_{2a}$  să se suprapună peste  $\underline{U}_{1a}$  trebuie rotită cu  $\frac{2\pi}{3}$  radiani în sens trigonometric direct și, la fel, pentru ca  $\underline{U}_{3a}$  să se suprapună peste  $\underline{U}_{2a}$ . În schimb, la sistemul de succesiune inversă, pentru ca tensiunea  $\underline{U}_{2i}$  să se suprapună peste  $\underline{U}_{1i}$ , respectiv  $\underline{U}_{3i}$  să se suprapună peste  $\underline{U}_{2i}$ , trebuie efectuată rotirea în sens invers sensul trigonometric cu  $\frac{2\pi}{3}$  radiani.

O posibilitate intuitivă de a aprecia succesiunea directă și cea inversă este următoarea : fie un observator care se situează în punctul  $P$  (fig. 6-4) și urmă-

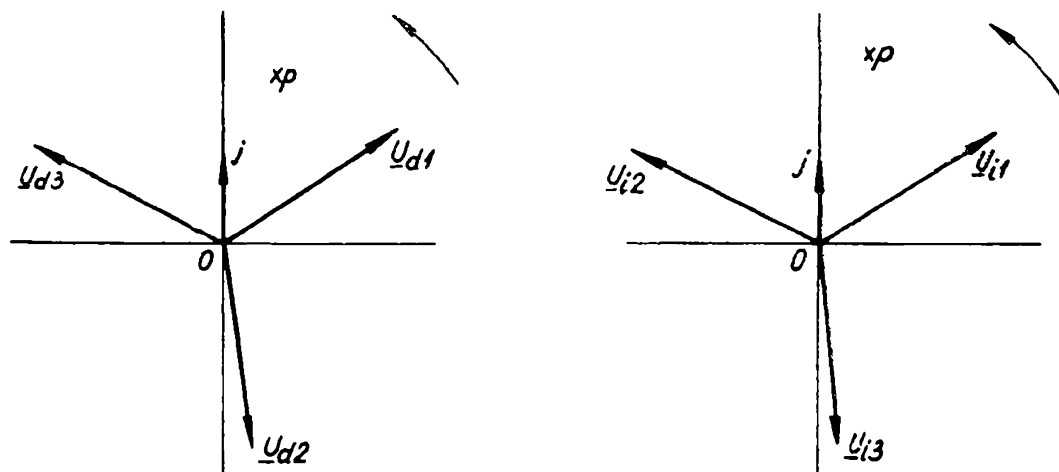


Fig. 6-4. Tensiuni trifazate cu succesiune directă (a) și cu succesiune inversă (b).

rește ordinea în care trec prin fața sa tensiunile  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$  ce se rotesc în sensul trigonometric. Dacă această ordine este 1, 2, 3, 1, 2, ..., sistemul este cu succesiune directă, iar dacă ordinea este 1, 3, 2, 1, 3, ..., sistemul este cu succesiune inversă.

Folosind mărimea complexă de modul egal cu unitatea și argument egal cu  $\frac{2\pi}{3}$ :

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (6-4)$$

rezultă următoarele relații pentru tensiunile de succesiune directă, respectiv de succesiune inversă simetrice:

$$\underline{U}_{2a} = \underline{a}^2 \underline{U}_{1a}, \quad \underline{U}_{3a} = \underline{a} \underline{U}_{1a}; \quad (6-5)$$

$$\underline{U}_{2i} = \underline{a} \underline{U}_{1i}, \quad \underline{U}_{3i} = \underline{a}^2 \underline{U}_{1i}. \quad (6-6)$$

Un receptor sau, în general, un consumator trifazat este *echilibrat* atunci cînd impedanțele pe cele trei faze sînt egale. În caz contrar, receptorul (consumatorul) trifazat este *neechilibrat*. Precizăm că prin noțiunea de consumator se înțelege un grup de receptoare de energie electrică.

### 6.1.2. CONEXIUNEA FAZELOR

Conexiunile de bază ale fazelor generatoarelor și receptoarelor trifazate sînt: conexiunea în stea și conexiunea în triunghi. Pentru a explica mai ușor aceste conexiuni, se consideră în fig. 6-5 un generator trifazat ce alimentează un receptor trifazat prin intermediul unei linii de transport de energie electrică. Cele trei faze ale generatorului, respectiv ale receptorului, sînt considerate ca trei circuite monofazate independente. Începuturile fazelor generatorului se notează cu  $A, B$  și  $C$ , iar sfîrșiturile cu  $x, y$  și  $z$ , fixarea acestor începuturi și sfîrșituri făcîndu-se



în funcție de sensul în care acționează tensiunile electromotoare induse  $\underline{U}_{g1}$ ,  $\underline{U}_{g2}$  și  $\underline{U}_{g3}$ . La receptor se notează cu 1, 2 și 3 bornele de intrare (început) și cu 1', 2' și 3' bornele de ieșire (sfârșit) ale impedanțelor  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  și  $\underline{Z}_3$  de pe cele trei faze.

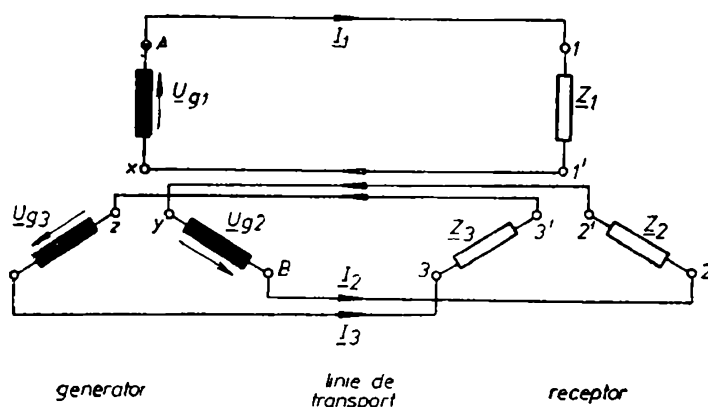


Fig. 6-5. Reprezentarea prin circuite monofazate a rețelei electrice trifazate.

Conexiunea fazelor ca în fig. 6-5 este neeconomică, deoarece linia de transport constă din  $3 \times 2 = 6$  conductoare.

Conexiunea în stea a celor trei faze ale generatorului (sau receptorului) se realizează legînd împreună sfîrșiturile  $x, y, z$  ( $1', 2', 3'$ ), așa cum este arătat în fig. 6-6, unde se prezintă și schemele uzuale pentru această conexiune.

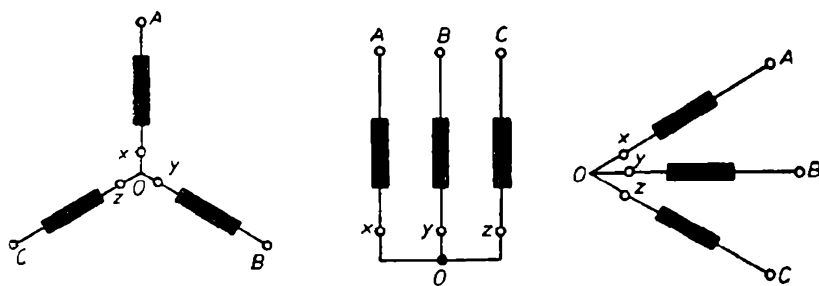


Fig. 6-6. Conexiunea în stea.

Punctul în care se unesc cele trei faze se numește *punct de nul* ( $O, O'$ ). Simbolic, conexiunea în stea se notează cu  $Y$  (sau  $Y'$ ).

Conexiunea în triunghi a celor trei faze ale generatorului (sau ale receptorului) se realizează legînd împreună sfîrșitul primei faze cu începutul fazei a doua, sfîrșitul fazei a doua cu începutul fazei a treia și sfîrșitul fazei a treia cu începutul fazei întîii, așa cum se arată în fig. 6-7, unde se reprezintă și schemele uzuale ale acestei conexiuni. Simbolic, conexiunea în triunghi se notează cu  $\Delta$ . Se remarcă faptul că la conexiunea în triunghi nu există punct nul.

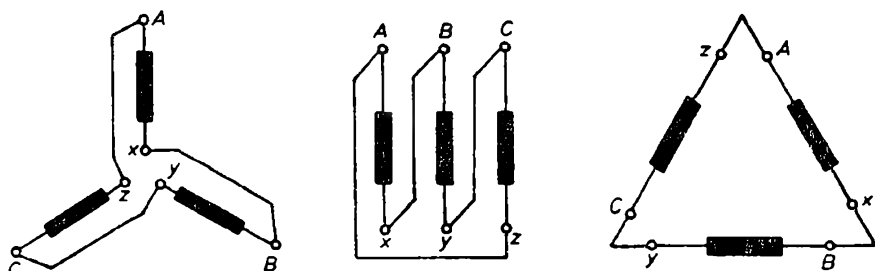


Fig. 6-7. Conexiunea în triunghi.

Folosind conexiunea în stea sau în triunghi a fazelor, în locul schemei din fig. 6-5 se obțin schemele din fig. 6-8, pentru care numărul conductorilor liniei de transport este de 4 sau 3.

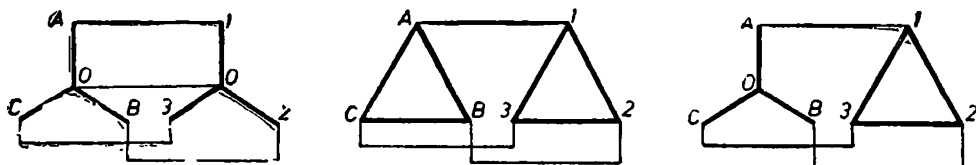


Fig. 6-8. Scheme de conectare ale fazelor pentru sursă și pentru receptor.

## 6.2. TENSIUNILE ȘI CURENȚII LA CONEXIUNILE ÎN STEA ȘI ÎN TRIUNGHI A FAZELOR

Atât la conexiunea în stea, cât și la conexiunea în triunghi a fazelor sursei sau receptorului intervin următoarele tensiuni și curenți :

*Tensiunea de fază*, este egală cu diferența de potențial între începutul și sfârșitul fazei respective.

*Tensiunea de linie* (înlănțuită) este egală cu diferența de potențial între începuturile a două faze. Această tensiune apare între conductoarele (fazele) liniei de transport de energie.

*Curentul de fază* este curentul care circulă prin înfășurarea unei faze a sursei sau prin impedența care formează o fază a receptorului.

*Curentul de linie* este curentul care circulă prin conductoarele liniei de transport între sursă și consumator (receptor).

*Curentul din conductorul de nul* intervine numai în cazul conexiunilor în stea.

Aceste tensiuni și curenți sînt diferite la conexiunea în stea față de conexiunea în triunghi, după cum se va vedea în continuare.

### 6.2.1. TENSIUNILE ȘI CURENȚII LA CONEXIUNEA ÎN STEA

Se consideră un receptor trifazat cu impedențele  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  și  $\underline{Z}_3$  conectate în stea, alimentat de la o sursă cu conexiune a fazelor de asemenea în stea (fig. 6-9). Linia de transport de energie este prevăzută cu 4 conductoare, trei conductoare

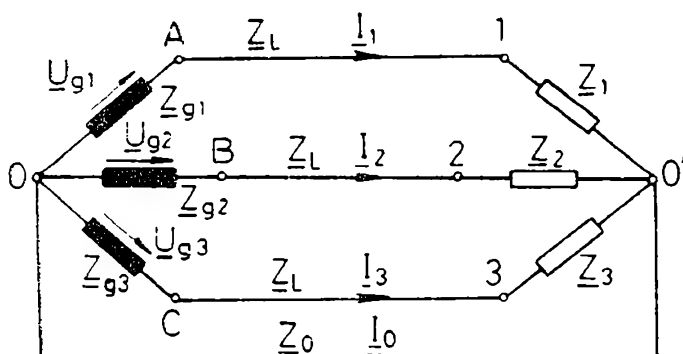


Fig. 6-9. Rețea trifazată cu conexiune în stea.

pentru cele trei faze și al patrulea, *conductorul de nul* care unește între ele punctele de nul  $O$  și  $O'$  de la sursă și de la receptor. Se analizează mai întâi situația tensiunilor și curenților la receptor.

Tensiunile de fază la receptor sînt :

$$\underline{U}_1 = \underline{V}_1 - \underline{V}_{O'}; \quad \underline{U}_2 = \underline{V}_2 - \underline{V}_{O'}; \quad \underline{U}_3 = \underline{V}_3 - \underline{V}_{O'}. \quad (6-7)$$

Reprezentînd în planul complex aceste trei tensiuni de fază, ele formează o stea simetrică sau nesimetrică, după cum tensiunile sînt simetrice sau nesimetrice.

Curenții de fază, care circulă prin impedanțele  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  și  $\underline{Z}_3$  ale receptorului, sînt :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}. \quad (6-8)$$

În figura 6-10 sînt reprezentate tensiunile de fază și curenții de fază în caz de nesimetrie.

Curentul din conductorul de nul rezultă prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff în nodul  $O'$  al schemei din fig. 6-9, obținîndu-se :

$$\underline{I}_0 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}\right). \quad (6-9)$$

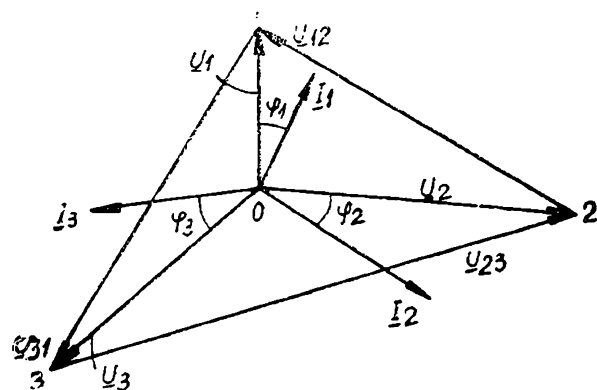


Fig. 6-10. Diagrama tensiunilor și curenților la conexiunea în stea, în caz de nesimetrie.

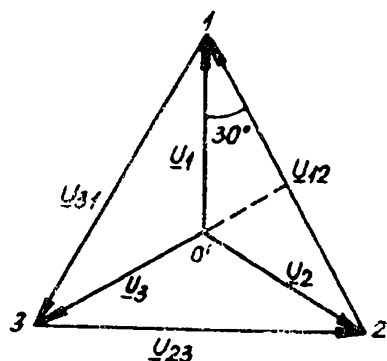


Fig. 6-11. Diagrama tensiunilor la conexiunea în stea, în caz de simetrie.

Dacă tensiunile de fază sînt simetrice, adică  $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$  și receptorul este echilibrat, adică  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$ , rezultă :  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3$ ,  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$  și  $\underline{I}_0 = 0$ .

Tensiunile de linie (înlănțuite) la receptor sînt :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = (\underline{V}_1 - \underline{V}_{0'}) - (\underline{V}_2 - \underline{V}_{0'}) = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \\ \underline{U}_{23} &= \underline{V}_2 - \underline{V}_3 = (\underline{V}_2 - \underline{V}_{0'}) - (\underline{V}_3 - \underline{V}_{0'}) = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 \\ \underline{U}_{31} &= \underline{V}_3 - \underline{V}_1 = (\underline{V}_3 - \underline{V}_{0'}) - (\underline{V}_1 - \underline{V}_{0'}) = \underline{U}_3 - \underline{U}_1\end{aligned}\quad (6-10)$$

de unde se vede că, întotdeauna, suma tensiunilor de linie, ca mărimi complexe, este nulă :

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0. \quad (6-11)$$

Relația (6-11) ilustrează că cele trei tensiuni de linie  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$  și  $\underline{U}_{31}$  formează în planul complex un triunghi închis. Acest triunghi este oarecare dacă tensiunile sînt nesimetrice (fig. 6-10) și este echilateral dacă tensiunile sînt simetrice (fig. 6-11). În ambele cazuri, conform relațiilor (6-10), steaua tensiunilor de fază are extremitățile în vîrfurile triunghiului tensiunilor de linie, iar centrul undeva în planul triunghiului.

În cazul tensiunilor de linie și de fază simetrice, reprezentate în fig. 6-11, punctul  $O'$  este situat în centrul triunghiului echilateral și se obține următoarea legătură între valoarea tensiunii de linie și valoarea tensiunii de fază :

$$\frac{\underline{U}_{12}}{2} = \underline{U}_1 \cos 30^\circ, \text{ adică } \underline{U}_{12} = \sqrt{3} \underline{U}_1, \text{ sau}$$

$$\underline{U}_l = \sqrt{3} \underline{U}_f, \quad (6-12)$$

unde s-a notat cu  $\underline{U}_l$  tensiunea de linie și cu  $\underline{U}_f$  tensiunea de fază.

Deci, în caz de simetrie, la conexiunea în stea tensiunea de linie este de  $\sqrt{3}$  ori mai mare decît tensiunea de fază. Valorile acestor tensiuni la rețele electrice de distribuție de joasă tensiune sînt :  $\underline{U}_f = 220 \text{ V}$ ,  $\underline{U}_l = 380 \text{ V}$ .

Curentul de linie la conexiunea în stea este egal cu cel de fază (v. fig. 6-9).

În concluzie, la conexiunea în stea, tensiunile de fază și tensiunile de linie nu sînt egale ca valoare și nu sînt în fază. În schimb, curenții de fază și curenții de linie sînt aceeași.

În ce privește t.e.m. induse pe fază de generator  $\underline{U}_{g1}$ ,  $\underline{U}_{g2}$  și  $\underline{U}_{g3}$ , acestea, prin construcția generatorului, sînt simetrice și formează steaua din fig. 6-12. T.e.m. de linie definite prin relațiile :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{g12} &= \underline{U}_{g1} - \underline{U}_{g2}; \quad \underline{U}_{g23} = \underline{U}_{g2} - \underline{U}_{g3}; \\ \underline{U}_{g31} &= \underline{U}_{g3} - \underline{U}_{g1}\end{aligned}\quad (6-13)$$

sînt de asemenea simetrice și formează un triunghi echilateral (fig. 6-12), indiferent dacă consumatorul este echilibrat sau neechilibrat.

Avînd în vedere această simetrie a t.e.m. induse, se pune problema dacă tensiunile de linie  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$  de la receptor sînt sau nu simetrice. Pentru a răspunde la această problemă

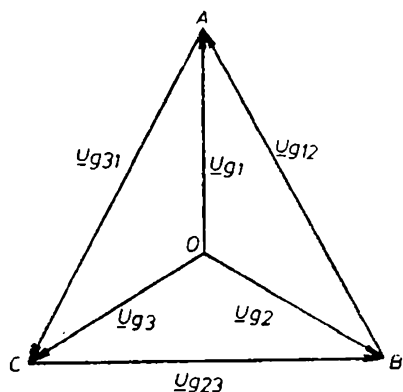


Fig. 6-12. Diagrama tensiunilor induse la un generator trifazat.

este necesar să se stabilească legătura dintre tensiunile la receptor și t.e.m. induse la generator. Pe baza schemei din fig. 6-9 rezultă :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = (\underline{V}_1 - \underline{V}_0) - (\underline{V}_2 - \underline{V}_0) = [\underline{U}_{\phi 1} - \underline{I}_1 (\underline{Z}_{\phi 1} + \underline{Z}_L)] - [\underline{U}_{\phi 2} - \underline{I}_2 (\underline{Z}_{\phi 2} + \underline{Z}_L)] \\ \underline{U}_{23} &= \underline{V}_2 - \underline{V}_3 = (\underline{V}_2 - \underline{V}_0) - (\underline{V}_3 - \underline{V}_0) = [\underline{U}_{\phi 2} - \underline{I}_2 (\underline{Z}_{\phi 2} + \underline{Z}_L)] - [\underline{U}_{\phi 3} - \underline{I}_3 (\underline{Z}_{\phi 3} + \underline{Z}_L)] \end{aligned} \quad (6-14)$$

$\underline{U}_{31} = \underline{V}_3 - \underline{V}_1 = (\underline{V}_3 - \underline{V}_0) - (\underline{V}_1 - \underline{V}_0) = [\underline{U}_{\phi 3} - \underline{I}_3 (\underline{Z}_{\phi 3} + \underline{Z}_L)] - [\underline{U}_{\phi 1} - \underline{I}_1 (\underline{Z}_{\phi 1} + \underline{Z}_L)]$   
unde  $\underline{Z}_{\phi 1}$ ,  $\underline{Z}_{\phi 2}$ ,  $\underline{Z}_{\phi 3}$  sînt impedanțele pe fază la generator, iar  $\underline{Z}_L$  este impedanța conductoarelor liniei de transport, aceeași pentru toate cele trei faze.

Produsele  $\underline{I}_1 (\underline{Z}_{\phi 1} + \underline{Z}_L)$ ,  $\underline{I}_2 (\underline{Z}_{\phi 2} + \underline{Z}_L)$ ,  $\underline{I}_3 (\underline{Z}_{\phi 3} + \underline{Z}_L)$  reprezintă căderile de tensiune pe cele trei faze ale generatorului și ale liniei de transport. Întrucît în general, aceste căderi de tensiune sînt mici, ele pot fi neglijate și rezultă :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &\cong \underline{U}_{\phi 1} - \underline{U}_{\phi 2} = \underline{U}_{\phi 12} \\ \underline{U}_{23} &\cong \underline{U}_{\phi 2} - \underline{U}_{\phi 3} = \underline{U}_{\phi 23} \\ \underline{U}_{31} &\cong \underline{U}_{\phi 3} - \underline{U}_{\phi 1} = \underline{U}_{\phi 31} \end{aligned} \quad (6-15)$$

Prin urmare, făcînd neglijarea de mai sus, indiferent dacă receptorul trifazat este echilibrat sau neechilibrat, tensiunile de linie la receptor sînt simetrice și formează împreună un triunghi echilateral. Simetria tensiunilor la receptor se păstrează și atunci cînd căderile de tensiune nu sînt neglijabile, dar receptorul este echilibrat.

Dacă receptorul este neechilibrat și căderile de tensiune pe cele trei faze nu sînt neglijabile, tensiunile de linie la receptor nu sînt simetrice și formează împreună un triunghi oarecare.

În practică, se poate accepta că tensiunile de linie la receptor sînt simetrice.

## 6.2.2. TENSIUNILE ȘI CURENȚII LA CONEXIUNEA ÎN TRIUNGHI

Se consideră un receptor trifazat cu impedanțele  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{31}$  conectate în triunghi și alimentat de la o rețea de curent alternativ (fig. 6-13). La această conexiune punctul de nul, respectiv conductorul de nul lipsesc.

Tensiunile de fază sînt egale cu tensiunile de linie. În schimb, curenții de linie  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$  și curenții de fază  $\underline{I}_{12}$ ,  $\underline{I}_{23}$ ,  $\underline{I}_{31}$  sînt diferiți. Curenții de fază se calculează cu relațiile :

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} ; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} ; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} . \quad (6-16)$$

Între curenții de linie și cei de fază există următoarele relații obținute prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} ; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} ; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} . \quad (6-17)$$

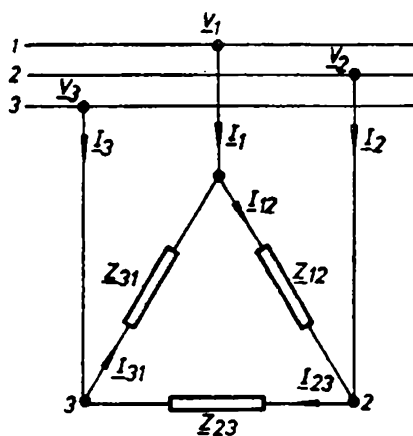


Fig. 6-13. Receptor trifazat cu conexiunea în triunghi.

Din relațiile (6-17) rezultă că, la conexiunea în triunghi, întotdeauna suma curenților de linie este egală cu zero, adică :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0. \quad (6-18)$$

Deci, acești curenți formează împreună un triunghi.

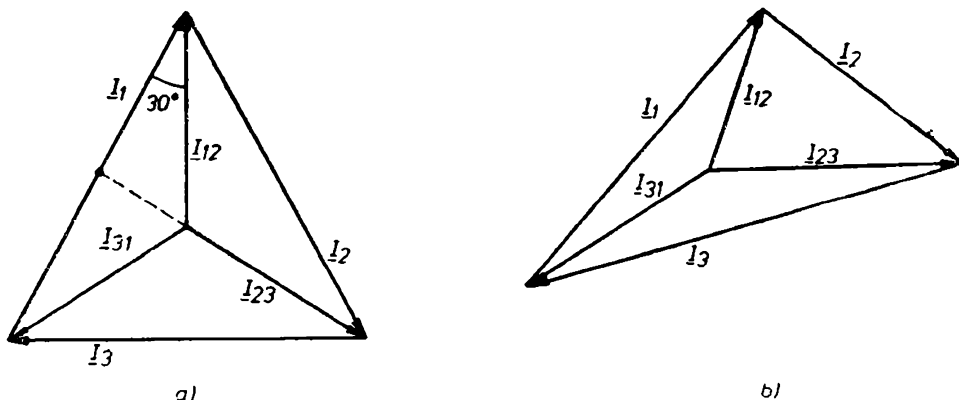


Fig. 6-14. Diagrama curenților la conexiunea în triunghi, în caz de simetrie (a) și în caz de nesimetrie (b).

Dacă tensiunile de linie sînt simetrice și receptorul este echilibrat ( $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31}$ ), triunghiul curenților de linie este echilateral, iar curenții de fază formează o stea simetrică ce se situează pe medianele triunghiului echilateral (fig. 6-14). În această situație, se obține următoarea legătură între valoarea curentului de linie și valoarea curentului de fază :

$$\frac{I_1}{2} = I_{12} \cos 30^\circ, \text{ adică } I_1 = \sqrt{3} I_{12}, \text{ sau } I_1 = \sqrt{3} I_f \quad (6-19)$$

unde  $I_1$  este curentul de linie și  $I_f$  este curentul de fază.

Prin urmare, la conexiunea în triunghi a fazelor unui receptor echilibrat, alimentat cu tensiuni simetrice, curentul de linie este de  $\sqrt{3}$  mai mare decît curentul de fază.

În caz de nesimetrie, sau dezechilibru, curenții la conexiunea în triunghi sînt nesimetrice (fig. 6-14, b).

## 6.3. PUTEREA LA REȚELELE TRIFAZATE

### 6.3.1. PUTEREA LA REȚELELE CU CONEXIUNE ÎN STEA

Se consideră receptorul trifazat cu conexiune în stea din fig. 6-15. Valoarea instantanee a puterii electromagnetice pentru cele trei faze este :

$$p = (v_1 - v_0) i_1 + (v_2 - v_0) i_2 + (v_3 - v_0) i_3 = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3,$$

în care valorile instantanee ale celor trei tensiuni de fază și ale celor trei curenți se exprimă, în general, prin relațiile :

$$u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \alpha_1);$$

$$u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \alpha_2);$$

$$u_3 = \sqrt{2}U_3 \sin(\omega t + \alpha_3);$$

$$i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1),$$

$$i_2 = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \alpha_2 - \varphi_2),$$

$$i_3 = \sqrt{2}I_3 \sin(\omega t + \alpha_3 - \varphi_3).$$

În cazul tensiunilor de fază simetrice, avem :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ și } U_1 = U_2 = U_3.$$

**Puterea activă**, după cum s-a arătat la circuitele monofazate, este valoarea medie în raport cu o perioadă a puterii electromagnetice instantanee, adică se obține :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3, \quad (6-20)$$

unde  $U_1, U_2, U_3$  și  $I_1, I_2, I_3$  sînt valorile efective ale tensiunilor de fază, respectiv ale curenților de fază (aceleași cu cei de linie) iar  $\varphi_1, \varphi_2$  și  $\varphi_3$  sînt defazajele dintre tensiunile de fază și curenții de fază. Se remarcă faptul că puterea activă este egală cu suma puterilor active pe cele trei faze.

Dacă rețeaua trifazată este simetrică și echilibrată, adică  $U_1 = U_2 = U_3 = U_f$ ,  $I_1 = I_2 = I_3 = I_f$  și  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ , relația (6-20) devine :

$$P = 3U_f I_f \cos \varphi. \quad (6-21)$$

Avînd în vedere că în practică nu se măsoară tensiunea de fază, ci tensiunea de linie  $U_l = \sqrt{3}U_f$  și că la conexiunea în stea curențul de fază este egal cu cel de linie  $I_f = I_l$ , rezultă :

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi \text{ sau } P = \sqrt{3}UI \cos \varphi. \quad (6-22)$$

La scrierea fără indici înseamnă că  $U$  este tensiunea de linie,  $I$  este curențul de linie și  $\varphi$  este defazajul între curențul de fază și tensiunea de fază.

**Puterea reactivă** este :

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3. \quad (6-23)$$

În caz de simetrie și echilibru, rezultă :

$$Q = 3U_f I_f \sin \varphi, \quad (6-24)$$

de unde, înlocuind mărimile de fază cu cele de linie, se obține :

$$Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi \text{ sau } Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi. \quad (6-25)$$

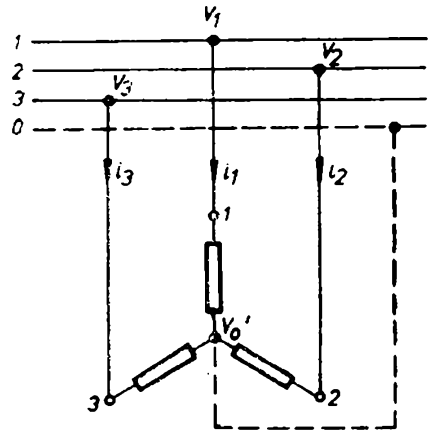


Fig. 6-15. Receptor trifazat cu conexiune în stea.

Puterea aparentă este :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (6-26)$$

Pentru circuite simetrice și echilibrate rezultă :

$$S = \sqrt{3} U_l I_l \text{ sau } S = \sqrt{3} UI. \quad (6-27)$$

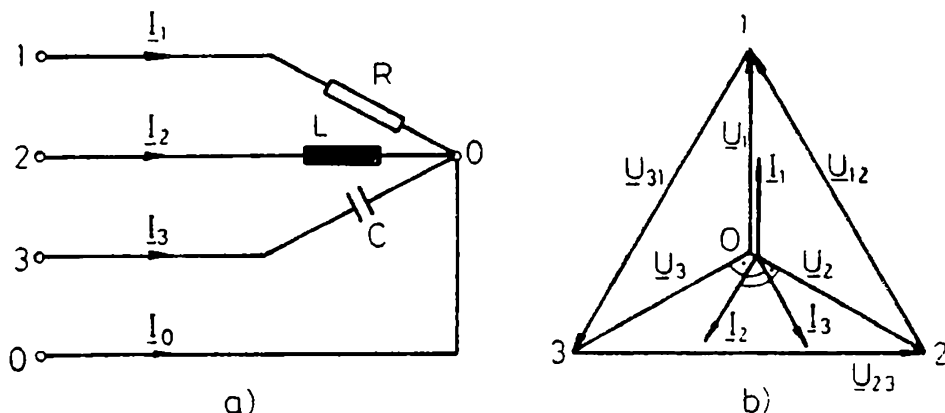


Fig. 6-16. Receptor trifazat cu conexiune în stea (a) și diagrama tensiunilor și curenților (b).

**Aplicația 6-1.** Receptorul trifazat cu conexiune în stea a fazelor, avînd schema din fig. 6-16, a, este alimentat cu tensiuni de linie și de fază simetrice. Să se determine curenții din circuit și puterile pentru următoarele valori ale tensiunilor și parametrilor :

$$U_l = 380 \text{ V}, \quad U_f = 220 \text{ V}, \quad f = 50 \text{ Hz}, \quad R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 22 \, \Omega.$$

**Rezolvare.** Se construiește în fig. 6-16, b diagrama în planul complex a tensiunilor și curenților. Valorile curenților din circuit sînt :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{Z_1} = \frac{\underline{U}_1}{R} = \frac{220}{22} = 10 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{Z_2} = \frac{\underline{U}_2}{\omega L} = \frac{220}{22} = 10 \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{Z_3} = \frac{\underline{U}_3}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{220}{22} = 10 \text{ A}.$$

Dacă se consideră  $\underline{U}_{23} = U_{23}$ , se obțin următoarele exprimări în complex simplificat a curenților :

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\frac{\pi}{2}} = j 10 \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = I_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 10 \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 5(-1 - j\sqrt{3}) \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = I_3 e^{-j\frac{\pi}{3}} = 10 \left( \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 5(1 - j\sqrt{3}) \text{ A},$$

$$\underline{I}_0 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = j 10(1 - \sqrt{3}), \quad I_0 = 7,3 \text{ A}.$$



Defazajele dintre tensiunile de fază și curenții de fază sînt :  $\varphi_1=0$ ,  $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_3=-\frac{\pi}{2}$ .

Puterile din circuit au valorile :

$$P=U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 2\,200 \text{ W},$$

$$Q=U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 = 0.$$

$$S=\sqrt{P^2 + Q^2} = 2\,200 \text{ VA}.$$

### 6.3.2. PUTEREA LA REȚELELE TRIFAZATE CU CONEXIUNE ÎN TRIUNGHI

Se consideră rețeaua trifazată cu conexiune în triunghi din fig. 6-17. Valoarea instantanee a puterii electromagnetice pentru cele trei faze este :

$$p=(v_1-v_2) i_{12}+(v_2-v_3) i_{23}+(v_3-v_1) i_{31}= \\ =u_{12} i_{12}+u_{23} i_{23}+u_{31} i_{31}.$$

Puterea activă este :

$$P=\frac{1}{T} \int_0^T p \, dt=U_{12} I_{12} \cos \varphi_{12}+U_{23} I_{23} \cos \varphi_{23}+ \\ +U_{31} I_{31} \cos \varphi_{31}. \quad (6-28)$$

În caz de simetrie și echilibru, adică  $U_{12}=U_{23}=U_{31}=U_f$ ,  $I_{12}=I_{23}=I_{31}=I_f$ ,  $\varphi_{12}=\varphi_{23}=\varphi_{31}=\varphi$  rezultă :

$$P=3 U_f I_f \cos \varphi, \quad (6-29)$$

de unde, avînd în vedere că  $I_f=\frac{1}{\sqrt{3}} I_l$  și  $U_f=U_l$ , se obține :

$$P=\sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi, \text{ sau } P=\sqrt{3} U I \cos \varphi. \quad (6-30)$$

Puterea reactivă este :

$$Q=U_{12} I_{12} \sin \varphi_{12}+U_{23} I_{23} \sin \varphi_{23}+U_{31} I_{31} \sin \varphi_{31}. \quad (6-31)$$

În caz de simetrie și echilibru rezultă :

$$Q=3 U_f I_f \sin \varphi \quad (6-32)$$

sau, înlocuind curentul de fază prin curentul de linie, se obține :

$$Q=\sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi, \text{ respectiv } Q=\sqrt{3} U I \sin \varphi. \quad (6-33)$$

Puterea aparentă este :

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}. \quad (6-34)$$

La simetrie și echilibru se obține :

$$S=\sqrt{3} U_l I_l, \text{ sau } S=\sqrt{3} U I. \quad (6-35)$$

Se remarcă faptul că expresiile puterilor activă, reactivă și aparentă pentru rețelele cu conexiune în triunghi sînt aceleași ca pentru rețelele cu conexiune în stea.

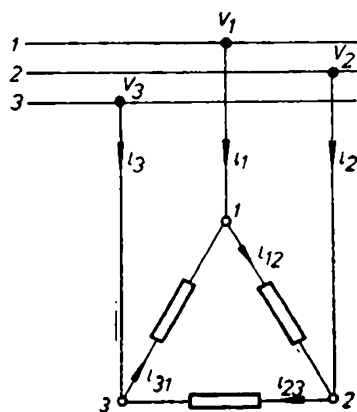


Fig. 6-17. Receptor trifazat cu conexiune în triunghi.

**Aplicația 6-2.** Să se rezolve aplicația 6-1 considerînd receptorul cu aceiași parametri conectat în triunghi (fig. 6-18, a).

**Rezolvare.** Se reprezintă în fig. 6-18, b diagrama tensiunilor și curenților de fază ca mărimi complexe. Curenții de fază sînt :

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{Z_{12}} = \frac{U_{12}}{R} = \frac{380}{22} = 17,3 \text{ A}, \quad I_{23} = \frac{U_{23}}{Z_{23}} = \frac{U_{23}}{\omega L} = \frac{380}{22} = 17,3 \text{ A}$$

$$I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}} = \frac{U_{31}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{380}{22} = 17,3 \text{ A}$$

sau, în complex :

$$\underline{I}_{12} = I_{12} e^{j \frac{2\pi}{3}} = (-8,7 + j 15,7) \text{ A}, \quad \underline{I}_{23} = I_{23} e^{-j \frac{\pi}{2}} = -j 17,3 \text{ A},$$

$$\underline{I}_{31} = I_{31} e^{-j \frac{\pi}{6}} = (15,7 - j 8,7) \text{ A}.$$

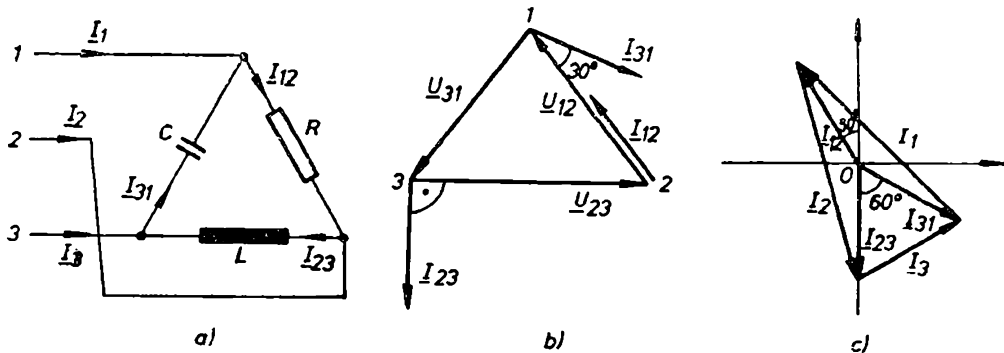


Fig. 6-18. Receptor trifazat dezechilibrat (a), diagrama tensiunilor și curenților de fază (b) și a curenților de linie (c).

Curenții de linie reprezentați în fig. 6-18, c sînt :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 24,4 (1 + j) \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = -(8,7 + j 33) \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = (15,7 + j 8,6) \text{ A}.$$

Defazajele dintre curenții de fază și tensiunile de fază (linie) au valorile :  $\varphi_{12} = 0$ ,  $\varphi_{23} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_{31} = -\frac{\pi}{2}$ .

Puterile din circuit sînt :

$$P = U_{12} I_{12} \cos \varphi_{12} + U_{23} I_{23} \cos \varphi_{23} + U_{31} I_{31} \cos \varphi_{31} = 6\,574 \text{ W},$$

$$Q = U_{12} I_{12} \sin \varphi_{12} + U_{23} I_{23} \sin \varphi_{23} + U_{31} I_{31} \sin \varphi_{31} = 0,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 6\,574 \text{ VA}.$$

## 6.4. FACTORUL DE PUTERE LA REȚELELE TRIFAZATE

La circuitele monofazate s-a văzut că factorul de putere se definește prin raportul dintre puterea activă și puterea activă maximă transportată la aceleași pierderi prin efect Joule-Lenz pe linie, care, în regim sinusoidal, rezultă egal cu factorul de defazare :  $\Delta = \cos \varphi = \frac{P}{S}$ . În același mod se definește factorul de putere pentru rețelele trifazate, adică este egal cu raportul dintre puterea activă  $P$  și puterea activă maximă  $P_{max}$  transportată la aceleași pierderi prin efect Joule-Lenz pe linia de transport dintre sursă și consumator. La rețelele trifazate simetrice și echilibrate, puterea activă este  $P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$ , iar pentru puterea activă maximă, la același curent (pierderi) pe linie, este egală cu puterea aparentă  $P_{max} = \sqrt{3}UI$ . Rezultă și în acest caz factorul de putere egal cu factorul de defazare.

La rețelele trifazate nesimetrice și neechilibrate, factorul de putere este diferit de factorul de defazare. În acest caz, puterea activă a consumatorului considerat cu conexiune în stea și alimentat de la sursă prin linia de transport este :  $P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3$ . Acestei puteri îi corespund pierderile pe linie :  $(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) R_L$ , unde  $R_L$  este rezistența conductoarelor.

În ce privește puterea activă maximă în caz de nesimetrie, aceasta se stabilește mai dificil. Se adoptă criteriul că puterea activă la consumator este maximă când are pe fiecare fază rezistența electrică pură  $R$ , tensiunile de linie nesimetrice rămânând nemodificate. În acest caz, curenții de fază și tensiunile de fază vor fi :  $I'_1, I'_2, I'_3$ , respectiv  $U'_1, U'_2, U'_3$ , astfel că

$$P_{max} = (I_1'^2 + I_2'^2 + I_3'^2) R = \frac{U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2}{R},$$

de unde rezultă :

$$P_{max}^2 = (U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2) (I_1'^2 + I_2'^2 + I_3'^2).$$

Dar, avînd în vedere că puterea maximă se transportă cu aceleași pierderi prin efect Joule-Lenz pe linie ca și cele pentru puterea  $P$ , se obține :

$$I_1'^2 + I_2'^2 + I_3'^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \quad (6-36)$$

Astfel, puterea maximă se exprimă prin relația ;

$$P_{max}^2 = (U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2) (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \quad (6-37)$$

care, printr-un artificiu de calcul, devine :

$$\begin{aligned} P_{max}^2 = & (U'_1 I_1 \cos \varphi'_1 + U'_2 I_2 \cos \varphi'_2 + U'_3 I_3 \cos \varphi'_3)^2 + \\ & + (U'_1 I_1 \sin \varphi'_1 + U'_2 I_2 \sin \varphi'_2 + U'_3 I_3 \sin \varphi'_3)^2 + \\ & + \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^3 [U_j'^2 I_k^2 - 2U'_j U'_k I_j I_k \cos (\varphi'_j - \varphi'_k)], \end{aligned}$$

adică

$$P_{max}^2 = P^2 + Q^2 + P_{nes}^2 = S^2 + P_{nes}^2. \quad (6-38)$$

Puterea de nesimetrie este :

$$P_{nes}^2 = \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^3 [U_j'^2 I_k^2 - 2U_j' U_k' I_j I_k \cos(\varphi_j' - \varphi_k')]. \quad (6-39)$$

S-a notat cu  $\varphi_j'$  unghiul de defazaj între tensiunea  $U_j'$  și curentul  $I_j$ .

Rezultă factorul de putere :

$$\Delta^2 = \frac{P^2}{P_{max}^2} = \frac{P^2}{S^2 + P_{nes}^2} = \frac{P^2}{S^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{P_{nes}}{S}\right)^2} \quad (6-40)$$

adică

$$\Delta = \Delta_f \Delta_{nes}, \quad (6-41)$$

unde

$$\Delta_f = \frac{P}{S} \quad (6-42)$$

este factorul de defazare iar

$$\Delta_{nes} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P_{nes}}{S}\right)^2}} \quad (6-43)$$

este factorul de nesimetrie.

**Aplicația 6-3.** Se consideră rețeaua trifazată neechilibrată din fig. 6-19, a. Se cere să se calculeze factorul de putere, tensiunile de linie fiind simetrice.

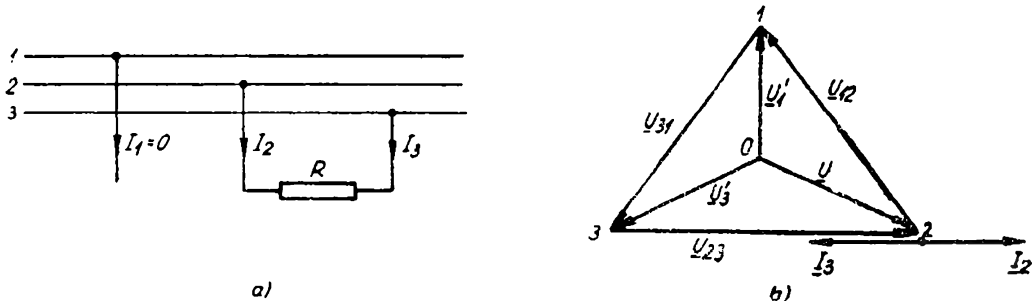


Fig. 6-19. Încărcarea neechilibrată a rețelei trifazate (a) și diagrama tensiunilor și curenților (b).

**Rezolvare.** Se obține:  $I_1=0$ ,  $I_2=-I_3=\frac{U_{23}}{R}$ . Deci, curentul  $I_2$  este în fază cu tensiunea  $U_{23}$ , iar  $I_3$  este în opoziție de fază față de aceeași tensiune.

În fig. 6-19, b este reprezentată diagrama tensiunilor și curenților. S-au notat cu „prim“ tensiunile de fază simetrice. Defazajele dintre curenții  $I_2$  și  $I_3$  și tensiunea  $U_2'$  respectiv  $U_3'$  sînt:  $\varphi_2' = -\frac{\pi}{6}$ ,  $\varphi_3' = \frac{\pi}{6}$ .

Puterea activă este :

$$P = U'_1 I_1 \cos \varphi'_1 + U'_2 I_2 \cos \varphi'_2 + U'_3 I_3 \cos \varphi'_3 = \sqrt{3} U'_f I,$$

unde

$$U'_1 = U'_2 = U'_3 = U'_f, \quad I_2 = I_3 = I \text{ și } I_1 = 0.$$

Puterea reactivă rezultă egală cu zero,  $Q=0$  și puterea aparentă este egală cu puterea activă,  $S = \sqrt{3} U'_f I$ .

Puterea activă maximă se obține din relația (6-37) :

$$P_{max} = \sqrt{3 U'^2_f \cdot 2 I^2} = \sqrt{3} \sqrt{2} U'_f I.$$

Puterea de nesimetrie este :

$$P_{nes} = \sqrt{P_{max}^2 - S^2} = \sqrt{6 U'^2_f I^2 - 3 U'^2_f I^2} = \sqrt{3} U'_f I.$$

Factorul de defazaj și factorul de nesimetrie sînt :

$$\Delta_f = \frac{P}{S} = 1; \quad \Delta_{nes} = \frac{S}{P_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

cu care rezultă factorul de putere

$$\Delta = \Delta_f \Delta_{nes} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Se remarcă faptul că deși receptorul este cu caracter rezistiv factorul de putere este diferit de unitate.

## 6.5. CALCULUL REȚELELOR TRIFAZATE

### 6.5.1. CONSIDERAȚIUNI GENERALE ASUPRA METODELOR DE CALCUL A REȚELELOR ELECTRICE

Rețelele electrice de curent alternativ conțin, în general, mai multe impedanțe și surse conectate între ele în serie, în paralel, mixt, în formă de poligon sau de stea. Elementele topologice principale ale rețelei sînt : nodurile, laturile și ochiurile.

Problemele care se pun la calculul rețelelor de c.a. sînt similare cu cele care se pun la calculul rețelelor de c.c., adică se referă, în majoritate, la calculul curenților din laturi. Aspectele suplimentare de calcul ce apar la rețelele de c.a. se referă la determinarea defazajelor între anumite mărimi, a factorului de putere, a puterilor activă, reactivă și aparentă etc. De asemenea, la rețelele de c.a. intervin și cuplaje magnetice între bobine (impedanțe de cuplaj), care nu apar la rețelele de c.c.

În regimul sinusoidal de funcționare permanentă a rețelelor de c.a. mărimile ce intervin în calcule (tensiuni, curenți, impedanțe, admitanțe) se exprimă, obișnuit, sub formă complexă, ceea ce conduce la un mod simplu de a scrie relațiile între mărimi și de a găsi soluția problemei. Procedînd în acest mod,

se obțin relații algebrice între mărimi complexe, similare cu relațiile scrise pentru rețelele de curent continuu, existând următoarele corespondențe între mărimi :

c.c.	$I_b$	$U_e$	$I$	$R$	$G$
c.a.	$\underline{U}_b$	$\underline{U}_e$	$\underline{I}$	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$

La capitolul 3 s-au prezentat următoarele metode de calcul a rețelor de c.c. în regim permanent :

- metoda teoremelor lui Kirchhoff ;
- metoda superpoziției ;
- metoda transfigurării ;
- metoda ochiurilor independente (curenților ciclici) ;
- metoda potențialelor nodurilor.

Aceste metode se aplică și la calculul rețelor de c.a. în regim permanent sinusoidal, ținând seama de precizările făcute mai sus. Aici se vor prezenta în plus, problemele de calcul specifice rețelor trifazate cu conexiune în stea și în triunghi precum și metoda generatorului echivalent.

### 6.5.2. CALCULUL REȚELOR TRIFAZATE CU CONEXIUNE ÎN STEA

Se consideră în fig. 6-20, *a* schema trifazată cu conexiune în stea a unui receptor, alimentat de la o rețea (sursă) cu tensiuni de linie și de fază simetrice. Impedanțele pe cele trei faze ale receptorului sînt  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$ , iar impedanța conductorului de nul, legat între punctul de nul  $O$  al sursei și punctul de nul  $O'$  al receptorului, este  $\underline{Z}_0$ . În fig. 6-20, *b* sînt reprezentate tensiunile de fază și de linie simetrice, disponibile la rețeaua (sursa) de alimentare.

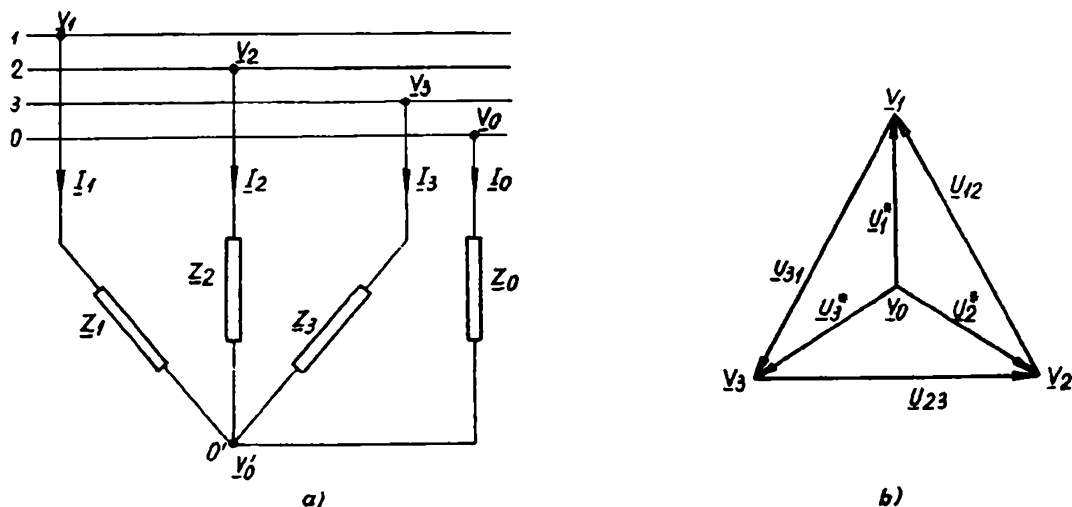


Fig. 6-20. Impedanțe conectate în stea (*a*) și diagrama tensiunilor (*b*).

Calculul pe care îl urmărim în continuare se referă la determinarea curenților și tensiunilor de fază la receptor în funcție de tensiunile sursei și impedanțele receptorului.

Tensiunile de fază la receptor se exprimă în funcție de potențiale și curenți prin relațiile :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{V}_1 - \underline{V}_{0'} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 ; \quad \underline{U}_2 = \underline{V}_2 - \underline{V}_{0'} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 ; \\ \underline{U}_3 &= \underline{V}_3 - \underline{V}_{0'} = \underline{I}_3 \underline{Z}_3.\end{aligned}\quad (6-44)$$

Diferența de potențial între punctul de nul al sursei și punctul de nul al receptorului este :

$$\Delta \underline{U} = \underline{V}_0 - \underline{V}_{0'} = \underline{I}_0 \underline{Z}_0. \quad (6-45)$$

Pentru a putea calcula curenții din circuit în funcție de tensiunile disponibile la rețea și de impedanțe este necesar, mai întâi, să se calculeze potențialul  $\underline{V}_{0'}$ . Conform teoremei I a lui Kirchhoff, se obține :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_0 = 0 \quad (6-46)$$

sau, ținând seama de relațiile (6-44) și (6-45), rezultă :

$$\sum_{v=0}^3 \frac{\underline{V}_v}{\underline{Z}_v} - \underline{V}_{0'} \sum_{v=0}^3 \frac{1}{\underline{Z}_v} = 0,$$

de unde :

$$\underline{V}_{0'} = \frac{\frac{\underline{V}_0}{\underline{Z}_0} + \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_0} + \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}. \quad (6-47)$$

Deci, potențialul  $\underline{V}_{0'}$ , depinde atât de potențialele  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$  și  $\underline{V}_0$ , precum și de impedanțele  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$  și  $\underline{Z}_0$ .

Înlocuind (6-47) în (6-44), se obțin pentru curenții  $\underline{I}_1, \underline{I}_2$  și  $\underline{I}_3$  expresiile :

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{(\underline{V}_1 - \underline{V}_0) \underline{Z}_3 - (\underline{V}_3 - \underline{V}_1) \underline{Z}_2 + (\underline{V}_1 - \underline{V}_0) \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \\ \underline{I}_2 &= \frac{(\underline{V}_2 - \underline{V}_0) \underline{Z}_1 - (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) \underline{Z}_3 + (\underline{V}_2 - \underline{V}_0) \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \\ \underline{I}_3 &= \frac{(\underline{V}_3 - \underline{V}_0) \underline{Z}_2 - (\underline{V}_2 - \underline{V}_3) \underline{Z}_1 + (\underline{V}_3 - \underline{V}_0) \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}.\end{aligned}\quad (6-48)$$

Curentul  $\underline{I}_0$  se deduce din (6-46) prin înlocuirea relațiilor (6-48) :

$$\underline{I}_0 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -\frac{(\underline{V}_1 - \underline{V}_0) \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_0} + (\underline{V}_2 - \underline{V}_0) \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_0} + (\underline{V}_3 - \underline{V}_0) \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \quad (6-49)$$

Având în vedere relațiile (6-10), se obțin pentru curenți expresiile finale în funcție de tensiunile sursei și de impedanțe :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3 - \underline{U}_{31}\underline{Z}_2 + \underline{U}_1^* \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{23}\underline{Z}_1 - \underline{U}_{12}\underline{Z}_3 + \underline{U}_2^* \frac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \end{aligned} \quad (6-50)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{31}\underline{Z}_2 - \underline{U}_{23}\underline{Z}_1 + \underline{U}_3^* \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \\ \underline{I}_0 &= \frac{\underline{U}_1^* \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0} + \underline{U}_2^* \frac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0} + \underline{U}_3^* \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}. \end{aligned} \quad (6-51)$$

Cu ajutorul relațiilor scrise mai sus se analizează diferite situații particulare din care rezultă și rolul conductorului de nul.

a. **Conexiunea în stea cu conductorul de nul legat** ( $\underline{Z}_0=0$ ). Aceasta înseamnă că  $\underline{V}_0=\underline{V}_0'$  iar tensiunile de fază la receptor sînt :  $\underline{U}_1=\underline{U}_1^*$ ,  $\underline{U}_2=\underline{U}_2^*$ ,  $\underline{U}_3=\underline{U}_3^*$ , adică sînt tensiuni simetrice.

Dacă receptorul este echilibrat, adică  $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3$ , curenții  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  și  $\underline{I}_3$  sînt simetrici și  $\underline{I}_0=0$ .

Dacă receptorul este neechilibrat, adică  $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$ , atunci curenții  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  și  $\underline{I}_3$  nu sînt nesimetrice, iar  $\underline{I}_0 \neq 0$ . În schimb, tensiunile de fază la receptor  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_3$ , se păstrează simetrice, ceea ce înseamnă că *conductorul de nul are rolul de a simetriza tensiunile de fază la receptorul conectat în stea atunci cînd acestea este neechilibrat*.

b. **Conexiunea în stea fără conductor de nul** ( $\underline{Z}_0=\infty$ ). În această situație, dacă receptorul este echilibrat, adică  $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3$ , din relațiile (6-50) se obțin pentru curenți expresiile :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12} - \underline{U}_{31}}{3\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_1^*}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2^*}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3^*}{\underline{Z}_3}, \quad (6-52)$$

în care  $\underline{U}_{12} - \underline{U}_{31} = 3\underline{U}_1^*$ , așa cum reiese din fig. 6-21. Comparînd între ele expresiile (6-52) și (6-44), rezultă :  $\underline{U}_1=\underline{U}_1^*$ ,  $\underline{U}_2=\underline{U}_2^*$ ,  $\underline{U}_3=\underline{U}_3^*$  și  $\underline{V}_0'=\underline{V}_0$ . Deci, în acest caz, atît curenții, cît și tensiunile de fază la receptor sînt simetrice.



Dacă receptorul este neechilibrat, adică  $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$ , din (6-50) rezultă :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3 - \underline{U}_{31}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}, & \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{23}\underline{Z}_1 - \underline{U}_{12}\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}, \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{31}\underline{Z}_2 - \underline{U}_{23}\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}, \end{aligned} \quad (6-53)$$

Fig. 6-21. Diagramă de calcul a tensiunii  $\underline{U}_{12}-\underline{U}_{31}$ .

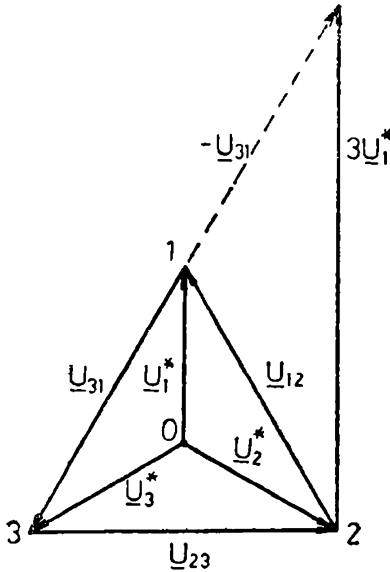
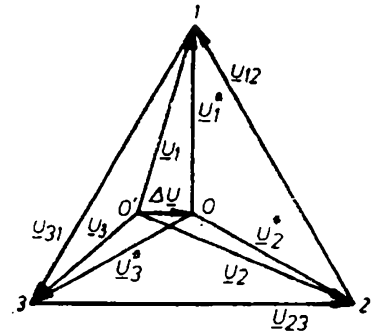


Fig. 6-22. Deplasarea  $\Delta U$  a punctului de nul în planul tensiunilor.



adică curenții sînt nesimetrice dar, suma lor este nulă  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ , ceea ce înseamnă că acești trei curenți formează un triunghi oarecare. În ceea ce privește tensiunile de fază la receptor, acestea sînt nesimetrice deoarece curenții sînt nesimetrice și impedanțele nu sînt egale. Ca urmare, rezultă  $\underline{V}_O \neq \underline{V}_O'$  adică poziția punctului  $O'$  este deplasată cu  $\Delta U = \underline{V}_O - \underline{V}_O'$  față de centrul  $O$  al triunghiului tensiunilor de linie (fig. 6-22).

Pentru calculul deplasării  $\Delta U$ , din fig. 6-22 se deduc relațiile :

$$\underline{U}_1 = \Delta U - \underline{U}_1^*, \quad \underline{U}_2 = \Delta U + \underline{U}_2^*, \quad \underline{U}_3 = \Delta U + \underline{U}_3^* \quad (6-54)$$

care, dacă se înmulțesc cu admitanțele  $\underline{Y}_1$ ,  $\underline{Y}_2$ , respectiv  $\underline{Y}_3$  a celor trei faze și se adună, rezultă :

$$\Delta U = - \frac{\underline{U}_1^* \underline{Y}_1 + \underline{U}_2^* \underline{Y}_2 + \underline{U}_3^* \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad (6-55)$$

unde s-a ținut seama că  $\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3 = 0$  (suma curenților este nulă).

**Aplicația 6-4.** În fig. 6-23, *a* este reprezentată schema electrică a unui receptor trifazat neechilibrat, cu conexiune în stea, fără conductor de nul, avînd pe faze impedanțele :  $Z_1 = 22 \, \Omega$ ,  $Z_2 = j 22 \, \Omega$  și  $Z_3 = -j 22 \, \Omega$ . Să se determine curenții și tensiunile de fază, precum și puterile activă, reactivă și aparentă, știind că alimentarea se face de la o sursă (rețea) cu tensiunile de linie  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$  simetrice.

**Rezolvare.** Considerind tensiunea  $\underline{U}_{23}$  situată pe axa reală (fig. 6-23, b), se obțin :

$$\underline{U}_{23} = U_{23} = U_l = 380 \text{ V},$$

$$\underline{U}_{12} = U_{12} e^{j \frac{2\pi}{3}} = 380 \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ V},$$

$$\underline{U}_{31} = U_{31} e^{-j \frac{2\pi}{3}} = 380 \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ V}.$$

Cu relațiile (6-53) se calculează curenții pe cele trei faze :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3 - \underline{U}_{31}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1} = j \, 17,4 \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}\underline{Z}_1 - \underline{U}_{12}\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1} = 17,4 (0,16 - j \, 0,5) \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{31}\underline{Z}_2 - \underline{U}_{23}\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1} = 17,4 (-0,16 - j \, 0,5) \text{ A}.$$

Se observă că  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ .

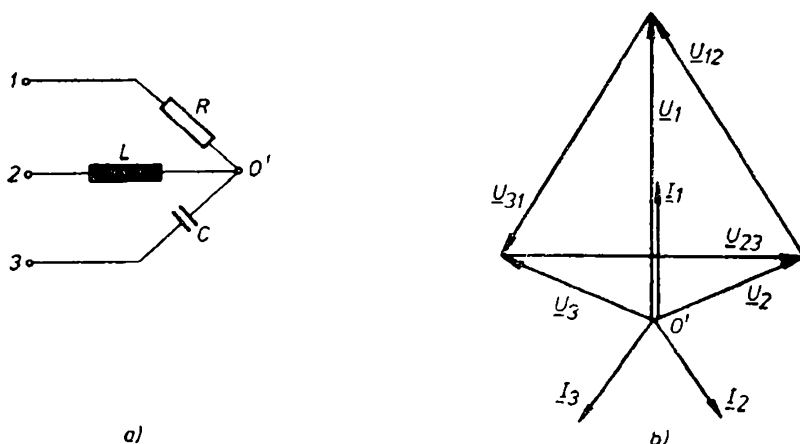


Fig. 6-23. Impedanțe diferite conectate în stea (a) și diagrama corespunzătoare pentru tensiuni și curenți (b).

Valorile efective a acestor curenți se determină calculând modulele mărimilor complexe prin care se exprimă. Rezultă :  $I_1 = 17,4 \text{ A}$ ,  $I_2 = 9,05 \text{ A}$ ,  $I_3 = 9,05 \text{ A}$ .

Tensiunile de fază la receptor sînt :  $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = j \, 382,8 \text{ V}$ ,  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = 382,8 (0,5 - j \, 0,16) \text{ V}$ ,  $\underline{U}_3 = \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = 382,8 (0,5 + j \, 0,16) \text{ V}$ .

Valorile efective ale acestor tensiuni sînt :  $U_1 = 382,8 \text{ V}$ ,  $U_2 = 199 \text{ V}$ ,  $U_3 = 199 \text{ V}$ .

Tensiunile  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_3$  și curenții  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$  sînt reprezentate în fig. 6-23, b. Defazașele dintre curenții de fază și tensiunile de fază sînt  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ .

Puterile activă, reactivă și aparentă obțin valorile :

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 6\,660 \text{ W},$$

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 = 0,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 6\,660 \text{ VA}.$$

Se remarcă faptul că puterea aparentă nu este egală cu suma puterilor aparente pe cele trei faze,  $S \neq U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3$ , din cauza nesimetriei tensiunilor și curenților pe faze. De asemenea, puterea activă obține altă valoare față de cazul când conductorul de nul este legat (v. aplicația 6-1).

**Aplicația 6-5.** Un receptor trifazat cu conexiune în stea, fără conductor de nul, are impedanțele pe faze  $Z_1 = 0$  (scurtcircuit),  $Z_2$ ,  $Z_3$  și este alimentat de la o rețea cu tensiuni de linie simetrice (fig. 6-24, a). Să se determine tensiunile de fază la receptor.

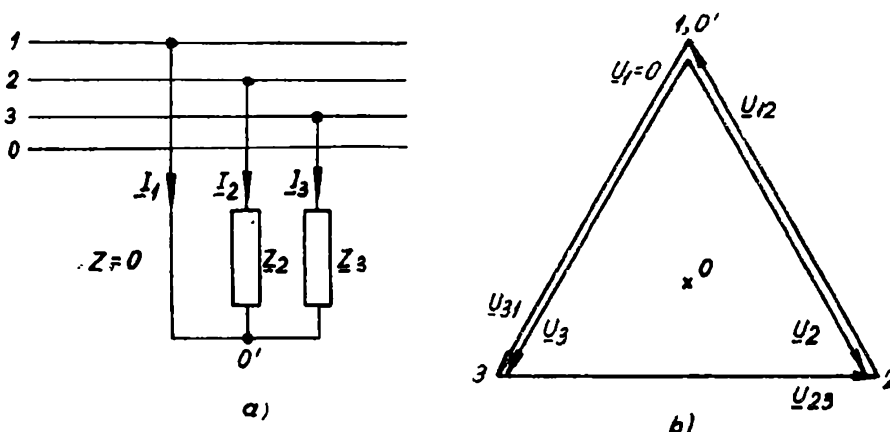


Fig. 6-24. Faza 1 scurtcircuitată (a) și diagrama corespunzătoare pentru tensiuni (b), în absența conductorului de nul.

**Rezolvare.** În această situație  $\underline{U}_1 = 0$ ,  $\underline{U}_2 = -\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_3 = \underline{U}_{31}$  (fig. 6-24, b), adică tensiunile de fază  $\underline{U}_2$  și  $\underline{U}_3$  obțin valoarea tensiunii de linie. Din acest exemplu rezultă importanța prezenței conductorului de nul. Dacă acest conductor de nul lipsește, tensiunile de fază la receptorul neechilibrat pot atinge valori mai mari decât cele normale.

### 6.5.3. CALCULUL REȚELOR TRIFAZATE CU CONEXIUNE ÎN TRIUNGHI

Se consideră în fig. 6-25 schema unui receptor trifazat cu fazele conectate în triunghi, cu impedanțele pe faze  $Z_{12}$ ,  $Z_{23}$ ,  $Z_{31}$  și alimentat de la o sursă (rețea) cu tensiuni de linie  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$  simetrice. Se reamintește că la conexiunea în triunghi, tensiunile de linie sînt aceleași cu tensiunile de fază.

Curenții de fază se determină în funcție de tensiunile de fază și impedanțele de fază cu relațiile :

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}. \quad (6-56)$$

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff în nodurile 1, 2 și 3 (fig. 6-25), rezultă legătura dintre curenții de linie și curenții de fază :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}. \quad (6-57)$$

Dacă receptorul este echilibrat, adică  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31}$ , avînd în vedere că tensiunile sînt simetrice, rezultă și curenții de fază, respectiv de linie, simetrici. În fig. 6-26 este reprezentată diagrama tensiunilor și curenților pentru acest caz, în care  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ .

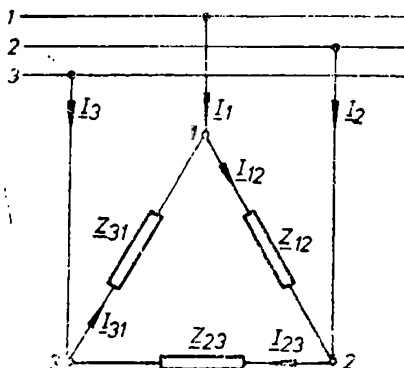


Fig. 6-25. Impedanțe conectate în triunghi.

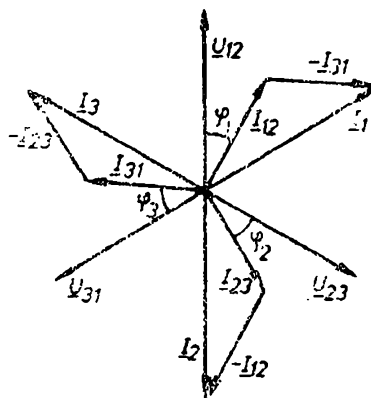


Fig. 6-26. Diagrama tensiunilor de linie, a curenților de linie și de fază la conexiunea în triunghi, în caz de simetrie.

Curenții de linie sînt de  $\sqrt{3}$  ori mai mari decît cei de fază. Dacă receptorul este neechilibrat, curenții de fază, respectiv de linie, nu sînt simetrici, dar suma curenților de linie este și în acest caz nulă :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0. \quad (6-58)$$

Înseamnă că triunghiul curenților de linie este oarecare, iar curenții de fază  $\underline{I}_{12}$ ,  $\underline{I}_{23}$ ,  $\underline{I}_{31}$  se situează într-un anumit fel în planul acestui triunghi (fig. 6-27), respectîndu-se relațiile (6-57). Pentru a găsi poziția centrului  $O$  a steii curenților de fază, atunci cînd se cunoaște triunghiul curenților de linie, se procedează astfel : se notează cu  $\underline{I}_{12}^*$ ,  $\underline{I}_{23}^*$ ,  $\underline{I}_{31}^*$  curenții de fază ce se suprapun

peste medianele triunghiului, a căror sumă se poate demonstra ușor că este nulă :

$$\underline{I}_{12}^* + \underline{I}_{23}^* + \underline{I}_{31}^* = 0. \quad (6-59)$$

Apoi, se notează cu  $\Delta I$  curentul corespunzător distanței dintre punctul  $O$  și centrul  $O^*$  de greutate al triunghiului. Cu aceasta se obține :

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= \Delta I + \underline{I}_{12}^*, & \underline{I}_{23} &= \Delta I + \underline{I}_{23}^*, \\ \underline{I}_{31} &= \Delta I + \underline{I}_{31}^*. \end{aligned} \quad (6-60)$$

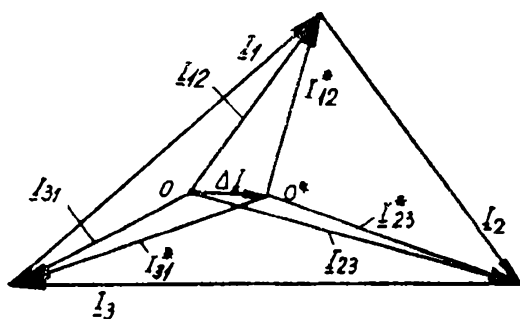


Fig. 6-27. Diagrama curenților de linie și de fază nesimetrice.

Aceste relații se înmulțesc cu  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ , respectiv  $\underline{Z}_{31}$ , se adună și rezultă :

$$\Delta \underline{I} = - \frac{\underline{I}_{12}^* \underline{Z}_{12} + \underline{I}_{23}^* \underline{Z}_{23} + \underline{I}_{31}^* \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad (6-61)$$

unde s-a ținut seama că  $\underline{I}_{12} \underline{Z}_{12} + \underline{I}_{23} \underline{Z}_{23} + \underline{I}_{31} \underline{Z}_{31} = 0$  (suma tensiunilor de linie este nulă). Astfel, cunoscând pe  $\Delta \underline{I}$ , rezultă poziția în planul complex a punctului  $O$  față de centrul  $O^*$  al triunghiului curenților de linie, respectiv rezultă poziția curenților de fază  $\underline{I}_{12}$ ,  $\underline{I}_{23}$ ,  $\underline{I}_{31}$ .

#### 6.5.4. PROBLEMA TRANSFIGURĂRII

Receptoarele trifazate, alimentate de la o sursă trifazată, pot fi cu conexiune în stea sau cu conexiune în triunghi (fig. 6-28). Pentru a găsi receptorul echivalent este necesar să se facă transfigurarea conexiunii stea în conexiune triunghi, sau invers, astfel încât toate receptoarele să aibă aceeași conexiune. Se preferă conexiunea în triunghi pentru receptorul echivalent deoarece se evită problemele referitoare la potențialul punctului de nul.

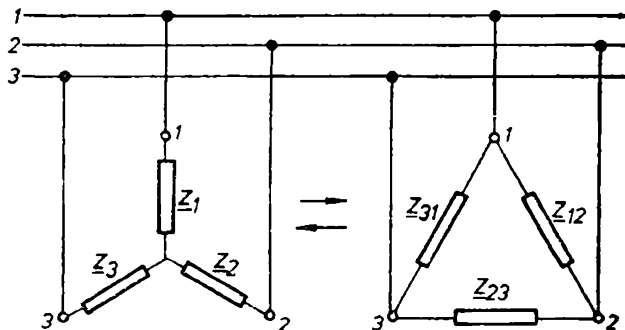


Fig. 6-28. Transfigurarea stea-triunghi.

Problema transfigurării circuitelor se pune în felul următor : cunoscându-se impedanțele  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$  ale conexiunii în stea, să se determine impedanțele  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{31}$  ale conexiunii în triunghi, sau invers. Condițiile ce se impun în acest sens se formulează astfel încât curenții de linie și puterile absorbite de la sursă să fie aceleași la ambele conexiuni, ceea ce înseamnă că impedanța echivalentă dintre punctele 1-2, 2-3 și 3-1 de la conexiunea în stea să fie egală cu impedanța echivalentă dintre aceleași puncte de la conexiunea în triunghi. Deci :

$$\begin{aligned} (1-2) \quad \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_{12} (\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31})}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \\ (2-3) \quad \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 &= \frac{\underline{Z}_{23} (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{31})}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \\ (3-1) \quad \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{Z}_{31} (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23})}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \end{aligned} \quad (6-62)$$

S-a obținut astfel un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute care pot fi :  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{31}$  sau  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$ . Din (6-62) se obțin simplu următoarele egalități :

$$\frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{23} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \underline{Z}_{12} \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{23} \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{31} \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 \quad (6-63)$$

de care se poate face uz la determinarea impedanțelor necunoscute.

**Aplicația 6-6.** Să se calculeze curenții de linie  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  și  $\underline{I}_3$  absorbiți de la sursa trifazată de către consumatorul ce constă din două receptoare, unul cu conexiune în stea și altul cu conexiune în triunghi (fig. 6-29). Tensiunile de linie ale sursei de alimentare sînt simetrice, cu valoarea efectivă 380 V, iar parametrii elementelor de pe fazele receptoarelor au valorile :

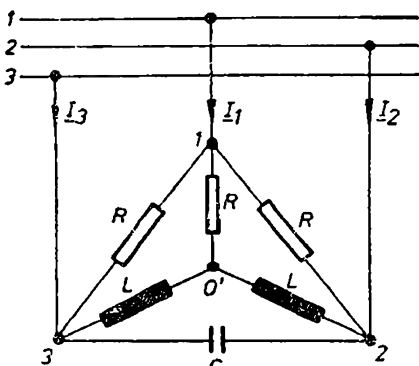


Fig. 6-29. Două receptoare trifazate neechilibrate, conectate în triunghi și în stea, alimentate de la aceeași sursă.

$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10 \, \Omega.$$

**Rezolvare.** Impedanțele conectate în stea, respectiv în triunghi, sînt :  $\underline{Z}_1 = R = 10 \, \Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = j\omega L = j10 \, \Omega$ ,  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{31} = R = 10 \, \Omega$ ;  $\underline{Z}_{23} = -j\frac{1}{\omega C} = -j10 \, \Omega$ .

Pentru rezolvarea problemei, conexiunea în stea se transfigurează în triunghi. Conform relațiilor de transfigurare (6-63) se obține :

$$\underline{Z}'_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = 10(2+j) \, \Omega,$$

$$\underline{Z}'_{23} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1} = 10(-1+j2) \, \Omega,$$

$$\underline{Z}'_{31} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 10(2+j) \, \Omega.$$

În urma transfigurării se obține circuitul din fig. 6-30, a. Impedanțele receptorului echivalent conectat în triunghi (fig. 6-30, b) sînt :

$$\underline{Z}_{12e} = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}'_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}'_{12}} = (7+j) \, \Omega, \quad \underline{Z}_{23e} = 5(-1-j3) \, \Omega, \quad \underline{Z}_{31e} = (7+j) \, \Omega.$$

Pentru calculul curenților pe cele trei faze (fig. 6-30, b), se consideră tensiunea  $\underline{U}_{23}$  situată pe axa reală, deci :

$$\underline{U}_{23} = U_{23} = 380 \, \text{V}, \quad \underline{U}_{12} = U_{12} e^{j\frac{2\pi}{3}} = 380 \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{V},$$

$$\underline{U}_{31} = U_{31} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 380 \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{V}.$$

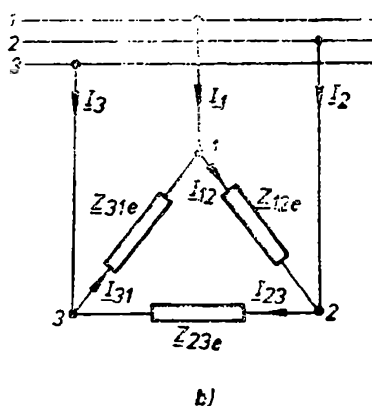
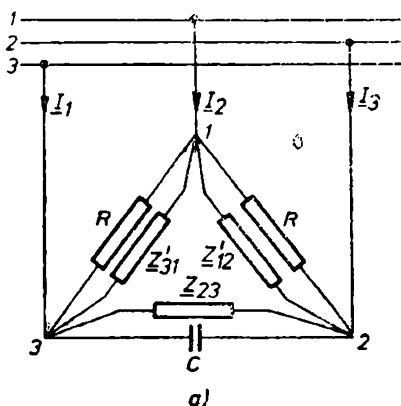


Fig. 6-30. Scheme echivalente.

Curenții de fază pentru receptorul echivalent se calculează cu relațiile (6-56) din care, după înlocuirea valorilor complexe ale tensiunilor și impedanțelor echivalente de mai sus, se obține :

$$\underline{I}_{12} = 7,6 (-2,64 + j 6,52) \text{ A}, \quad \underline{I}_{23} = 7,6 (-1 - j 3) \text{ A},$$

$$\underline{I}_{31} = 7,6 (-4,36 - j 5,52) \text{ A}.$$

Cunoscând curenții de fază, rezultă curenții de linie :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 7,6 (-1,72 + j) \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 7,6 (1,64 - j 9,52) \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 7,6 (-3,36 - j 2,52) \text{ A}.$$

### 6.5.5. METODA GENERATORULUI ECHIVALENT DE Tensiune

Această metodă, cunoscută și sub denumirea de teorema lui Thévenin, se aplică atunci când se cere să se determine curentul dintr-o latură pasivă a rețelei în funcție de parametrii elementelor rețelei, sau atunci când se cere să se determine variația curentului din latură în funcție de impedanța laturii respective.

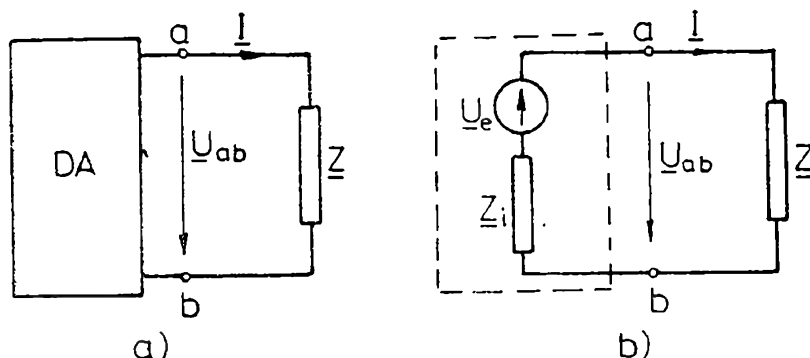


Fig. 6-31. Latura de rețea (a) și schema generatorului echivalent de tensiune (b).

Se consideră în fig. 6-31, a o latură pasivă cuprinsă între bornele a și b ale unei rețele complexe, având impedanța  $\underline{Z}$  și fiind parcursă de curentul  $\underline{I}$ . Tensiunea la borne  $\underline{U}_{ab}$  este asigurată de sursele conținute de restul rețelei, ce constituie un dipol activ (DA). Metoda la care ne referim constă în înlocuirea dipolului activ DA printr-un generator echivalent de tensiune, având t.e.m.  $\underline{U}_e$  și impedanța interioară  $\underline{Z}_i$  care, conectat în serie cu latura de impedanță  $\underline{Z}$  (fig. 6-31, b), asigură prin această latură același curent  $\underline{I}$ , respectiv aceeași tensiune  $\underline{U}_{ab}$ , ca și în cazul real. Astfel, curentul din latură se determină cu relația simplă :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z} + \underline{Z}_i}. \quad (6-64)$$

Evident, pentru calculul curentului  $\underline{I}$  cu această relație este necesar să se cunoască  $\underline{U}_e$  și  $\underline{Z}_i$ . În acest sens, se observă că :

$$\underline{U}_e = (\underline{U}_{ab})_{\underline{Z}=\infty} = (\underline{I}\underline{Z})_{\underline{Z}=\infty} \quad (6-65)$$

$$\underline{Z}_i = (\underline{Z}_{ab})_{\underline{Z}=\infty, p} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_k} \quad (6-66)$$

unde  $\underline{I}_k = (\underline{I})_{\underline{Z}=0}$  este curentul din circuitul generatorului echivalent de tensiune cînd bornele  $a$  și  $b$  sînt scurtcircuitate iar  $(\underline{Z}_{ab})_{\underline{Z}=\infty, p}$  este impedanța echivalentă între bornele  $a$  și  $b$  a dipolului pasivizat (t.e.m. ale surselor dipolului considerate egale cu zero).

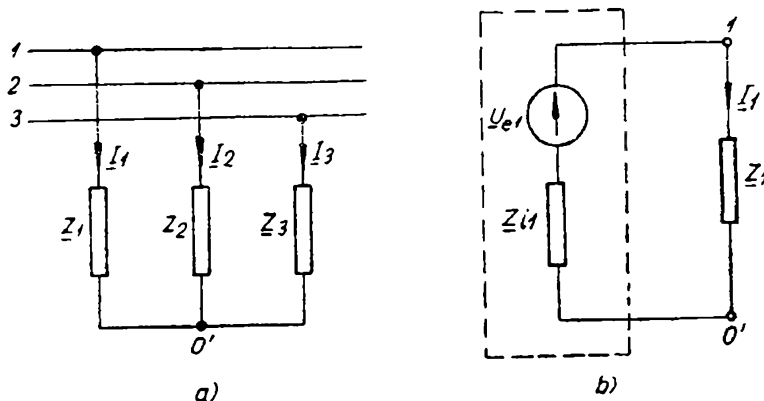


Fig. 6-32. Schema recepteurului trifazat conectat în stea (a) și schema generatorului echivalent de tensiune pentru calculul curentului  $\underline{I}_1$  (b).

**Aplicația 6-7.** Se consideră schema reprezentată în fig. 6-32, a a unui receptor trifazat cu fazele conectate în stea. Se cere să se determine curentul  $\underline{I}_1$  folosind metoda generatorului echivalent de tensiune. Impedanțele interioare ale sursei se neglijează.

**Rezolvare.** Latura prin care circulă curentul  $\underline{I}_1$  este cuprinsă între punctele 1 și  $O'$ . Se detașează această latură iar restul rețelei se înlocuiește cu un generator echivalent de tensiune (fig. 6-32, b), avînd t.e.m.  $\underline{U}_{e1}$  și impedanța interioară  $\underline{Z}_{i1}$ , obținîndu-se :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{e1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{i1}}.$$

În baza relației (6-65) și din fig. 6-33, a, t.e.m.  $\underline{U}_{e1}$  este :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{e1} = (\underline{U}_{10'})_{\underline{Z}_1 = \infty} &= \underline{U}_{12} + \underline{Z}_2 \underline{I}_{23} = \underline{U}_{12} + \underline{Z}_2 \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{12} \underline{Z}_3 + (\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23}) \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \\ &= \frac{\underline{U}_{12} \underline{Z}_3 - \underline{U}_{31} \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}, \end{aligned}$$

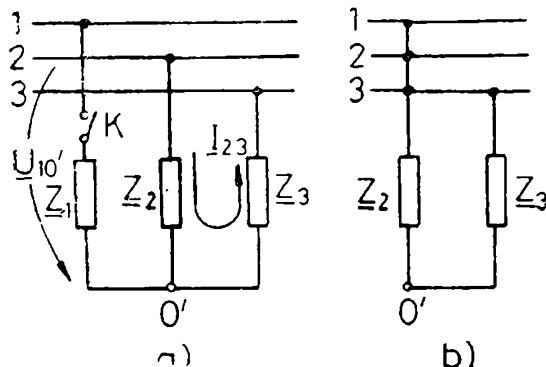


Fig. 6-33. Schema recepteurului trifazat conectat în stea cu faza 1 întreruptă (a) și schema de calcul a impedanței dipolului pasivizat (b).

unde s-a ținut seama că  $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$ .

Impedanța interioară  $\underline{Z}_{i1}$  se obține pasivizînd dipolul activ (fig. 6-33, b) și, conform relației (6-66), calculînd impedanța  $\underline{Z}_{10'}$  a acestuia, adică :

$$\underline{Z}_{i1} = (\underline{Z}_{10'})_p, \underline{Z} = \infty = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Prin înlocuirea lui  $\underline{U}_e$  și  $\underline{Z}_{i1}$  în expresia lui  $\underline{I}_1$ , rezultă :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12} \underline{Z}_3 - \underline{U}_{31} \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1},$$

relație care este identică cu (6-53).



## 6.5.6. METODA COMPONENTELOR SIMETRICE

Metoda componentelor simetrice se aplică pentru calculul rețelelor trifazate la care tensiunile, respectiv curenții, nu formează sisteme simetrice. Pentru ilustrarea metodei, se consideră un receptor trifazat alimentat cu tensiuni de linie  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$  nesimetrice, reprezentate în fig. (6-34, a).

Se poate demonstra că un sistem trifazat nesimetric de tensiuni (sau curenți) se descompune univoc într-un sistem simetric de succesiune directă, un sistem

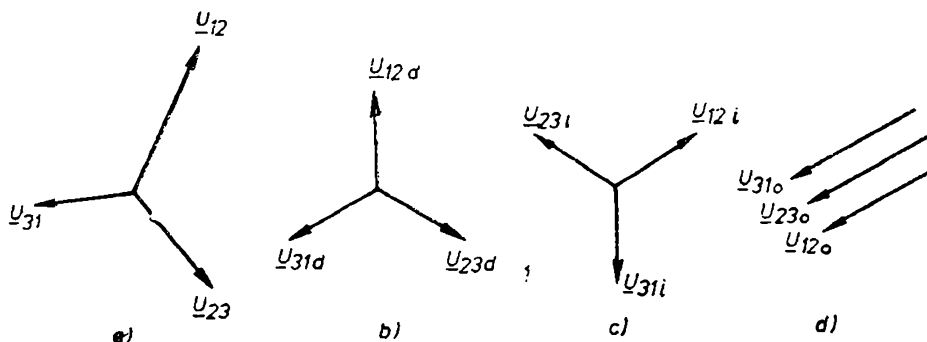


Fig. 6-34. Descompunerea în componente simetrice :

a — sistemul de tensiuni trifazate nesimetrice; b — sistemul de tensiuni simetrice directe; c — sistemul de tensiuni simetrice inverse; d — sistemul de tensiuni omopolare.

simetric de succesiune inversă și un sistem omopolar (fig. 6-34, b, c și d). Așadar, cele trei tensiuni de linie nesimetrice pot fi scrise, ca mărimi complexe, astfel :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_{12d} + \underline{U}_{12i} + \underline{U}_{12o} \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_{23d} + \underline{U}_{23i} + \underline{U}_{23o} \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_{31d} + \underline{U}_{31i} + \underline{U}_{31o}\end{aligned}\quad (6-67)$$

unde indicii  $d$ ,  $i$  și  $o$  se referă la componentele simetrice de succesiune directă, inversă și omopolare. Sistemul omopolar se caracterizează prin faptul că cele trei tensiuni, corespunzătoare celor trei faze, sînt în fază și egale între ele, adică :  $\underline{U}_{12o} = \underline{U}_{23o} = \underline{U}_{31o} = \underline{U}_0$ .

Problema ce se pune este următoarea : fiind dat sistemul de tensiuni nesimetrice  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$ , să se determine componentele simetrice de succesiune directă, inversă și omopolară. Dacă această problemă este rezolvată, receptorul trifazat liniar, alimentat cu sistemul trifazat nesimetric de tensiuni, se înlocuiește prin trei receptoare alimentate :

- primul, cu un sistem trifazat simetric de tensiuni de succesiune directă ( $\underline{U}_{12d}$ ,  $\underline{U}_{23d}$ ,  $\underline{U}_{31d}$ ) ;
- al doilea, cu un sistem trifazat simetric de tensiuni de succesiune inversă ( $\underline{U}_{12i}$ ,  $\underline{U}_{23i}$ ,  $\underline{U}_{31i}$ ) ;
- al treilea, cu un sistem omopolar de tensiuni ( $\underline{U}_0$ ).

Componentele  $\underline{U}_0$ ,  $\underline{U}_{12d}$  și  $\underline{U}_{12i}$  se determină ținînd seama de cele explicate la paragraful 6.1.1. În cazul la care ne referim, se obțin :

$$\underline{U}_{23d} = \underline{a}^2 \underline{U}_{12d}, \quad \underline{U}_{31d} = \underline{a} \underline{U}_{12d}, \quad \underline{U}_{23i} = \underline{a} \underline{U}_{12i}, \quad \underline{U}_{31i} = \underline{a}^2 \underline{U}_{12i}. \quad (6-68)$$

Înlocuind (6-68) în (6-67), rezultă :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_{12a} + \underline{U}_{12i} + \underline{U}_0 \\ \underline{U}_{23} &= \underline{a}^2 \underline{U}_{12a} + \underline{a} \underline{U}_{12i} + \underline{U}_0 \\ \underline{U}_{31} &= \underline{a} \underline{U}_{12a} + \underline{a}^2 \underline{U}_{12i} + \underline{U}_0.\end{aligned}\tag{6-69}$$

Însumînd relațiile (6-69) și avînd în vedere că :

$$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0,\tag{6-70}$$

se obține  $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 3\underline{U}_0$ , de unde :

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3} (\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31}) = 0.\tag{6-71}$$

De remarcat că atunci cînd suma geometrică a celor trei tensiuni nesimetrice este nulă, cum e cazul tensiunilor de linie la circuitele trifazate, componenta omopolară a acestora este nulă.

Pentru determinarea componentelor simetrice directe, relațiile (6-69) se înmulțesc astfel : a doua cu  $\underline{a}$  și a treia cu  $\underline{a}^2$  și se obține :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_{12a} + \underline{U}_{12i} + \underline{U}_0 \\ \underline{a} \underline{U}_{23} &= \underline{a}^3 \underline{U}_{12a} + \underline{a}^2 \underline{U}_{12i} + \underline{a} \underline{U}_0 \\ \underline{a}^2 \underline{U}_{31} &= \underline{a}^3 \underline{U}_{12a} + \underline{a}^4 \underline{U}_{12i} + \underline{a}^2 \underline{U}_0.\end{aligned}$$

Cum  $\underline{a}^3 = 1$  și  $\underline{a}^4 = \underline{a}$ , adunînd aceste relații și ținînd seama de (6-70), se obține componenta  $\underline{U}_{12a}$  în forma :

$$\underline{U}_{12a} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{12} + \underline{a} \underline{U}_{23} + \underline{a}^2 \underline{U}_{31}).\tag{6-72}$$

Cunoscînd pe  $\underline{U}_{12a}$ , cu relațiile (6-68) se obțin ușor celelalte două componente :  $\underline{U}_{23a}$  și  $\underline{U}_{31a}$ .

Pentru determinarea componentelor simetrice inverse, se înmulțesc relațiile (6-69) astfel : a doua cu  $\underline{a}^2$  și a treia cu  $\underline{a}$ . Apoi se adună și rezultă :

$$\underline{U}_{12i} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{12} + \underline{a}^2 \underline{U}_{23} + \underline{a} \underline{U}_{31}).\tag{6-73}$$

Cu relațiile (6-68) se obțin ușor celelalte două componente :  $\underline{U}_{23i}$  și  $\underline{U}_{31i}$ .

Corespunzător sistemului de tensiuni cu succesiune directă, pe fazele receptorului se obțin curenții  $\underline{I}_{1fa}$ ,  $\underline{I}_{2fa}$  și  $\underline{I}_{3fa}$ . Sistemul simetric de tensiuni de succesiune inversă produce pe fazele receptorului curenții  $\underline{I}_{1fi}$ ,  $\underline{I}_{2fi}$  și  $\underline{I}_{3fi}$ . În mod asemănător, sistemul omopolar de tensiuni, dacă acestea există, determină curenții  $\underline{I}_{1fo}$ ,  $\underline{I}_{2fo}$  și  $\underline{I}_{3fo}$ . După ce acești curenți au fost determinați,

se aplică principiul superpoziției, rezultând că tensiunile trifazate nesimetrice  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$  produc pe fazele receptorului curenții :

$$\begin{aligned}\underline{I}_{1f} &= \underline{I}_{1fa} + \underline{I}_{1fi} + \underline{I}_{1fo} \\ \underline{I}_{2f} &= \underline{I}_{2fa} + \underline{I}_{2fi} + \underline{I}_{2fo} \\ \underline{I}_{3f} &= \underline{I}_{3fa} + \underline{I}_{3fi} + \underline{I}_{3fo}.\end{aligned}\tag{6-74}$$

În sistemele energetice (linii de transport și rețele de distribuție a energiei electrice), nesimetria tensiunilor și curenților poate avea loc în caz de scurt-circuit între două faze, puneri la pământ a unei faze, întreruperea unei faze, receptoarele trifazate nu sînt echilibrate (pe faze se conectează receptoare monofazate de puteri diferite) etc.

Ținînd seama de faptul că nesimetria tensiunilor, respectiv a curenților, este cu atît mai mare cu cît componentele inverse și omopolare sînt mai mari, practic se consideră că sistemul de tensiuni (respectiv curenții) este simetric dacă gradul de disimetrie  $\varepsilon_i$  și gradul de asimetrie  $\varepsilon_h$ , definiți prin :

$$\varepsilon_i \% = \frac{U_i}{U_d} 100 ; \quad \varepsilon_h \% = \frac{U_h}{U_d} 100,\tag{6-75}$$

nu depășesc 5%.

## Capitolul 7

### CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU

#### 7.1. DEFINIREA REGIMULUI TRANZITORIU

În capitolele precedente s-a studiat regimul permanent de funcționare al circuitelor (rețelelor) electrice. Acest regim corespunde stării în care se stabilesc mărimile din circuit (curenți, tensiuni) după un timp lung, teoretic infinit, scurs de la producerea unei modificări în circuit (conectarea sau deconectarea unei surse, introducerea sau scoaterea unui element din circuit etc.). *Regimul permanent* al circuitelor (rețelelor) de c.c. se caracterizează prin valori constante ale curenților și tensiunilor. Pentru circuitele (rețelele) de c.a., regimul permanent se caracterizează prin valori constante ale amplitudinilor tensiunilor și curenților, respectiv a defazajelor.

Pentru definirea regimului tranzitoriu de funcționare a circuitelor (rețelelor) electrice, se prezintă unele considerațiuni referitoare la conectarea la o sursă de tensiune a unei bobine, respectiv a unui condensator.

Se consideră un circuit, avînd o rezistență  $R$  și o inductanță  $L$  legate în serie, ce se conectează la momentul  $t=0$  la bornele unei surse de c.c. cu t.e.m.  $U_e$  constantă și cu rezistența interioară  $R_i$ . Curentul din circuit este nul atît înainte cît și imediat după conectare, iar după un timp lung, scurs de la conectare, devine constant :

$$\{i(t)\}_{t=0_+}=0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i(t)=I=\frac{U_e}{R+R_i}. \quad (7-1)$$

S-a notat cu  $t=0_+$  momentul imediat următor conectării. Creșterea curentului de la valoarea zero la valoarea  $I$  nu are loc instantaneu deoarece, în acest caz și fluxul magnetic creat de curent în bobină s-ar modifica instantaneu de la valoarea zero la  $\Phi$ . O asemenea variație ar da o derivată în raport cu timpul a fluxului magnetic de valoare infinită și conform legii inducției electromagnetice ar apare o t.e.m. indusă infinit de mare, ceea ce este o imposibilitate, deoarece tensiunea de alimentare a circuitului este finită. Curentul crește treptat de la valoarea zero la valoarea constantă  $I$ , într-un interval de timp care practic este foarte scurt, depinzînd de constanta de timp a circuitului. Acest interval de timp se numește *durață tranzitorie*, iar regimul de funcționare al circuitului în acest timp se numește *regim tranzitoriu*.

Fenomenul este analog dacă sursa la care se conectează circuitul este de c.a. În acest caz, amplitudinea curentului din circuit crește în timp de la valoarea zero la valoarea :  $I_m = \frac{U_{em}}{Z}$ , unde  $Z$  este impedanța circuitului (inclusiv sursa).

O situație puțin deosebită are loc cînd circuitul constă dintr-o rezistență  $R$  și o capacitate  $C$  legate în serie. Considerînd condensatorul în stare inițială descărcat și conectînd circuitul la sursa de c.c. cu t.e.m.  $U_e$  și rezistența interioară  $R_i$ , în circuit apare un curent electric corespunzător deplasării sarcinilor electrice de încărcare a condensatorului. După ce condensatorul s-a încărcat, deplasarea sarcinilor electrice încetează, respectiv curentul devine nul. Încărcarea condensatorului are loc în timp deoarece tensiunea  $u_c$  de la bornele sale nu admite variații bruște. Dacă  $u_c$  s-ar modifica brusc, curentul din circuit,  $i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du_c}{dt}$ , ar deveni infinit, respectiv efectul termic al curentului  $Ri^2$  ar fi infinit de mare, ceea ce contrazice principiul de conservare a energiei. Deci, în acest caz, la momentul  $t=0_+$  al conectării la sursă, curentul din circuit este :

$$\{i(t)\}_{t=0_+} = I = \frac{U_e}{R + R_i} \text{ și } \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0. \quad (7-2)$$

În intervalul de timp cît curentul din circuit se modifică de la valoarea  $I$  la zero, circuitul funcționează în regim tranzitoriu.

Dacă sursa la care se conectează circuitul cu  $RC$  în serie este de c.a., condensatorul se încarcă și se descarcă alternativ. Aceasta face ca în circuit să existe un curent și după un timp lung scurs de la conectare (curentul permanent), avînd amplitudinea :  $I_m = \frac{U_{em}}{Z}$ .

Cele prezentate mai sus ilustrează că regimul tranzitoriu de funcționare a circuitelor (rețelelor) electrice se desfășoară în timp și are loc la trecerea de la un regim permanent la altul. În general, stabilirea unei stări staționare de orice natură (electrostatică, electrocinetică, magnetostatică etc.) este întotdeauna precedată de un proces tranzitoriu electromagnetic.

Cu toate că regimul normal de funcționare al circuitelor este cel permanent, în unele cazuri prezintă importanță și studiul regimului tranzitoriu. Se urmărește în special modul de variație în timp a curenților, a tensiunii condensatoarelor etc. De exemplu, regimul tranzitoriu ce are loc la pornirea sau la frînarea unui motor electric are o importanță deosebită atît pentru motorul însuși, cît și pentru mașina (instalația) acționată.

## 7.2. METODICA DE STUDIU A REGIMURILOR TRANZITORII

### 7.2.1. ECUAȚIA INTEGRO-DIFERENȚIALĂ

Studiul funcționării unui circuit electric în regim tranzitoriu se referă la găsirea modului de variație în timp a curenților și tensiunilor din circuit pe durata cît are loc acest regim. În acest scop este necesar să se stabilească și să se soluționeze ecuația integro-diferențială referitoare la mărimea în cauză (curent, tensiune etc.). Spre exemplu, se consideră circuitul cu parametrii constanți  $RLC$  serie, reprezentat în fig. 7-1 care, la momentul  $t=0$ , se conectează la o sursă cu tensiunea de borne  $u_b(t)$ , prin închiderea întreruptorului.

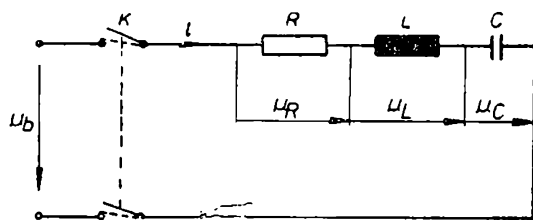


Fig. 7-1. Circuit RLC serie.

lui  $K$ . Evident că dacă sursa este de c.c., tensiunea de borne este constantă,  $u_b(t) = U_b$ , iar dacă sursa este de curent alternativ, atunci  $u_b(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ .

Se urmărește variația în timp a curentului,  $i(t)$  începînd din momentul  $t=0_+$ .

Ecuția integro-diferențială a curentului din circuit se stabilește pe

baza egalității dintre tensiunea la borne și suma căderilor de tensiune pe elementele circuitului :

$$u_b(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t),$$

în care se înlocuiesc :

$$u_R(t) = Ri(t), \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + \frac{Q_0}{C}$$

și se obține :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt + \frac{Q_0}{C} = u_b(t), \quad (7-3)$$

unde  $\frac{Q_0}{C}$  este o constantă de integrare.

Ecuția integro-diferențială (7-3) este liniară, cu coeficienți constanți și neomogenă. Rezolvînd această ecuație se obține curentul ca funcție de timp,  $i(t)$ .

Soluția generală a ecuației neomogene (7-3) are două componente și anume :

— soluția particulară a ecuației neomogene care reprezintă componenta forțată (permanentă) a curentului ;

— soluția generală a ecuației omogene care, în cazul de față reprezintă componenta liberă (tranzitorie) a curentului, adică :

$$i(t) = i_p(t) + i_{tr}(t) \quad (7-4)$$

Expresiile acestor două soluții se stabilesc pe baza cunoștințelor referitoare la rezolvarea ecuațiilor diferențiale, prezentate în cadrul disciplinei de matematici superioare.

## 7.2.2. CONDIȚII INIȚIALE

O atenție deosebită trebuie acordată determinării constantelor de integrare ce intervin în soluția generală a ecuației integro-diferențiale neomogene (7-3). Acestea se determină pe baza condițiilor inițiale, adică a valorilor pe care le obțin curentul din circuit, tensiunile la bornele unora dintre elemente etc., la momentul  $t=0_+$  (imediat după conectarea circuitului). În unele cazuri este necesar să se folosească și condițiile finale, corespunzătoare la  $t=\infty$ .

Numărul de condiții inițiale ce se pun trebuie să fie egal cu numărul de constante de integrare ce trebuie determinate. Altfel spus, prin punerea con-

dițiilor inițiale, se stabilește un sistem de ecuații din care se determină constantele de integrare.

Pentru exemplificare, ne referim la ecuația integro-diferențială (7-3), stabilită pentru circuitul  $RLC$  serie conectat la sursa cu tensiunea de borne  $u_b(t) = U_b$  (tensiune continuă). Soluția acestei ecuații are două componente,  $i_p(t)$  și  $i_{tr}(t)$  (relația 7-4), ce trebuie determinate fiecare în parte.

Curentul permanent ce se stabilește în circuit după un timp lung scurs de la conectarea circuitului la tensiunea continuă este nul:  $i_p(t) = 0$ , deoarece circuitul conține un condensator legat în serie cu celelalte elemente. Ca urmare, curentul din circuit are numai componenta tranzitorie:  $i(t) = i_{tr}(t)$ . Curentul permanent  $i_p(t) = 0$  fiind soluția particulară a ecuației integro-diferențiale neomogene, prin înlocuirea sa în ecuație rezultă valoarea constantei de integrare  $\frac{Q_0}{C} = U_b$ .

Componenta tranzitorie (liberă) a curentului se găsește rezolvînd ecuația omogenă:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt + \frac{Q_0}{C} = 0 \quad (7-5)$$

în care, deși se referă la curentul tranzitoriu, nu s-a pus la curent indicile „tr”, deoarece  $i_{tr}(t) = i(t)$ .

Derivînd în raport cu timpul ecuația (7-5), rezultă:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0. \quad (7-6)$$

Soluția unei astfel de ecuații diferențiale omogene este de forma:

$$i(t) = I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t}, \quad (7-7)$$

în care

$p_1, p_2$  sînt rădăcinile ecuației caracteristice;

$I_1, I_2$  — constante de integrare ce se determină din condițiile inițiale.

Ecuația caracteristică fiind:

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0 \quad (7-8)$$

rezultă

$$p_{1,2} = -\Delta_1 \pm \Delta_2, \quad (7-9)$$

unde

$$\Delta_1 = \frac{R}{2L}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (7-10)$$

Condițiile inițiale care se pun pentru determinarea constantelor de integrare  $I_1$  și  $I_2$  sînt:

*Prima condiție inițială*: la momentul  $t=0_+$ , cînd are loc conectarea circuitului la tensiunea de borne  $U_b$ , curentul din circuit este nul deoarece în circuit există o bobină care nu permite variații bruște ale curentului. Din (7-7) rezultă:

$$i(0_+) = 0 = I_1 + I_2. \quad (7-11)$$

A doua condiție inițială : la momentul  $t=0_+$ , tensiunea aplicată la bornele circuitului este egală și de semn opus cu t.e.m. indusă în bobină, adică

$$U_b = \left\{ L \frac{di(t)}{dt} \right\}_{t=0_+} = p_1 I_1 + p_2 I_2. \quad (7-12)$$

Din ecuațiile (7-11) și (7-12), rezultă constantele de integrare :

$$I_1 = \frac{U_b}{2\Delta_2}; \quad I_2 = -\frac{U_b}{2\Delta_2}, \quad (7-13)$$

cu care soluția (7-7) devine :

$$i(t) = \frac{U_b}{2\Delta_2} e^{\Delta_1 t} (e^{\Delta_2 t} - e^{-\Delta_2 t}), \quad (7-14)$$

unde s-a ținut seama de (7-9).

### 7.2.3. NATURA RĂDĂCINILOR ECUAȚIEI CARACTERISTICE

Referindu-ne la ecuația caracteristică de gradul doi (7-8), dependent de valorile parametrilor  $R$ ,  $L$  și  $C$  ai circuitului se disting trei moduri de variație în timp a curentului în regim tranzitoriu.

*Cazul a* :  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  — regim aperiodic ; rădăcinile  $p_1$  și  $p_2$  ale ecuației caracteristice sînt reale și distincte ( $\Delta_2$  mărime reală).

*Cazul b* :  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  — regim aperiodic critic ; rădăcinile ecuației caracteristice sînt duble :  $p_1 = p_2 = -\Delta_1$  ( $\Delta_2 = 0$ ).

*Cazul c* :  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  — regim oscilator amortizat ; rădăcinile  $p_1$  și  $p_2$  sînt complex conjugate ( $\Delta_2$  mărime imaginară).

În fig. 7-2, *a* este arătat modul de variație în timp a curentului din circuit pentru cazurile *a* și *b*, iar în fig. 7-2, *b* pentru cazul *c*.

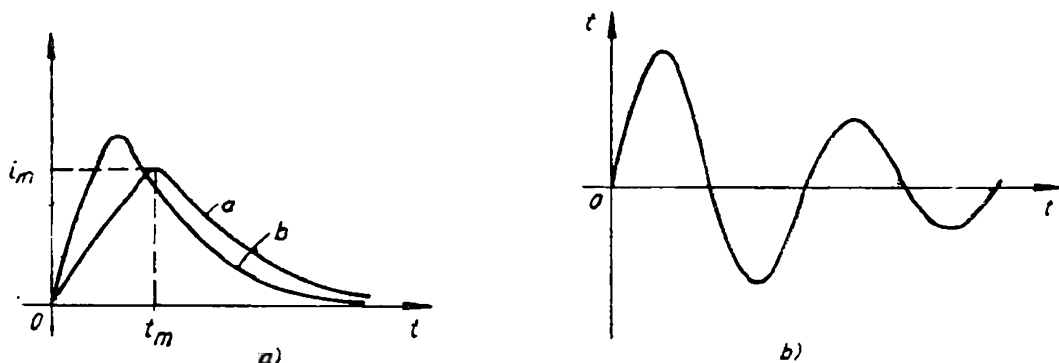


Fig. 7-2. Variația în timp a curentului :  
a — aperiodică (a) și aperiodică critică (b) ; b — oscilator amortizată.



În regim oscilator amortizat (cazul c) se poate scrie  $\Delta_2 = j\omega$ , unde  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ , cu care relația (7-14) devine :

$$i(t) = \frac{U_b}{\omega} e^{-\Delta_1 t} \left( \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) = \frac{U_b}{\omega} e^{-\Delta_1 t} \sin \omega t. \quad (7-15)$$

Se remarcă faptul că amplitudinea acestei funcții sinusoidale scade în timp, devenind nulă pentru  $t = \infty$ . Amortizarea este cu atât mai mare cu cât  $\Delta_1 = \frac{R}{2L}$  are valoarea mai mare. Pentru  $R=0$ , amortizarea este nulă, adică amplitudinea oscilațiilor curentului din circuit este constantă.

**Aplicația 7-1.** Bobina de excitație a unei mașini electrice se conectează la o sursă de c.c. cu tensiunea la borne  $U_b$ . Să se determine variația în timp a curentului din circuit.

*Rezolvare.* Bobina considerată are inductanța  $L$  și rezistența  $R$  în serie (fig. 7-3).

În timpul procesului tranzitoriu ce are loc după închiderea întreruptorului  $K$ , curentul din circuit crește de la valoarea zero la valoarea corespunzătoare regimului permanent :

$I = \frac{U_b}{R}$ . Se obține următoarea ecuație diferențială a curentului din circuit :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U_b, \quad (7-16)$$

care arată că tensiunea aplicată la bornele circuitului este egală cu suma căderilor de tensiune pe elementele circuitului legate în serie.

Fig. 7-3. Schema electrică a bobinei.

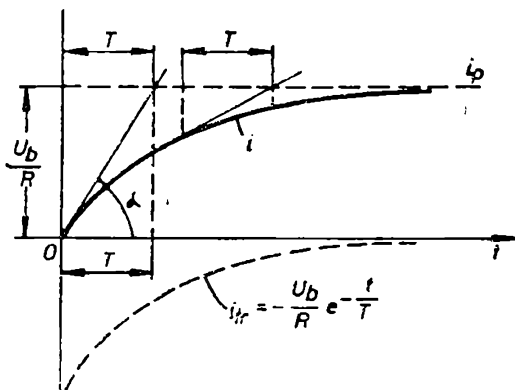
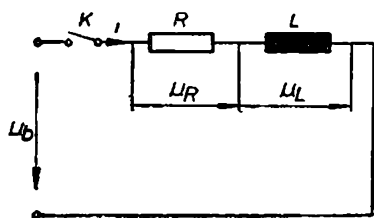


Fig. 7-4. Variația în timp a curentului la conectarea bobinei la o sursă de c.c.

Soluția generală a ecuației (7-16) are două componente : componenta permanentă și componenta tranzitorie :  $i(t) = i_p(t) + i_{tr}(t)$ . Componenta permanentă este soluția particulară a ecuației diferențiale neomogene, adică  $i_p(t) = I = \frac{U_b}{R}$ . Componenta tranzitorie (liberă) este soluția generală a ecuației omogene :

$$L \frac{di_{tr}(t)}{dt} + Ri_{tr}(t) = 0,$$

avînd forma :  $i_{tr}(t) = I_0 e^{pt} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ , unde  $I_0$  este constanta de integrare. Deci, curentul din circuit este :

$$i(t) = \frac{U_b}{R} + I_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (7-17)$$

unde

$$T = \frac{L}{R} \quad (7-18)$$

este constanta electromagnetică de timp a circuitului.

Constanta de integrare  $I_0$  se determină din condiția inițială și anume, la  $t=0_+$  avem  $i(0_+)=0$ , adică :

$$i(0_+)=0=\frac{U_b}{R}+I_0; \quad I_0=-\frac{U_b}{R}$$

cu care relația (7-17) devine :

$$i(t)=\frac{U_b}{R}(1-e^{-\frac{t}{T}}). \quad (7-19)$$

În fig. 7-4 este reprezentată curba exponențială de variație în timp a curentului din circuit și a componentelor sale permanentă și tranzitorie. Se poate dovedi ușor că tangenta în origine sau în oricare alt punct la curba exponențială determină pe asimptotă un segment care, măsurat la scara timpului, este egal cu constanta de timp  $T$  a circuitului.

În ceea ce privește durata procesului tranzitoriu, teoretic aceasta este infinită. Practic se consideră că procesul tranzitoriu s-a încheiat atunci când curentul din circuit diferă cu mai puțin de 5% față de curentul de regim permanent. Timpul  $t_1$  corespunzător atingerii acestei situații rezultă astfel :

$$0,95=\frac{i_1}{I}=\frac{\frac{U_b}{R}(1-e^{-\frac{t_1}{T}})}{\frac{U_b}{R}}=1-e^{-\frac{t_1}{T}};$$

$$t_1=T \ln \frac{1}{0,05} \approx 3T. \quad (7-20)$$

Deci, după scurgerea unui timp de  $(3 \dots 4) T$  procesul tranzitoriu este practic încheiat.

**Aplicația 7-2.** Să se studieze regimul tranzitoriu ce are loc la conectarea unui circuit  $RC$  serie la o tensiune de borne sinusoidală.

**Rezolvare.** Se consideră tensiunea sinusoidală  $u_b=U_{bm} \sin(\omega t+\alpha)$  aplicată la bornele circuitului reprezentat în fig. 7-5. Se urmărește variația în timp a curentului din circuit și a tensiunii  $u_C$  la bornele condensatorului, după închiderea la momentul  $t=0$  a întreruptorului  $K$ , în starea inițială condensatorul fiind descărcat.

Ecuția integro-diferențială a curentului din circuit se obține din :  $u_R+u_C=u_b$ , adică :

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt+\frac{Q_0}{C}=U_{bm}\sin(\omega t+\alpha). \quad (7-21)$$

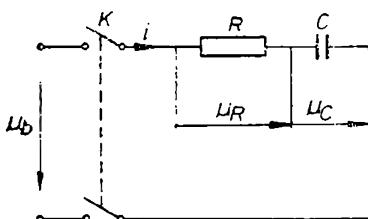


Fig. 7-5. Circuit  $RC$  serie.

Soluția generală a acestei ecuații are două componente :  $i(t)=i_p(t)+i_{tr}(t)$ , unde, pentru circuitul considerat, componenta permanentă este :  $i_p(t)=I_m \sin(\omega t+\alpha-\varphi)$ , în care

$$I_m=\frac{U_{bm}}{\sqrt{R^2+\left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{U_{bm}}{Z}, \quad \operatorname{tg} \varphi=\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Deoarece  $i_p(t)$  este o soluție particulară a ecuației integro-diferențiale neomogene (7-21), prin înlocuirea acestei soluții în ecuație rezultă  $\frac{Q_0}{C}=0$ .

Componenta tranzitorie a curentului este soluția generală a ecuației omogene:

$$R i_{tr}(t) + \frac{1}{C} \int i_{tr}(t) dt = 0$$

care, prin derivare în raport cu timpul, devine:

$$R \frac{di_{tr}}{dt} + \frac{1}{C} i_{tr} = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este:  $i_{tr}(t) = I_0 e^{-\frac{t}{T}}$ , unde  $I_0$  este constanta de integrare, iar

$$T = RC \quad (7-22)$$

este constanta electromagnetică de timp a circuitului.

Astfel, rezultă:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + I_0 e^{-\frac{t}{T}}. \quad (7-23)$$

Constanta de integrare  $I_0$  se determină din condiția inițială și anume: la  $t=0_+$ ,  $i(0_+) = \frac{u_b(0)}{R}$ , adică curentul din circuit în momentul închiderii întreruptorului  $K$  depinde de valoarea tensiunii la borne în acel moment și de rezistența electrică a circuitului. Dacă  $R=0$  și  $u_b(0) \neq 0$ , rezultă  $i(0_+) = \infty$ , adică curentul obține o valoare foarte mare în momentul inițial, ceea ce în practică trebuie evitat. Din condiția inițială, rezultă:

$$I_m \sin(\alpha - \varphi) + I_0 = \frac{U_{bm}}{R} \sin \alpha,$$

$$I_0 = \frac{U_{bm}}{R} \sin \alpha - I_m \sin(\alpha - \varphi) = I_m \operatorname{tg} \varphi \cos(\alpha - \varphi).$$

Cu acestea se obține următoarea expresie de variație în timp a curentului total din circuit:

$$i(t) = I_m \{ \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + \operatorname{tg} \varphi \cos(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{T}} \}. \quad (7-24)$$

Tensiunea la condensator are, ca și curentul din circuit, două componente:  $u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ctr}(t)$ , adică:

$$u_{Cp}(t) = \frac{1}{C} \int i_p(t) dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \alpha - \varphi), \quad (7-25)$$

$$u_{Ctr}(t) = \frac{1}{C} \int i_{tr}(t) dt = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{T}}, \quad (7-26)$$

unde s-a ținut seama că  $T=RC$  și  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega RC}$ .

În continuare se pot analiza anumite situații particulare. De exemplu, dacă se consideră  $\alpha = \varphi$ , din relațiile de mai sus se obțin:

$$i_p(t) = I_m \sin \omega t, \quad i_{tr}(t) = I_m \operatorname{tg} \varphi e^{-\frac{t}{T}},$$

$$i(t) = I_m (\sin \omega t + \operatorname{tg} \varphi e^{-\frac{t}{T}}),$$

$$u_{Cp}(t) = U_{bm} \sin \varphi \cos \omega t, \quad u_{Ctr}(t) = -U_{bm} \sin \varphi e^{-\frac{t}{T}},$$

$$u_C(t) = U_{bm} \sin \varphi (\cos \omega t - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Variația în timp a acestor mărimi este reprezentată în fig. 7-6.

**Aplicația 7-3.** Se consideră un condensator de capacitate  $C$ , încărcat cu sarcina electrică  $Q_1$  și având între armături tensiunea  $U_{c1}$ . La momentul  $t=0$  se închide întreruptorul  $K$  și condensatorul se descarcă peste rezistența  $R$  (fig. 7-7). Să se determine modul de variație în timp a curentului de descărcare a condensatorului, a tensiunii condensatorului și să se facă un bilanț al energiilor ce intervin.

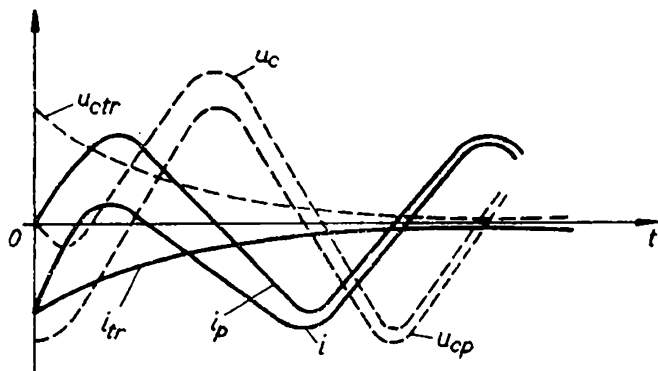


Fig. 7-6. Variația în timp a curentului și a tensiunii condensatorului când tensiunea aplicată la borne este sinusoidală.

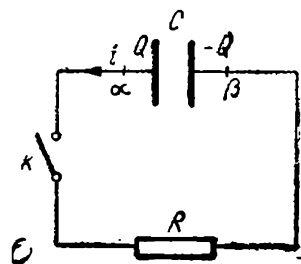


Fig. 7-7. Descărcarea condensatorului pe un rezistor.

*Rezolvare.* Curentul din circuit se exprimă prin relația:  $i = -\frac{dQ}{dt}$ , unde s-a pus semnul minus pentru a rezulta valoarea pozitivă a curentului, deoarece  $dQ < 0$  (sarcina condensatorului scade în timp), iar  $dt > 0$ .

Ecuția diferențială pentru sarcina electrică a condensatorului rezultă din:  $u_C = u_R$ , adică

$$\frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt}, \text{ sau}$$

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (7-27)$$

Soluția acestei ecuații este de forma:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (7-28)$$

unde  $Q_0$  este constanta de integrare ce se determină din următoarea condiție inițială: la  $t=0_+$ ,  $Q=Q_1$ , adică  $Q(0_+) = Q_1 = Q_0$ . Deci,

$$Q(t) = Q_1 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (7-29)$$

unde  $T=RC$  este constanta electromagnetice de timp a circuitului.

Pentru curentul din circuit rezultă variația exponențială:

$$i(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_1}{RC} e^{-\frac{t}{T}} = \frac{U_1}{R} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (7-30)$$

iar pentru tensiunea la bornele condensatorului se obține:

$$u_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_1 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (7-31)$$

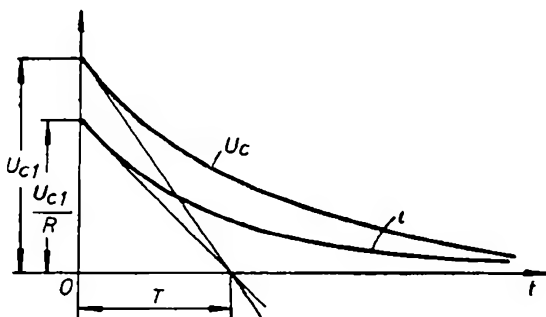
unde s-a introdus  $U_1 = \frac{Q_1}{C}$ . În fig. 7-8 sint reprezentate exponențialele de variație în timp a curentului de descărcare a condensatorului și a tensiunii la bornele sale.

În ceea ce privește bilanțul energiei, conform principiului de conservare, energia înmagazinată în câmpul electric al condensatorului se transformă integral în energie termică, prin efect J—L, în rezistența  $R$ . Se poate scrie :

$$W_{el} = \frac{1}{2} Q_1 U_1, \quad (7-32)$$

$$W_J = \int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = \frac{U_1^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}} dt = \frac{U_1^2}{R} \frac{T}{2} = \frac{U_1^2 RC}{2R} = \frac{1}{2} Q_1 U_1. \quad (7-33)$$

Fig. 7-8. Variația în timp a curentului și tensiunii la descărcarea condensatorului.



Deci, energia înmagazinată în câmpul electric este egală cu energia termică rezultată prin descărcarea condensatorului pe rezistența  $R$ :  $W_{el} = W_J$ .

## Capitolul 8

### CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Studiul regimurilor de funcționare a circuitelor electrice în care curenții și tensiunile sînt funcții periodice nesinusoidale de timp prezintă o importanță tehnică și teoretică deosebită. Curenții sau alte mărimi electrice și magnetice nesinusoidale pot apărea atît în circuitele electrice de forță, cît și în circuitele de comandă sau de telecomunicații. De exemplu, în circuitele de forță ce conțin elementele redresoare (diode semiconductoare, tiristoare comandate, redresoare cu mercur etc.), deși tensiunile de alimentare de la rețea (sursă) sînt sinusoidale, curenții ce apar sînt cu variație nesinusoidală în timp.

Tensiunile și curenții nesinusoidali au în anumite situații efecte dăunătoare. Astfel, cuplul electromagnetic și factorul de putere al motoarelor de c.a. sînt mai mici în regim nesinusoidal față de regimul sinusoidal. În regim nesinusoidal se pot produce rezonanțe de tensiune și curent, ce pot duce la străpungerea izolației conductoarelor etc.

În cele ce urmează se prezintă cîteva dintre problemele principale referitoare la funcționarea circuitelor electrice liniare în regim nesinusoidal.

#### 8.1. DESCOMPUNEREA ÎN ARMONICI A MĂRIMILOR PERIODICE NESINUSOIDALE

Studiul comportării circuitelor electrice liniare alimentate cu tensiune la borne nesinusoidală se poate face aplicînd principiul superpoziției. Tensiunea nesinusoidală se descompune în componente cu variație sinusoidală, numite armonici. Apoi, pentru fiecare componentă sinusoidală a tensiunii se determină cîte un curent sinusoidal și, în continuare, însumînd acești curenți se obține curentul total din circuit. O astfel de descompunere în componente sinusoidale a mărimilor periodice nesinusoidale se numește *analiză spectrală*, sau *analiză armonică* (dezvoltarea în serie Fourier).

Se consideră tensiunea  $u(t)$  ce acționează la bornele unui circuit cu variație periodică nesinusoidală, adică

$$u(t) = u(t + kT), \quad (8-1)$$

unde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  este perioada, iar  $k=1, 2, 3, \dots$ . O asemenea funcție periodică nesinusoidală se dezvoltă în serie Fourier sub forma :

$$u(t) = U_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (A_v \sin v\omega t + B_v \cos v\omega t), \quad (8-2)$$

unde  $U_0$  este componenta continuă (constantă) a tensiunii, iar  $A_v$  și  $B_v$  sînt coeficienții termenilor de ordinul  $v$  ai dezvoltării în serie Fourier.

Dezvoltarea în serie Fourier exprimată prin relația (8-2) poate fi scrisă și sub forma :

$$u(t) = U_0 + \sum_{v=1}^{\infty} U_{vm} \sin(v\omega t + \alpha_v), \quad (8-3)$$

unde

$$U_{vm} = \sqrt{A_v^2 + B_v^2} \text{ și } \alpha_v = \arctg \frac{B_v}{A_v} \quad (8-4)$$

sînt amplitudinea, respectiv faza inițială, a armonicii de ordinul  $v$ .

Componenta armonică corespunzătoare la  $v=1$  se numește *fundamentală* (armonica de bază), avînd frecvența  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , iar componentele corespunzătoare la  $v=2, 3, \dots$  se numesc *armonici superioare*. În aplicațiile practice, numărul armonicilor superioare semnificative este limitat, astfel că dezvoltarea în serie Fourier a mărimilor periodice nesinusoidale conține un număr finit de termeni.

Problema care se pune la dezvoltarea în serie Fourier este determinarea coeficienților  $U_0$ ,  $A_v$ , și  $B_v$ , respectiv a amplitudinii  $U_{vm}$  și a fazei inițiale  $\alpha_v$ . La rezolvarea acestei probleme pot apare următoarele două situații :

- curba  $u(t)$  este cunoscută analitic ;
- curba  $u(t)$  este dată grafic (prin înregistrare).

Corespunzător acestor situații, pentru determinarea coeficienților (amplitudinilor) se aplică metoda analitică sau metode grafice.

### 8.1.1. METODA ANALITICĂ

Metoda analitică se bazează pe următoarele relații evidente :

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin v\omega t \, dt &= 0, \quad \int_0^T \cos v\omega t \, dt = 0, \\ \int_0^T \sin v\omega t \sin \lambda\omega t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^T [\cos(v-\lambda)\omega t - \cos(v+\lambda)\omega t] \, dt = \begin{cases} 0 \text{ pt. } v \neq \lambda \\ \frac{T}{2} \text{ pt. } v = \lambda \end{cases} \\ \int_0^T \cos v\omega t \cos \lambda\omega t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^T [\cos(v-\lambda)\omega t + \cos(v+\lambda)\omega t] \, dt = \begin{cases} 0 \text{ pt. } v \neq \lambda \\ \frac{T}{2} \text{ pt. } v = \lambda \end{cases} \\ \int_0^T \sin v\omega t \cos \lambda\omega t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^T [\sin(v-\lambda)\omega t + \sin(v+\lambda)\omega t] \, dt = 0, \end{aligned}$$

cu care, din relația (8-2) rezultă :

$$\int_0^T u(t) dt = U_0 T,$$

$$\int_0^T u(t) \sin \nu \omega t dt = \frac{1}{2} A_\nu T, \quad \int_0^T u(t) \cos \nu \omega t dt = \frac{1}{2} B_\nu T.$$

Astfel, se obțin :

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad (8-5)$$

$$A_\nu = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin \nu \omega t dt, \quad B_\nu = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos \nu \omega t dt.$$

Față de cazul general al dezvoltării în serie Fourier de mai sus, în aplicații pot apare și unele situații particulare, după cum urmează :

Dacă funcția  $u(t)$  este impară, adică  $u(t) = -u(-t)$ , din relațiile (8-5) rezultă :  $U_0 = 0$  și  $B_\nu = 0$ , iar dezvoltarea în serie Fourier obține forma :

$$u(t) = \sum_{\nu} U_{\nu m} \sin \nu \omega t. \quad (8-6)$$

Dacă funcția  $u(t)$  este pară, adică  $u(t) = u(-t)$ , atunci  $A_\nu = 0$  și dezvoltarea în serie Fourier obține forma :

$$u(t) = U_0 + \sum_{\nu} U_{\nu m} \cos \nu \omega t. \quad (8-7)$$

Dacă funcția  $u(t)$  este simetrică, adică  $u(t) = -u\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$ , rezultă :  $U_0 = 0$ , iar amplitudinile de ordin par  $A_2, A_4, A_6, \dots, B_2, B_4, B_6, \dots$  sînt nule. În această situație  $u(t)$  conține numai armonicile impare.

Ca exemplu, se consideră o funcție periodică, nesinusoidală,  $u(t)$ , impară și simetrică, care satisface condițiile :  $u(t) = -u(-t)$  și  $u(t) = -u\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$ . Prin descompunerea ei în armonici, rezultă numai armonicile de ordin impar în sinus :

$$u(t) = \sum_{\nu} U_{\nu m} \sin \nu \omega t; \quad \nu = 1, 3, 5, \dots$$

În fig. 8-1 sînt reprezentate prin linii pline armonica de bază (fundamentală) și armonica de ordinul 3 a dezvoltării în serie Fourier exprimată prin această relație. Prin linie întreruptă este reprezentată suma acestor două componente.

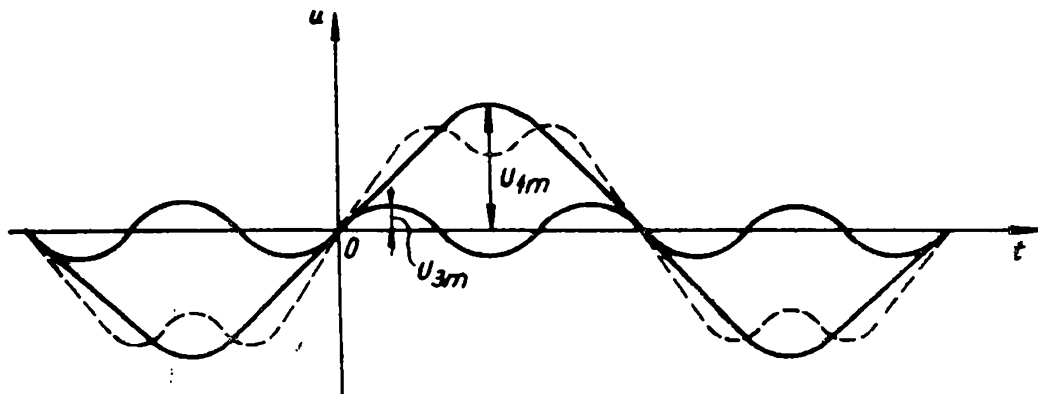


Fig. 8-1. Fundamentală și armonica de ordinul 3 a tensiunii periodice.



**Aplicația 8-1.** Să se descompună în armonici tensiunea periodică nesinusoidală  $u(t)$  cu variație în timp sub formă de impulsuri dreptunghiulare (fig. 8-2) avind perioada  $T = \frac{2\pi}{\omega} = a + b$ .

*Rezolvare.* Tensiunea  $u(t)$  se dezvoltă în serie Fourier conform relației (8-2).

$$u(t) = U_0 + \sum_{\nu} (A_{\nu} \sin \nu \omega t + B_{\nu} \cos \nu \omega t),$$

Fig. 8-2. Variația sub formă de impulsuri dreptunghiulare a tensiunii.

unde  $U_0$ ,  $A_{\nu}$ ,  $B_{\nu}$  sînt mărimi ce trebuie determinate. Din relațiile (8-5) se obțin :

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^a U dt = \frac{a}{T} U,$$

$$\begin{aligned} A_{\nu} &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin \nu \omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^a U \sin \nu \omega t dt = \frac{2U}{T\nu\omega} (1 - \cos \nu \omega a) = \\ &= \frac{U}{\pi\nu} \left( 1 - \cos \nu \frac{2\pi a}{T} \right), \end{aligned}$$

$$B_{\nu} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos \nu \omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^a U \cos \nu \omega t dt = \frac{2U}{T\nu\omega} \sin \nu \omega a = \frac{U}{\pi\nu} \sin \nu \frac{2\pi a}{T},$$

de unde se determină  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ , dînd lui  $\nu$  valorile corespunzătoare.

### 8.1.2. METODA GRAFICĂ THOMSON-RUNGE

Prin această metodă se determină amplitudinile primelor zece armonici ale dezvoltării în serie Fourier, care sînt practic suficiente pentru a reda funcția periodică nesinusoidală.

Perioada  $T$  de variație a mărimii nesinusoidale se împarte în  $2K=24$  intervale egale, timpul corespunzător fiecărui interval fiind  $\Delta t$  (fig. 8-3), deci :

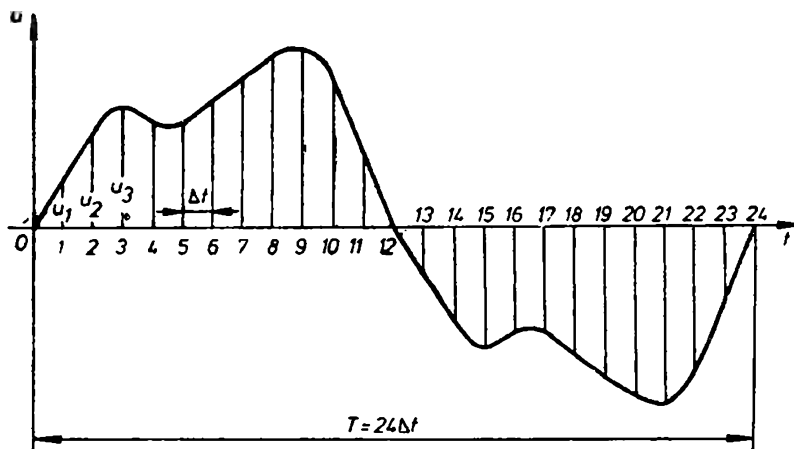


Fig. 8-3. Figură explicativă pentru descompunerea în armonici prin metoda grafică.

$$T=2K\Delta t=24\Delta t \quad (8-8)$$

Prin aceasta, integralele (8-5) se transformă în următoarele sume :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2K\Delta t} \sum_{n=1}^{24} u_n \Delta t = \frac{1}{24} \sum_{n=1}^{24} u_n \\ A_v &= \frac{2}{2K\Delta t} \sum_{n=1}^{24} u_n \left( \sin v \frac{2\pi}{2K\Delta t} n\Delta t \right) \Delta t = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{24} u_n \sin v \frac{n\pi}{12} \\ B_v &= \frac{2}{2K\Delta t} \sum_{n=1}^{24} u_n \left( \cos v \frac{2\pi}{2K\Delta t} n\Delta t \right) \Delta t = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{24} u_n \cos v \frac{n\pi}{12} \end{aligned} \quad (8-9)$$

unde  $u_n$  este valoarea tensiunii  $u(t)$  în dreptul diviziunii  $n$ .

În cazul cînd  $u(t)$  este o curbă periodică, nesinusoidală și simetrică (fig. 8-3), pentru care  $u(t) = -u\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$ , dezvoltarea în serie Fourier conține numai armonicele de ordin impar în sinus și cosinus. De asemenea, ținînd seama că la  $\frac{T}{2}$  corespund  $K=12$  diviziuni, rezultă :

$$u_n = -u_{n \pm K}, \quad \sin v \frac{n\pi}{K} = -\sin v \frac{(n \pm K)\pi}{K}, \quad \cos v \frac{n\pi}{K} = -\cos v \frac{(n \pm K)\pi}{K} \quad (8-10)$$

Ținînd seama de relațiile (8-10) și avînd în vedere că  $u_0 = u_{12} = 0$ , sumele din relațiile (8-9) devin :

$$U_0 = 0, \quad A_v = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{11} u_n \sin v \frac{n\pi}{12}, \quad B_v = \frac{1}{6} \sum_{v=1}^{11} u_n \cos v \frac{n\pi}{12}. \quad (8-11)$$

Pentru  $v=1$ , se obține :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{6} (u_1 \sin 15^\circ + u_2 \sin 30^\circ + u_3 \sin 45^\circ + u_4 \sin 60^\circ + u_5 \sin 75^\circ + u_6 \sin 90^\circ + \\ &\quad + u_7 \sin 75^\circ + u_8 \sin 60^\circ + u_9 \sin 45^\circ + u_{10} \sin 30^\circ + u_{11} \sin 15^\circ) = \\ &= (u_1 + u_{11}) \frac{\sin 15^\circ}{6} + (u_2 + u_{10}) \frac{\sin 30^\circ}{6} + (u_3 + u_9) \frac{\sin 45^\circ}{6} + (u_4 + u_8) \frac{\sin 60^\circ}{6} + \\ &\quad + (u_5 + u_7) \frac{\sin 75^\circ}{6} + u_6 \frac{\sin 90^\circ}{6}. \end{aligned}$$

Introducînd notațiile :

$$S_1 = u_1 + u_{11}, \quad S_2 = u_2 + u_{10}, \quad S_3 = u_3 + u_9,$$

$$S_4 = u_4 + u_8, \quad S_5 = u_5 + u_7, \quad S_6 = u_6;$$

$$a = \frac{1}{6} \sin 15^\circ, \quad b = \frac{1}{6} \sin 30^\circ, \quad c = \frac{1}{6} \sin 45^\circ,$$

$$d = \frac{1}{6} \sin 60^\circ, \quad e = \frac{1}{6} \sin 75^\circ, \quad f = \frac{1}{6} \sin 90^\circ,$$

se obține :

$$A_1 = S_1 a + S_2 b + S_3 c + S_4 d + S_5 e + S_6 f. \quad (8-12, a)$$

În mod analog rezultă :

$$B_1 = D_1 e + D_2 d + D_3 c + D_4 b + D_5 a, \quad (8-12, b)$$

unde :

$$D_1 = u_1 - u_{11}, \quad D_2 = u_2 - u_{10}, \quad D_3 = u_3 - u_9,$$

$$D_4 = u_4 - u_8, \quad D_5 = u_5 - u_7.$$

Pentru  $v=3$ , se obțin :

$$A_3 = (S_1 + S_3 - S_5) c + (S_2 - S_6) f, \quad (8-13)$$

$$B_3 = (D_1 - D_3 - D_5) c - D_4 f.$$

În mod analog rezultă :

$$A_5 = S_1 e + S_2 b - S_3 c - S_4 d + S_5 a + S_6 f, \quad (8-14)$$

$$B_5 = D_1 a - D_2 d - D_3 c + D_4 b + D_5 e ;$$

$$A_7 = S_1 e - S_2 b - S_3 c + S_4 d + S_5 a - S_6 f, \quad (8-15)$$

$$B_7 = D_1 a - D_2 d + D_3 c + D_4 b - D_5 e ;$$

$$A_9 = (S_1 + S_3 - S_5) c - (S_2 - S_6) f,$$

$$B_9 = -(D_1 - D_3 - D_5) c - D_4 f. \quad (8-16)$$

Relațiile de mai sus pot conduce și la valori negative ale coeficienților  $A_v$  și  $B_v$ .

Tehnica modernă de calcul, reprezentată prin calculatoarele electronice, este folosită în prezent pentru analiza armonică a funcțiilor.

## 8.2. VALORI EFECTIVE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Valoarea efectivă  $I$  a unui curent periodic nesinusoidal  $i(t)$  se definește la fel ca și valoarea efectivă a curentului sinusoidal, adică :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}. \quad (8-17)$$

Prin dezvoltarea în serie Fourier a curentului periodic nesinusoidal se obține :

$$i(t) = I_0 + i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots$$

unde  $I_0$  este componenta continuă (constantă), iar

$$i_1(t) = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1), \quad i_2(t) = I_{2m} \sin(2\omega t - \varphi_2),$$

$$i_3(t) = I_{3m} \sin(3\omega t - \varphi_3), \quad \dots$$

Patratul valorii instantanee a acestui curent nesinusoidal este :

$$i^2(t) = [I_0 + i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots]^2 = \sum_{v=0}^{\infty} i_v^2(t) + 2 \sum_{\substack{\lambda, v=0 \\ v \neq \lambda}}^{\infty} i_v(t) i_{\lambda}(t),$$

unde trebuie ținut seama că  $i_0(t) = I_0$ . Deci :

$$I^2 = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_v^2(t) dt + 2 \sum_{\substack{\lambda, v=0 \\ v \neq \lambda}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_v(t) i_{\lambda}(t) dt.$$

Ținând seama că al doilea termen din membrul drept al acestei relații este nul și că valoarea efectivă a armonicii de ordinul  $v$  a curentului este

$$I_v^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i_v^2(t) dt, \quad (8-18)$$

rezultă :

$$I^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots$$

sau

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \quad (8-19)$$

Adică, valoarea efectivă a unui curent periodic nesinusoidal este egală cu rădăcina pătrată a sumei patratelor valorilor efective ale armoniilor lui, adunată cu patratură componentei continue. O astfel de sumă evidențiază faptul că efectul Joule-Lenz al curentului nesinusoidal este egal cu suma efectelor Joule-Lenz a componentelor sale armonice, inclusiv componenta continuă, dacă aceasta există.

Printr-un raționament asemănător se obține valoarea efectivă a unei tensiuni nesinusoidale  $u(t)$  în forma :

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \quad (8-20)$$

Abaterea unei mărimi periodice nesinusoidale de la forma sinusoidală este caracterizată prin *coeficientul de distorsiune*  $k_a$ , definit de raportul dintre valoarea efectivă a tuturor armoniilor superioare (deci fără cea fundamentală) și valoarea efectivă a mărimii nesinusoidale, mai puțin componenta continuă care nu afectează forma. Se poate scrie deci :

$$k_{ai} = \sqrt{\frac{I_2^2 + I_3^2 + \dots}{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}} = \frac{I_a}{\sqrt{I^2 - I_0^2}}, \quad k_{au} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}} = \frac{U_a}{\sqrt{U^2 - U_0^2}},$$

unde (8-21)

$$I_a = \sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots} \text{ și } U_a = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}.$$

În electrotehnică, o mărime se consideră sinusoidală dacă coeficientul de distorsiune este mai mic decît 0,05.

### 8.3. PUTEREA ACTIVĂ, REACTIVĂ, APARENTĂ ȘI DEFORMANTĂ ÎN REGIM NESINUSOIDAL

a. **Puterea activă**, definită ca valoarea medie în raport cu o perioadă a puterii electromagnetice instantanee

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt \quad (8-22)$$

este valabilă pentru orice formă de variație a mărimilor  $u$  și  $i$ . Dacă aceste mărimi sînt nesinusoidale și se consideră că numai primele  $n$  armonici sînt semnificative, se poate scrie :

$$u = U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{v=0}^n u_v,$$

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = \sum_{v=0}^n i_v,$$

unde  $u_0 = U_0$ ,  $i_0 = I_0$  și  $u_v = U_{vm} \sin(v\omega t + \alpha_v)$ ,

$$i_v = I_{vm} \sin(v\omega t + \alpha_v - \varphi_v).$$

Puterea activă corespunzătoare acestor  $n$  armonici este :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{v=0}^n u_v \right) \left( \sum_{v=0}^n i_v \right) dt = \sum_{v=0}^n \frac{1}{T} \int_0^T u_v i_v dt + \sum_{\substack{v, \lambda=0 \\ v \neq \lambda}}^n \frac{1}{T} \int_0^T u_v i_\lambda dt.$$

Deoarece  $\frac{1}{T} \int_0^T u_v i_\lambda dt = 0$  atunci cînd  $v \neq \lambda$ , se obține :

$$P = \sum_{v=0}^n \frac{1}{T} \int_0^T u_v i_v dt$$

sau

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_n I_n \cos \varphi_n = \sum_{v=0}^n U_v I_v \cos \varphi_v, \quad (8-23)$$

unde  $\varphi_0 = 0$ .

Deci, puterea activă, în cazul cînd tensiunea și curentul din circuit sînt mărimi nesinusoidale, este egală cu suma puterilor active ale armonicilor de același ordin din tensiune și curent, plus puterea  $U_0 I_0$  corespunzătoare componentelor continue.

b. **Puterea reactivă**, definită în mod analog ca sumă a puterilor reactive ale armonicilor de același ordin, se exprimă prin :

$$Q = \sum_{v=1}^n U_v I_v \sin \varphi_v. \quad (8-24)$$

Componentele continue  $U_0$  și  $I_0$  nu determină o putere reactivă deoarece  $\sin \varphi_0 = 0$ .

c. **Puterea aparentă** se definește prin produsul valorilor efective ale tensiunii și curentului, adică :

$$S = UI = \sqrt{(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2) (I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2)} \quad (8-25)$$

d. **Puterea deformantă.** În regim sinusoidal, între puterea activă, reactivă și aparentă este valabilă relația :  $S^2 = P^2 + Q^2$ . În regim nesinusoidal, relația dintre puteri este :

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2, \quad (8-26)$$

unde  $D$  este puterea deformantă, măsurată cu unitatea denumită volt-amper-deformant [VAd]. Expresia puterii deformante se obține având în vedere că :

$$\begin{aligned} S^2 &= U^2 I^2 = (U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_n^2) (I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2) = \\ &= \left( \sum_{v=0}^n U_v I_v \cos \varphi_v \right)^2 + \left( \sum_{v=0}^n U_v I_v \sin \varphi_v \right)^2 + \sum_{\substack{v, \lambda=0 \\ v \neq \lambda}}^n [U_v^2 I_\lambda^2 - 2U_v U_\lambda I_v I_\lambda \cos(\varphi_v - \varphi_\lambda)]. \end{aligned}$$

Deci, ținând seama de relațiile (8-23), (8-24) și (8-26), rezultă :

$$D^2 = \sum_{\substack{v, \lambda=0 \\ v \neq \lambda}}^n [U_v^2 I_\lambda^2 - 2U_v U_\lambda I_v I_\lambda \cos(\varphi_v - \varphi_\lambda)]. \quad (8-27)$$

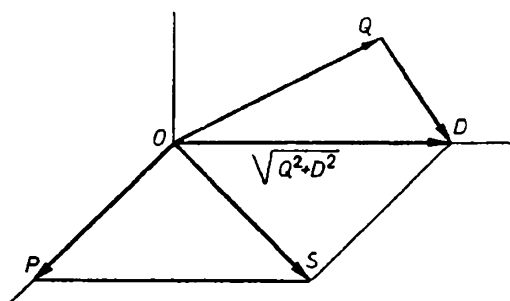


Fig. 8-4. Reprezentarea în spațiu a puterilor în regim deformant.

În baza relației (8-26) se poate întocmi reprezentarea grafică a puterilor în regim nesinusoidal ca în fig. 8-4. Din această reprezentare se vede că, dacă  $D=0$ , se obține triunghiul puterilor din regimul sinusoidal.

## 8.4. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

În cazul circuitelor electrice cu elemente liniare, alimentate cu tensiuni nesinusoidale de forma :

$$u(t) = U_0 + \sum_v U_{vm} \sin(v\omega t + \alpha_v), \quad (8-28)$$

calculul curenților în regim permanent se face prin aplicarea principiului superpoziției (suprapunerii efectelor). Fiecare armonică a curentului se calculează ca și cum ar acționa numai armonica de același ordin a tensiunii la borne. Curentul rezultat este egal cu suma armonicilor :

$$i(t) = I_0 + \sum_v I_{vm} \sin(v\omega t + \alpha_v - \varphi_v), \quad (8-29)$$

în care :

$$I_{vm} = \frac{U_{vm}}{Z_v} = \frac{U_{vm}}{\sqrt{R^2 + \left(v\omega L - \frac{1}{v\omega C}\right)^2}}, \quad \varphi_v = \arctg \frac{v\omega L - \frac{1}{v\omega C}}{R}. \quad (8-30)$$

Componenta continuă a curentului permanent este nulă,  $I_0=0$ , deoarece s-a considerat că în circuit există un condensator.

Pentru armonica de un anumit ordin este posibil să apară în circuit fenomenul de rezonanță. Ordinul acestei armonici se deduce din condiția de rezonanță :

$$v\omega L - \frac{1}{v\omega C} = 0. \quad (8-31)$$

Dacă circuitul conține numai rezistorul de rezistență  $R$ , atunci armonicile curentului sînt în fază de armonicile tensiunii ( $\varphi_v=0$ ). În acest caz, amplitudinile armonicilor curentului, respectiv valoarea constantă a curentului, sînt :

$$I_{vm} = \frac{U_{vm}}{R}; \quad I_0 = \frac{U_0}{R}. \quad (8-32)$$

În cazul circuitului ce conține numai o bobină ideală cu inductivitatea  $L$ , și tensiunea la borne nu are componenta continuă, armonica de ordinul  $v$  a curentului este :

$$i_v(t) = I_{vm} \sin\left(v\omega t + \alpha_v - \frac{\pi}{2}\right), \quad (8-33)$$

unde :

$$I_{vm} = \frac{U_{vm}}{v\omega L}. \quad (8-34)$$

Deci, în cazul bobinei, amplitudinile armonicilor devin tot mai mici pe măsură ce crește ordinul  $v$  al armonicii, deoarece reactanța inductivă  $v\omega L$  devine tot mai mare. De aici rezultă rolul de tampon al bobinei pentru armonicile superioare ale curentului, ceea ce se folosește în practică la construcția filtrelor electrice.

Dacă circuitul este constituit numai dintr-un condensator ideal de capacitate  $C$ , armonica  $v$  a curentului este :

$$i_v(t) = I_{vm} \sin \left( v\omega t + \alpha_v + \frac{\pi}{2} \right), \quad (8-35)$$

unde

$$I_{vm} = U_{vm} v\omega C. \quad (8-36)$$

Deci, în cazul condensatorului, amplitudinile armonicilor curentului devin tot mai mari pe măsură ce crește ordinul  $v$  al armonicii, deoarece reactanța capacitivă  $\frac{1}{v\omega C}$  devine tot mai mică pentru armonicile superioare. Ca urmare, condensatorul constituie un element de șuntare (scurtcircuitare) a armonicilor curentului de frecvență ridicată, ceea ce, de asemenea, prezintă importanță la realizarea filtrelor electrice.

## 8.5. FILTRE ELECTRICE

Impedanța unui circuit liniar, corespunzătoare armonicii de ordinul  $v$  a tensiunii, respectiv curentului, se calculează cu relația :

$$Z_v = \sqrt{R^2 + \left( v\omega L - \frac{1}{v\omega C} \right)^2}, \quad (8-37)$$

ceea ce înseamnă că valoarea acestei impedanțe se modifică în funcție de ordinul  $v$  al armonicii considerate. Ca urmare, amplitudinea unei armonici a curentului depinde, la rîndul său, de ordinul armonicii respective :

$$I_v = \frac{U_v}{Z_v}. \quad (8-38)$$

De asemenea, defazajul dintre armonicile de același ordin  $v$  a curentului și tensiunii depinde de acest ordin :

$$\varphi_v = \arctg \frac{v\omega L - \frac{1}{v\omega C}}{R}. \quad (8-39)$$

Pe baza acestor considerente funcționează filtrele electrice care au rolul de a opri, sau de a permite, trecerea prin circuit a componentelor armonice cuprinse într-o anumită bandă de frecvență. În general, filtrele electrice sînt circuite cuadripolare, cu două borne de intrare și cu două borne de ieșire, care se intercalează între sursă și receptor, fiind folosite pe scară largă în schemele aparatelor electronice, în sistemele de comandă și automatizări, la instalațiile de redresare a curentului alternativ etc.

Parametrii caracteristici ai unui filtru sînt atenuarea și defazajul.

*Atenuarea* se exprimă în funcție de raportul dintre mărimea de intrare și mărimea de ieșire. În funcție de destinația filtrului, raportul se face între



puteri, între tensiuni sau între curenți, relațiile de calcul a atenuării fiind următoarele :

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{P_i}{P_e} \text{ [Np]}; \quad a = 10 \log \frac{P_i}{P_e} \text{ [dB]},$$

$$a = \ln \frac{U_i}{U_e} \text{ [Np]}; \quad a = 20 \log \frac{U_i}{U_e} \text{ [dB]}, \quad (8-40)$$

$$a = \ln \frac{I_i}{I_e} \text{ [Np]}; \quad a = 20 \log \frac{I_i}{I_e} \text{ [dB]},$$

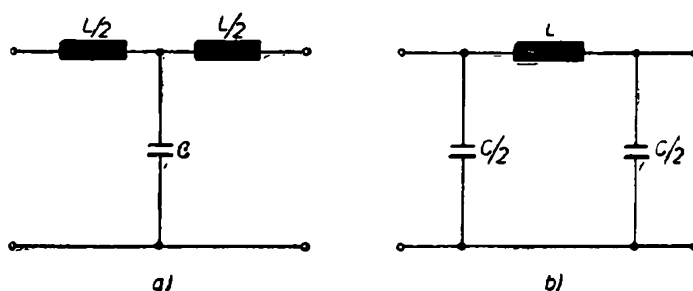


Fig. 8-5. Schema filtrului trece-jos :  
 a — cu două bobine și un condensator; b — cu o bobină și două condensatoare.

unde indicele „i” precizează mărimea de intrare, iar indicele „e” pe cea de ieșire. Neperul [Np] și decibelul [dB] sînt unități de măsură ale atenuării.

Valoarea cu semn schimbat a atenuării se numește *cîștig* (amplificare).

*Defazajul* se referă la unghiul dintre mărimea de intrare și mărimea de ieșire (cînd acestea sînt tensiuni sau curenți cu variație sinusoidală în timp).

Dependența de frecvență a atenuării și defazajului constituie *caracteristicile de frecvență* ale filtrului.

Se numește *filtru ideal* un filtru a cărui caracteristică de frecvență a atenuării ar prezenta benzi de trecere de atenuare nulă, alternînd cu benzi de oprire de atenuare infinită. Filtrele reale au atenuare diferită de zero în banda de trecere (din cauza pierderilor) și finită în banda de oprire.

Din punctul de vedere al dependenței în funcție de frecvență a atenuării, filtrele electrice se clasifică după poziția și lățimea în spectrul de frecvență a benzilor de trecere, respectiv a benzilor de oprire. În acest sens, se prezintă în continuare cîteva exemple.

*Filtrul trece-jos* (fig. 8-5, a și b), a cărui caracteristică de frecvență prezintă o bandă de trecere cuprinsă între frecvențele  $f_1=0$  și  $f_2=f_c$ . Frecvența  $f_c$  se numește *frecvență de tăiere superioară* și corespunde unei atenuări mai mici, cel mult egală cu 3 dB.

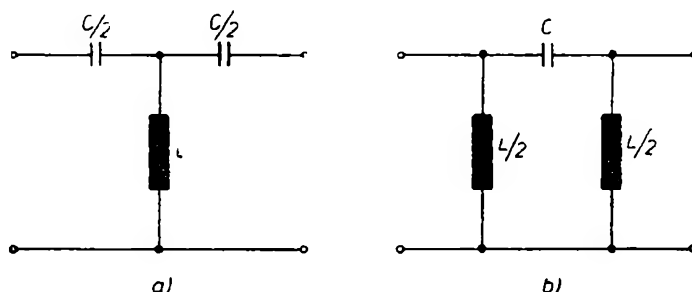


Fig. 8-6. Schema filtrului trece-sus :  
a — cu două condensatoare și o bobină; b — cu un condensator  
și două bobine.

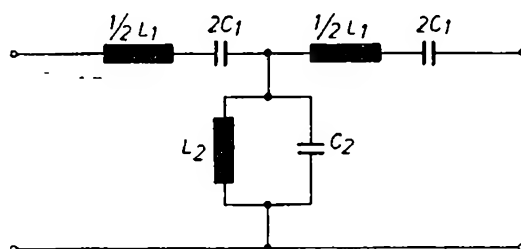


Fig. 8-7. Schema filtrului trece-bandă.

*Filtrul trece-sus* (fig. 8-6, a și b), a cărei caracteristică de frecvență prezintă o bandă de trecere cuprinsă între frecvențele  $f_1=f_c$ , denumită *frecvența de tăiere inferioară*, și  $f_2=\infty$ . În acest caz, *frecvența  $f_c$  corespunde* unei atenuări mai mari sau cel mult egală cu 3 dB.

În fig. 8-7 este reprezentată schema unui *filtru trece-bandă*, care poate fi de bandă îngustă sau de bandă largă.

Din schemele filtrelor reprezentate mai sus rezultă că în componența acestora intră bobine și condensatoare. Filtrele reale conțin și rezistoare (de exemplu, rezistența proprie a bobinelor), care provoacă atât atenuarea, cât și pierderi de putere prin efect Joule-Lenz.

Partea II

---

# MĂSURĂRI ELECTRICE

## Capitolul 9

### MĂSURĂRI ELECTRICE

#### 9.1. CONSIDERAȚIUNI GENERALE ASUPRA MĂSURĂRILOR ȘI INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

##### 9.1.1. MĂSURAREA MĂRIMILOR FIZICE

Mărimile fizice de aceeași natură se deosebesc între ele numai cantitativ și, ca urmare, pot fi comparate. A măsura o mărime fizică înseamnă a o compara cu o altă mărime de aceeași natură, denumită *unitate de măsură*. Valoarea mărimii se exprimă printr-un număr scalar care arată de câte ori unitatea folosită se cuprinde în mărimea dată.

Este evident că măsurarea unei mărimi se poate face numai după ce s-a stabilit în prealabil și în mod concret unitatea sa de măsură. Chiar și atunci când se face o comparație cantitativă între două mărimi de aceeași natură, în mod implicit una dintre ele este adoptată ca unitate.

Pentru executarea măsurărilor, pe lângă definirea unităților de măsură independente (fundamentale) și a celor derivate, este necesară realizarea materială a acestor unități. În acest scop, în metrologie se folosesc etaloanele care reproduc sau stabilesc unitățile de măsură cu precizie maximă. În electrotehnică, datorită naturii speciale a mărimilor electrice și magnetice, unitățile multora dintre ele nu pot fi materializate sub formă de etaloane, reproducerea lor făcându-se în mod indirect, prin intermediul unor mărimi fizice de altă natură.

După modul în care, prin măsurare, se obține valoarea unei mărimi, se disting: măsurări directe și măsurări indirecte.

*Măsurarea directă* constă în găsirea valorii mărimii prin măsurarea ei cu ajutorul instrumentului de măsurare adecvat. De exemplu, măsurarea unei lungimi cu rigla gradată, a unui curent cu ampermetrul, a unei rezistențe cu ohmmetrul etc., constituie măsurări directe.

*Măsurarea indirectă* constă în găsirea valorii mărimii pe bază de calcul, în funcție de alte mărimi ce se măsoară direct. De exemplu, sînt măsurări indirecte: măsurarea ariei unui dreptunghi prin măsurarea laturilor sale, măsurarea rezistenței electrice prin măsurarea tensiunii și a curentului electric (metoda volt-ampermetrică) etc.

După precizia de măsurare, se deosebesc: măsurări de etalonare, de laborator și industriale. *Măsurările de etalonare* se execută în laboratoare metrologice autorizate și se referă de fapt la verificarea stării de funcționare și a clasei de precizie pentru instrumentele folosite în diverse alte laboratoare și unități. Aceste măsurări (verificări) se efectuează cu cele mai precise instrumente de măsurare (considerate etaloane). *Măsurările de laborator* se efectuează, de regulă, în cadrul unor cercetări științifice, analize sau verificări și se exe-

cută cu instrumente de mare precizie. În schimb, *măsurările industriale* se efectuează în timpul desfășurării procesului de producție, instrumentele de măsurat folosite fiind de precizie suficientă pentru necesitățile practice.

### 9.1.2. ERORI DE MĂSURARE

Oricât de îngrijit s-ar efectua măsurarea unei mărimi fizice, folosind cele mai perfecționate metode și mijloace, totuși nu se poate pretinde că măsurarea este absolut exactă, intervenind întotdeauna o anumită eroare.

*Valoarea adevărată* (reală sau exactă) a unei mărimi reprezintă acea valoare care ar rezulta dacă măsurarea nu ar fi însoțită de nici o eroare. Aceasta este valoarea către care se tinde în orice operație de măsurare. Dacă  $X$  este valoarea adevărată a mărimii și  $X_m$  este *valoarea măsurată*, eroarea absolută și eroarea relativă sînt :

$$\Delta X = X_m - X, \quad \Delta_r = \frac{\Delta X}{X}. \quad (9-1)$$

Avînd în vedere că valoarea adevărată nu poate fi cunoscută practic decît extrem de rar, se utilizează pentru calculul erorii *valoarea de referință*  $X_0$ , obținută prin măsurarea mărimii cu cele mai perfecționate mijloace. În acest caz, eroarea absolută, respectiv eroarea relativă, au expresiile :

$$\Delta X = X_m - X_0, \quad \Delta_r = \frac{\Delta X}{X_0}. \quad (9-2)$$

Eroarea relativă, spre deosebire de cea absolută, dă o anumită informație asupra gradului de precizie al măsurării și se exprimă de obicei în procente.

Erorile, absolută și relativă, au valori care se modifică în funcție de valoarea mărimii măsurate și pot fi pozitive dacă  $X_m > X_0$  sau negative dacă  $X_m < X_0$ . Important este ca eroarea comisă la oricare măsurare să nu depășească *eroarea maximă admisibilă* ce se stabilește de la caz la caz. Cu cît eroarea relativă este mai mică, cu atît precizia măsurării este mai mare.

Mărimea egală și de semn opus cu eroarea absolută se numește *corecție* :

$$C = -\Delta X = X_0 - X_m. \quad (9-3)$$

Cunoscînd corecția, se poate deduce pentru mărimea măsurată valoarea  $X_0$ , mai precisă decît valoarea măsurată  $X_m$ .

Erorile care afectează o măsurare pot fi clasificate așa cum este arătat în fig. 9-1.

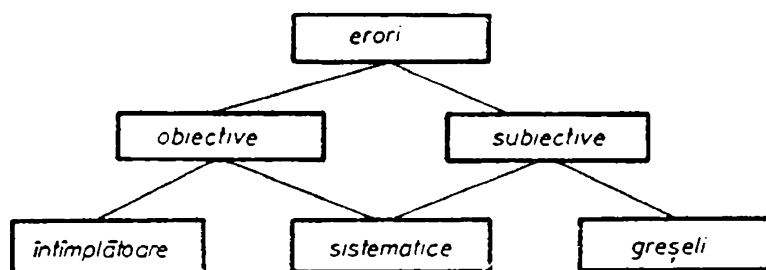


Fig. 9-1. Clasificarea erorilor de măsurare.

*Erorile obiective* sînt cele care nu depind de experimentator, ci se datoresc imperfecţiunii constructive a instrumentelor de măsurare, metodei de măsurare insuficient de exactă (eroare de metodă) sau influenţei diferiţilor factori externi.

*Erorile subiective* se datoresc experimentatorului, depinzînd de atenţia şi îndemnarea cu care acesta execută măsurarea şi de starea organelor sale de percepţie.

*Erorile sistematice* sînt cele care se datoresc acţiunii continue a unor surse de erori ce pot fi cunoscute în urma unei analize atente a condiţiilor în care se execută măsurarea. Ele sînt obiective în cazul cînd sînt cauzate de imperfecţiunea constructivă a aparatelor de măsurare, de imprecizia metodei de măsurare sau de influenţa unor factori externi cu acţiune permanentă ca : temperatura, cîmpuri magnetice sau electrice, vibraţii etc. Erorile sistematice sînt subiective dacă se datoresc unor defecte ale organelor de percepţie ale experimentatorului.

Cunoscînd cauzele erorilor sistematice, se pot lua măsuri pentru ca valoarea lor să fie redusă la minimum sau chiar la zero, respectiv se poate stabili corecţia ce trebuie adusă valorii măsurate.

*Erorile întîmplătoare* sînt cele datorate acţiunii unor cauze întîmplătoare, imprevizibile şi necontrolabile, împotriva cărora nu pot fi luate măsuri de prevenire. Într-un număr mare de măsurări ale aceleiaşi mărimi, efectuate în condiţiuni identice, valoarea erorii întîmplătoare se schimbă ca mărime şi sens de la o măsurare la alta, fiind supusă legilor statistice de distribuţie.

*Greşelile* sînt erori ce apar datorită neatenţiei experimentatorului, prin citirea sau manipularea greşită a instrumentelor de măsurat. Întrucît aceste erori denaturează în mod grosolan rezultatele, măsurările afectate de astfel de erori trebuie refăcute cu atenţie.

**Aplicaţia 9-1.** O tensiune este măsurată cu un voltmetru ce are scala gradată de la 0 la 100. La o măsurare instrumentul arată 5 diviziuni şi la o altă măsurare, 90 diviziuni. Care este eroarea relativă la fiecare măsurare dacă  $\pm \frac{1}{10}$  dintr-o diviziune nu poate fi distinsă ?

*Rezolvare.* Dacă  $U_1$  şi  $U_2$  sînt tensiunile la cele două măsurări, eroarea absolută cu care este măsurată fiecare este :

$$\Delta U_1 = \frac{5 \pm \frac{1}{10}}{5} U_1 - U_1 = \pm \frac{1}{10 \cdot 5} U_1,$$

$$\Delta U_2 = \frac{90 \pm \frac{1}{10}}{90} U_2 - U_2 = \pm \frac{1}{10 \cdot 90} U_2.$$

Erorile relative sînt :

$$\Delta_{r_1} = \frac{\Delta U_1}{U_1} = \pm \frac{1}{50} \quad (\pm 2\%),$$

$$\Delta_{r_2} = \frac{\Delta U_2}{U_2} = \pm \frac{1}{900} \quad (\pm 0,11\%).$$

Se remarcă faptul că pentru citirea de la începutul scalei instrumentului, eroarea relativă comisă este mult mai mare decît pentru citirea de la sfîrşitul scalei.

### 9.1.3. PĂRȚI CONSTRUCTIVE COMUNE ALE INSTRUMENTELOR ELECTRICE

Cu toată diversitatea tipurilor constructive ale instrumentelor electrice de măsurare, totuși acestea posedă o serie de elemente constructive și funcționale comune. Astfel, dacă ne referim la instrumentele de măsurare cele mai uzuale ca : ampermetre, voltmetre, watmetre etc. oricare din acestea constă dintr-o cutie în interiorul căreia se găsesc ca părți constructive esențiale *sistemul fix* și *sistemul mobil*. Pe partea frontală a cutiei se găsește un *cadran* cu *scală gradată*. De-a lungul scalei gradate se deplasează *acul indicator* care este fixat rigid de sistemul mobil. Pentru legarea instrumentului în circuitul de măsurare se folosesc bornele situate într-o anumită parte a cutiei.

*Rezoartele spirale* (fig. 9-2) se opun deplasării sistemului mobil din poziția sa de zero (repaus). La unele tipuri de instrumente, aceste rezoarte servesc și la conducerea curentului spre sistemul mobil.

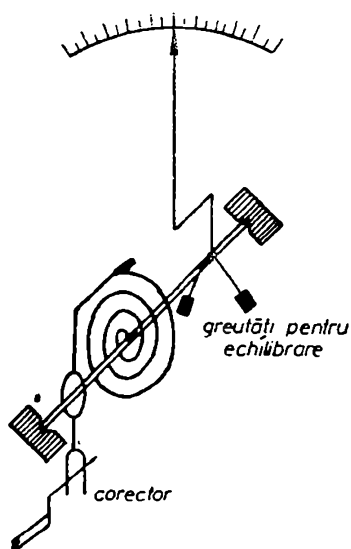


Fig. 9-2. Elemente componente ale sistemului mobil.

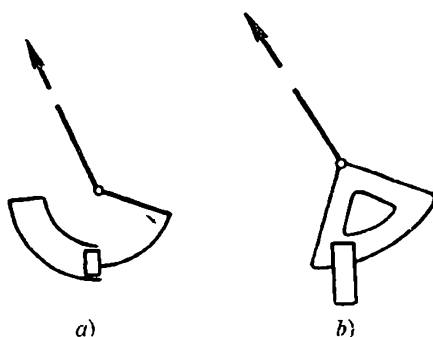
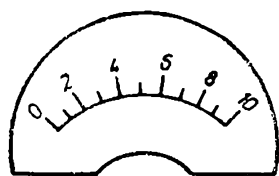


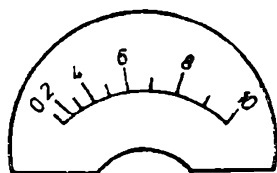
Fig. 9-3. Amortizoare :  
a — pneumatic; b — electromagnetic.

Fixarea inițială, în poziția de zero, a acului indicator se face cu ajutorul *corectorului* (fig. 9-2), învârtit cu o șurubelniță.

Amortizarea mișcării acului indicator și limitarea oscilațiilor acestuia în jurul poziției de echilibru se realizează cu ajutorul unui amortizor pneumatic sau electromagnetic. *Amortizorul pneumatic*, schițat în fig. 9-3, a, constă dintr-un cilindru în interiorul căruia se mișcă un piston odată cu acul indicator. Între cilindru și piston se găsește un interstițiu prin care trece aerul atunci când pistonul se mișcă. Amortizarea mișcărilor se datorește pernei de aer formată în cilindru, în spatele pistonului. *Amortizorul electromagnetic*, schițat în fig. 9-3, b, este realizat dintr-o armătură metalică, fixată rigid de sistemul mobil al instrumentului, ce se mișcă între poliile unui magnet permanent. Fenomenul de inducție electromagnetică ce apare la mișcarea armăturii în câmpul magnetic face ca în armătură să se inducă curenți, respectiv asupra ei să acționeze o forță dirijată în sens opus mișcării, producându-se amortizarea.



a)



b)

Scala gradată a instrumentelor electrice poate fi *uniformă* (fig. 9-4, a) sau *neuniformă* (fig. 9-4, b), după cum diviziunile de pe scară sînt egal, sau neegal distanțate între ele. După poziția reperului zero, scalele pot fi *unilaterale*, cu reperul zero plasat la una din extremitățile scalei, sau *bilaterale*, cu reperul zero situat la mijloc. Pentru eliminarea erorii de paralaxă la citirea indicației de pe scară, instrumentele de măsurare de precizie au cadranul prevăzut cu *oglină*. Poziția de citire corectă este aceea pentru care cititorul vede acul indicator suprapus peste imaginea sa din oglindă.

#### 9.1.4. MIȘCAREA SISTEMULUI MOBIL

Fig. 9-4. Scala instrumentului :

a — uniformă; b — neuniformă.

În timpul măsurării, asupra sistemului mobil al unui instrument acționează, în general, următoarele cupluri :

*Cuplul activ*, determinat de interacțiunea dintre sistemul fix și sistemul mobil, care pune în mișcare de rotație sistemul mobil, se calculează în funcție de energia de interacțiune dintre cele două sisteme :

$$C = \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)_{I=\text{const.}} \quad (9-4)$$

unde  $\alpha$  este unghiul de rotație (v. teoria forțelor generalizate).

Dependent de tipul constructiv al instrumentului și de natura mărimii de măsurat, cuplul activ poate avea valoare constantă sau valoare variabilă periodic în raport cu timpul. În ultimul caz este necesar să se determine o valoare medie a acestui cuplu. De asemenea, cuplul activ poate depinde și de unghiul  $\alpha$ , adică de poziția relativă a sistemului mobil față de sistemul fix. În toate cazurile, cuplul activ se exprimă în final ca o funcție de mărimea măsurată de instrument :

$$C = F(X). \quad (9-5)$$

*Cuplul rezistent* (antagonist) este determinat de resoartele spirale, fiind proporțional cu deformația elastică a acestora :

$$C_r = k_r \alpha. \quad (9-6)$$

*Cuplul de amortizare* acționează întotdeauna în sens opus mișcării și este proporțional cu variația în timp a unghiului de rotație :

$$C_A = k_A \frac{d\alpha}{dt}. \quad (9-7)$$

*Cuplul de frecare* se datorește frecărilor ce apar în lagăre sau cu aerul, avînd o valoare foarte mică, neglijabilă.



*Cuplul de inerție* este determinat de mișcarea accelerată sau întârziată a masei sistemului mobil :

$$M_J = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (9-8)$$

unde  $J$  este momentul de inerție al maselor în mișcare.

*Ecuația de mișcare* a sistemului mobil rezultă din legea a II-a a dinamicii pentru corpuri în rotație :

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = C - C_r - C_A. \quad (9-9)$$

Înlocuind expresiile stabilite mai sus pentru cupluri, se obține următoarea formă a ecuației de mișcare :

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_A \frac{d\alpha}{dt} + k_r \alpha = C. \quad (9-10)$$

În starea de repaus cu deviație permanentă  $\alpha = \text{const.}$  se obține condiția de echilibru

$$C_r = C, \text{ sau } k_r \alpha = F(X), \quad (9-11)$$

de unde se vede că deviația permanentă  $\alpha$  este o funcție de mărimea de măsurat  $X$ .

### 9.1.5. CLASIFICAREA INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

Clasificarea instrumentelor electrice de măsurare poate fi făcută din mai multe puncte de vedere.

După principiul de funcționare, se deosebesc următoarele tipuri principale de instrumente : magnetoelectrice, electromagnetice, electrodinamice, termice, de inducție, de rezonanță, electronice, numerice (cifrice) etc.

După felul curentului, instrumentele se împart în : de curent continuu, de curent alternativ și de curent continuu și alternativ.

După felul mărimii de măsurat, se deosebesc : ampermetre, voltmetre, wattmetre, ohmmetre etc. O categorie aparte o constituie instrumentele folosite pentru măsurarea mărimilor magnetice.

Din punctul de vedere al modului de întrebuințare, se deosebesc : instrumente fixe, sau de tablou și instrumente portative.

Instrumentele de măsurare se clasifică și după clasa lor de precizie (v. paragraful 9.1.6.).

Unele instrumente de măsurare sînt prevăzute cu dispozitive de înregistrare a valorilor mărimii măsurate, fiind denumite instrumente înregistratoare.

### 9.1.6. DATE CARACTERISTICE ȘI SIMBOLURI ALE INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

*Domeniul de măsurare* al unui instrument electric este valoarea maximă a mărimii care, în mod normal, poate fi măsurată cu instrumentul. Cu alte cuvinte, domeniul de măsurare este valoarea mărimii măsurată de instrument,

atunci cînd acul indicator se găsește în dreptul ultimei diviziuni pe de scala gradată. De obicei, pe partea frontală a instrumentelor este înscrisă valoarea maximă a mărimii ce poate fi măsurată, adică domeniul de măsurare.

Constanta unui instrument electric este raportul dintre domeniul de măsurare  $D$  și numărul total de diviziuni  $\alpha_{max}$  de pe scala gradată, adică :

$$K = \frac{D}{\alpha_{max}} . \quad (9-12)$$

Dimensiunea constantei este : la voltmetru V/div, la ampermetru A/div, la wattmetru W/div etc. Fără a cunoaște constanta instrumentului folosit într-o măsurare nu se poate ști ce valoare are mărimea măsurată. Cunoscînd constanta  $K$  și numărul diviziuni  $\alpha$  indicat de instrument, valoarea mărimii este :

$$X = K\alpha . \quad (9-13)$$

**Aplicația 9-2.** Un voltmetru are domeniul  $D=150$  V și numărul total de diviziuni de pe scală  $\alpha_{max}=30$  div. Constanta acestui instrument, conform relației (9-12) este :  $K = \frac{150}{30} = 5$  V/div. Dacă acul indicator se găsește în dreptul diviziunii  $\alpha=12$ , valoarea tensiunii măsurată de voltmetru, conform relației (9-13) este :  $U=5 \cdot 12=60$  V.

**Sensibilitatea** instrumentelor electrice de măsurare este reprezentată prin numărul de diviziuni cu care deviază acul indicator al instrumentului atunci cînd mărimea de măsurat se modifică cu o unitate. Dimensiunea sensibilității este inversă față de dimensiunea constantei instrumentului adică, div/V, div/A, div/W etc. Sub formă matematică, sensibilitatea se exprimă prin relația :

$$S = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta X} . \quad (9-14)$$

**Clasa de precizie** a instrumentelor electrice de măsurare caracterizează gradul de precizie, adică eroarea tolerată a acestora. Se exprimă printr-un număr care reprezintă eroarea maximă admisibilă, în procente, pe care poate să o aibă instrumentul atunci cînd acul indicator se găsește în dreptul ultimei diviziuni.

În practică se folosesc instrumente electrice de măsurare grupate în următoarele cinci clase de precizie :

- clasa 0,1 cu eroarea admisibilă  $\pm 0,1\%$  ;
- clasa 0,2 cu eroarea admisibilă  $\pm 0,2\%$  ;
- clasa 0,5 cu eroarea admisibilă  $\pm 0,5\%$  ;
- clasa 1, cu eroarea admisibilă  $\pm 1\%$  ;
- clasa 1,5 cu eroarea admisibilă  $\pm 1,5\%$  ;
- clasa 2,5 cu eroarea admisibilă  $\pm 2,5\%$  ;
- clasa 4 cu eroarea admisibilă  $\pm 4\%$  .

Instrumentele de clasă 0,1 și 0,2 fiind de precizie ridicată sînt utilizate, în general, pentru etalonarea altor instrumente sau pentru măsurări de precizie. Instrumentele de clasa 0,5 și 1 sînt utilizate pentru măsurări curente în laborator și la standurile de încercare. Instrumentele de clasa 1,5 ; 2,5 și 4 sînt utilizate ca instrumente obișnuite de tablou, cu citire directă și înregistratoare.

*Consumul propriu de energie* al instrumentelor electrice de măsurare apare în primul rând datorită efectului Joule-Lenz dezvoltat la trecerea curentului prin rezistența interioară a acestora. În tabela 9-1 sînt prezentate valorile orientative ale consumului propriu de energie pentru tipurile cele mai uzuale de instrumente electrice de măsurare.

Tabela 9-1

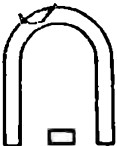





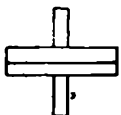

**Consumul propriu de energie al instrumentelor electrice de măsurat**

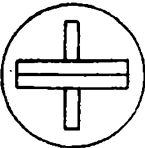

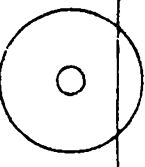


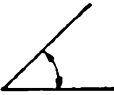
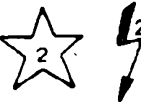
Tipul instrumentului	Consumul propriu, în W	
	Ampermetre pentru 5 A	Voltmetre pentru 100 V
Magnetoelectric	0,2...0,4	0,1...1
Electromagnetic	2...8	2...5
Electrodinamic	3,5...10	3...6
Cu inducție	1...4	2...5

*Simbolurile instrumentelor* electrice de măsurare sînt semnele ce se imprimă pe partea frontală a acestora cu scopul de a recunoaște tipul de instrument, unele date caracteristice și condițiuni de folosire etc. În tabela 9-2 sînt prezentate cîteva din aceste simboluri.

Tabela 9-2

**Simboluri ale instrumentelor electrice de măsurare**

Semnificația	Simbol	Semnificația	Simbol
Instrumente magnetoelectrice		Instrumente de curent continuu	
Instrumente magnetoelectrice cu redresor		Instrumente de curent alternativ monofazat	
Instrumente electromagnetice		Instrumente de curent continuu și alternativ	
Instrumente electrodinamice		Instrumente de măsurat în curent alternativ trifazat	

Semnificația	Simbol	Semnificația	Simbol
Instrumente electro-dinamice ecranate magnetic (ferodinamice)		Instrumente cu cadran orizontal	
Instrumente de inducție		Instrumente cu cadran vertical	
Instrumente cu rezonanță		Instrumente cu cadran înclinat față de orizontală	
		Tensiunea de încercare a izolației (de exemplu 2 kV)	

## 9.2. CONSTRUCȚIA ȘI FUNCȚIONAREA INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

### 9.2.1. INSTRUMENTE MAGNETOELECTRICE

Sistemul fix al instrumentelor de măsurare magnetoelectrice este format dintr-un magnet permanent, iar sistemul mobil dintr-o bobină așezată pe un miez de fier cilindric, situat între poli magnetului permanent (fig. 9-5).

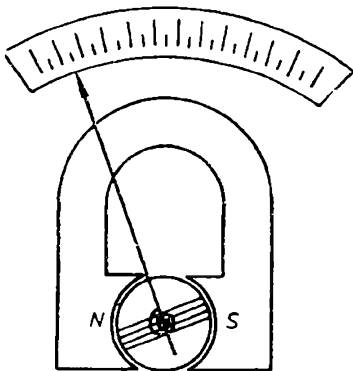


Fig. 9-5. Schița instrumentului magnetoelectric.

Cuplul activ ce rotește sistemul mobil împreună cu acul indicator este determinat de interacțiunea dintre câmpul magnetic al sistemului fix și curentul din spirele bobinei sistemului mobil. Ținând seama că liniile câmpului magnetic sînt perpendiculare pe miezul de fier cilindric al bobinei mobile, iar inducția magnetică în întrefier este constantă, se poate dovedi ușor proporționalitatea dintre acest cuplu și curentul din bobină, adică :

$$C = k_a I. \quad (9-15)$$

Cuplul rezistent este determinat de două resoarte spirale așezate la cele două capete ale

axului sistemului mobil. Valoarea acestui cuplu este proporțională cu deformația elastică a resoartelor, adică cu unghiul de deviație al acului indicator :

$$C_r = k_r \alpha. \quad (9-16)$$

Acul indicator al instrumentului se oprește în dreptul diviziunii pentru care valoarea cuplului activ este egală cu valoarea cuplului rezistent, adică :

$$C = C_r, \text{ sau } \alpha = kI, \quad (9-17)$$

unde  $k = \frac{k_o}{k_r}$  este o constantă de proporționalitate.

Relația (9-17) arată că derivația  $\alpha$  a acului indicator al instrumentelor magnetoelectrice este proporțională cu curentul  $I$  din bobina sistemului mobil. Prin urmare, scala instrumentelor magnetoelectrice este uniformă.

Instrumentele magnetoelectrice pot fi construite pentru a fi folosite ca ampermetre și ca voltmetre, deoarece curentul din bobina mobilă poate fi făcut proporțional cu curentul de măsurat sau cu tensiunea. În cazul ampermetrului, în paralel cu bobina mobilă se leagă un șunt, iar în cazul voltmetrului, în serie cu bobina se leagă o rezistență adițională.

Odată cu schimbarea sensului curentului  $I$ , se schimbă și sensul cuplului activ, ceea ce înseamnă că instrumentele magnetoelectrice sînt destinate numai pentru măsurări în curent continuu, bornele lor fiind marcate cu semnele „+” și „-”. Pentru a putea fi utilizate și la măsurări în curent alternativ, sînt prevăzute cu un redresor pentru redresarea ambelor alternanțe. În această situație, cuplul activ este variabil în cursul unei perioade, avînd valoarea instantanee :

$$c = k_a i_r, \quad (9-18)$$

unde  $i_r$  este curentul redresat. Datorită inerției, sistemul mobil se rotește sub acțiunea valorii medii a cuplului activ :

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T c dt = \frac{k_a}{T} \int_0^T i_r dt = k_a I_{med}. \quad (9-19)$$

Prin urmare, valoarea măsurată de instrument este valoarea medie a mărimii cu variație periodică în timp.

Deoarece tensiunea, respectiv curentul alternativ, au în mod obișnuit o variație sinusoidală, *scala gradată a instrumentelor magnetoelectrice nu este etalonată pentru valorile medii ale curentului, sau tensiunii, ci pentru valorile efective*, ținînd seama că în regim sinusoidal raportul dintre valoarea efectivă și valoarea medie, cunoscut sub denumirea de *factorul de formă*, este 1,11. În regim nesinusoidal, această etalonare nu mai corespunde valorii efective a mărimii măsurate, deoarece factorul de formă este diferit de 1,11.

Funcționarea instrumentelor magnetoelectrice ca ampermetre de c.a. se poate realiza și prin folosirea unor termocupluri a căror tensiune termoelectromotoare determină curentul din bobina sistemului mobil. Încălzirea termocuplului, respectiv tensiunea termoelectromotoare, este proporțională cu patrutul valorii efective a curentului alternativ. Deci, în acest caz, deviația instrumentului depinde de patrutul valorii efective a curentului alternativ atît în regim sinusoidal, cît și în regim nesinusoidal, la frecvențe oricît de mari.

Curentul admisibil prin bobina sistemului mobil a instrumentelor magneto-electrice are valoare relativ mică, maxim 5...30 mA, conducerea curentului la bobină făcându-se prin intermediul resoartelor spirale. La suprasolicitări, se poate întâmpla ca, datorită încălzirii, resoartele spirale să-și modifice proprietățile elastice și instrumentul să dea indicații eronate sau, ceea ce este mai grav, se poate întâmpla ca bobina sistemului mobil să se ardă.

Instrumentele magnetoelectrice sînt sensibile și precise. Practic vorbind, ele nu sînt influențate de cîmpurile magnetice exterioare deoarece cîmpul determinat de magnetul permanent este destul de puternic.

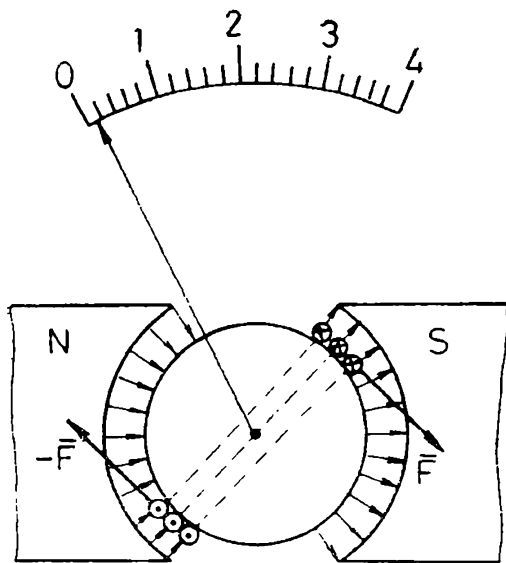


Fig. 9-6. Cuplul activ la instrumentul magnetoelectric.

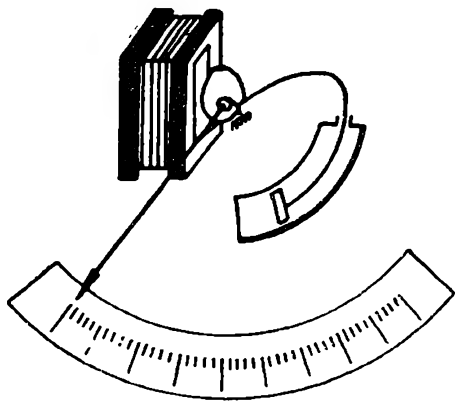


Fig. 9-7. Schița instrumentului electromagnetic.

bină trece curent, armătura este atrasă și, odată cu ea, se deplasează acul indicator de-a lungul scalei gradate. Avînd în vedere expresia forței portante la un electromagnet, rezultă pentru valoarea momentană a cuplului activ al instrumentelor electromagnetice următoarea expresie :

$$c = k_a i^2 f(d), \quad (9-20)$$

**Aplicația 9-3.** Să se stabilească expresia de calcul a cuplului activ la instrumentul magnetoelectric.

**Rezolvare.** Liniile inducției magnetice  $\vec{B}$  sînt perpendiculare în întregul pe suprafața polilor magnetului permanent și a miezului bobinei mobile (fig. 9-6). Se notează cu  $D$  și  $l$  diametrul și lungimea bobinei mobile, iar cu  $N$  numărul de spire al acestei bobine.

Forța ce acționează asupra lungimii  $dl$  din latura unei spire, parcursă de curentul  $i$ , se calculează cu formula lui Laplace:  $d\vec{F} = i [dl \times \vec{B}]$ , de unde rezultă pentru o spirală  $F_1 = Bli$  și pentru  $N$  spire  $F = NF_1 = NBl i$ .

Cuplul activ determinat de forțele  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$  este:  $c = FD = NBlDi = NBSi$ , unde  $S = Dl$  este aria bobinei.

Introducînd constanta  $k_a = NBS$ , rezultă :

$$c = k_a i.$$

În curent continuu  $i = I$  și  $c = C$  (constant).

## 9.2.2. INSTRUMENTE ELECTROMAGNETICE

Funcționarea instrumentelor electromagnetice se bazează pe atracția exercitată de o bobină, prin care trece curentul de măsurat, asupra unui miez feromagnetic.

Sistemul fix al instrumentelor electromagnetice constă dintr-o bobină, iar sistemul mobil dintr-o armătură fixată excentric (fig. 9-7). Cînd prin bo-

unde  $i$  este valoarea momentană a curentului din bobină,  $f(d)$  este o funcție de distanța dintre armătură și bobină, iar  $k_a$  este o constantă de proporționalitate.

Deoarece, conform relației (9-20), cuplul activ depinde de patratul curentului, înseamnă că instrumentele electromagnetice pot fi folosite atât în c.c. cât și în c.a. În c.a. valoarea momentană a cuplului activ are o variație pulsatorie în timp. Datorită inerției sistemului mobil, acul indicator se stabilește în dreptul diviziunii de pe scală corespunzătoare valorii medii a cuplului activ, calculată în raport cu o perioadă  $T$ , care este :

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T c \, dt = k_a f(d) \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = k_a f(d) I^2, \quad (9-21)$$

unde  $I^2$  este patratul valorii efective a curentului alternativ. Deci, în curent alternativ instrumentele electromagnetice măsoară valoarea efectivă a curentului.

Cuplul rezistent este proporțional cu deformația elastică a resortului spiral :  $C_r = k_r \alpha$ . La echilibru, valorile cuplului activ și a cuplului rezistent sînt egale, adică :

$$k_r \alpha = k_a f(d) I^2. \quad (9-22)$$

Această relație neliniară între deviația  $\alpha$  a acului indicator și curentul  $I$  ce se măsoară arată că scala instrumentelor electromagnetice este neuniformă.

Trebuie arătat că, în general, etalonarea instrumentelor electromagnetice realizată în curent continuu nu corespunde și în curent alternativ. De aceea, această etalonare se face separat, pentru curent continuu și pentru curent alternativ.

Instrumentele electromagnetice pot fi folosite nu numai ca ampermetre, ci și ca voltmetre deoarece curentul  $I$  din bobină este proporțional cu tensiunea  $U$  aplicată bobinei.

Instrumentele electromagnetice sînt robuste și ieftine, dar de precizie mai mică decît cele magnetoelectrice. Se folosesc mai ales ca instrumente de tablou.

### 9.2.3. INSTRUMENTE ELECTRODINAMICE

Funcționarea instrumentelor electrodinamice se bazează pe forța (electrodinamică) de interacțiune dintre două bobine parcurse de curent. Una din bobine este fixă, formată din două jumătăți, iar cealaltă este mobilă și solidară cu acul indicator (fig. 9-8 și fig. 9-9).

Ținînd seama de expresia forței electrodinamice dintre două conductoare paralele parcurse de curent și considerînd cîmpul magnetic din interiorul bobinei fixe omogen (fig. 9-8), se obține următoarea expresie pentru valoarea momentană a cuplului activ :

$$c = k_a i_1 i_2 \sin \alpha, \quad (9-23)$$

în care  $i_1$  și  $i_2$  sînt curenții din bobina fixă, respectiv din bobina mobilă,  $\alpha$  este unghiul dintre axele celor două bobine iar  $k_a$ , o constantă de proporționalitate.

Dacă liniile cîmpului magnetic din interiorul bobinei fixe sînt perpendiculare pe cercul descris de laturile bobinei mobile, ceea ce se obține la anumite dimensiuni ale bobinelor (fig. 9-9), atunci valoarea momentană a cuplului activ este :

$$c = k_a i_1 i_2, \quad (9-24)$$

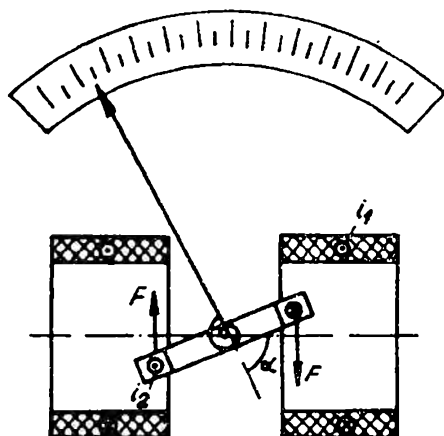


Fig. 9-8. Schița instrumentului electrodinamic cu câmp magnetic uniform.

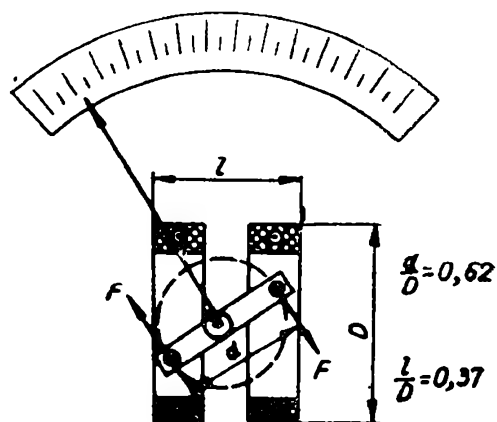


Fig. 9-9. Schița instrumentului electrodinamic cu câmp magnetic neuniform.

În general, cuplul activ al instrumentelor electrodinamice este slab și ușor influențat de cîmpurile magnetice exterioare.

Instrumentele electrodinamice pot fi folosite ca ampermetre, voltmetre sau wattmetre, pentru măsurări în c.c. și în c.a. În c.c. avem  $i = I$  (constant), iar cuplul activ  $c = C$ . În schimb, în c.a. cuplul activ  $c$  are variație pulsatorie în timp și este necesar să se calculeze o valoare medie a acestui cuplu.

Cuplul rezistent este determinat de resoarte spirale, fiind proporțional cu deformația elastică a acestora. Resoartele spirale îndeplinesc în același timp și rolul de a conduce curentul la bobina mobilă.

În timpul măsurării, acul indicator se oprește în dreptul diviziunii pentru care este îndeplinită egalitatea dintre valoarea medie a cuplului activ și cea a cuplului rezistent.

În cazul folosirii instrumentului electrodinamic ca ampermetru, cele două bobine, fixă și mobilă, sînt legate între ele astfel încît curenții  $i_1$  și  $i_2$  sînt fiecare proporționali cu curentul  $i$  de măsurat, iar în cazul folosirii ca voltmetru sînt proporționali cu tensiunea  $u$  aplicată la bornele instrumentului. La folosirea ca wattmetru, bobina fixă este de curent și se leagă în serie cu circuitul, iar cea mobilă este de tensiune și se leagă în paralel cu circuitul.

În curent alternativ, valoarea medie în raport cu o perioadă a cuplului activ este proporțională cu patratul valorii efective a curentului în cazul ampermetrului și cu patratul valorii efective a tensiunii în cazul voltmetrului. Deci, cu instrumente de acest tip se măsoară valorile efective ale curentului, respectiv tensiunii alternative. În schimb, dacă instrumentul electrodinamic este folosit ca wattmetru, valoarea medie a cuplului activ depinde și de defazajul dintre tensiune și curent (v. măsurarea puterii active).

În general instrumentele electrodinamice sînt instrumente de precizie dar, în același timp, sensibile la suprasolicitări și scumpe. Se folosesc ca instrumente de laborator și de tablou.

Dacă bobinele instrumentelor electrodinamice sînt prevăzute cu miezuri de fier, ele se numesc *instrumente ferdinamice*.



**Aplicația 9-4.** Să se stabilească expresia cuplului activ ce acționează asupra sistemului mobil al unui instrument electrodinamic.

*Rezolvare.* Referindu-ne la fig. 9-8, se notează cu :

$N_1, N_2$  — numărul de spire al bobinei fixe, respectiv mobile ;

$S_2$  — aria bobinei mobile ;

$l_1$  — lungimea bobinei fixe.

Conform relației (9-4) :

$$c = \left( \frac{\partial W_m}{\partial \alpha} \right)_{t = \text{const.}}$$

unde  $W_m$  este energia magnetică totală a sistemului fix, cuplat magnetic cu sistemul mobil. Expri-  
mînd această energie în funcție de inductanțele proprii  $L_1, L_2$  a bobinei fixe, respectiv mobile,  
și de inductanța mutuală  $L_{12} = L_{21}$  dintre cele două bobine, se obține :

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2.$$

Avînd în vedere că doar inductanța mutuală  $L_{12}$  depinde de unghiul  $\alpha$ , adică de poziția relativă  
a bobinelor fixă și mobilă, rezultă :

$$c = i_1 i_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha}. \quad (9-25)$$

Cîmpul din interiorul bobinei fixe fiind considerat omogen, avem :

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{\Phi_{12} N_2}{i_1} = \frac{N_2}{l_1} \int_{S_2} \vec{B}_{12} \cdot d\vec{s} = \frac{N_2}{l_1} B_{12} S_2 \cos(180 - \alpha) = \\ &= - \frac{N_2}{l_1} \mu_0 H_{12} S_2 \cos \alpha = - \frac{N_2}{l_1} \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l_1} S_2 \cos \alpha = - \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2 \cos \alpha, \end{aligned}$$

de unde rezultă :

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2 \sin \alpha.$$

Deci

$$c = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2 i_1 i_2 \sin \alpha = k_a i_1 i_2 \sin \alpha,$$

unde  $k_a = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2$  este o constantă.

## 9.2.4. INSTRUMENTE DE INDUCȚIE

Funcționarea instrumentelor de inducție are la bază fenomenul inducției  
electromagnetice, de unde provine și denumirea lor. Evident că aceste instrumente  
funcționează numai în curent alternativ.

În general, instrumentele de inducție pot fi ampermetre, voltmetre sau watt-  
metre. În practică însă, instrumentul de inducție cel mai frecvent întîlnit este  
contorul pentru măsurarea energiei electrice (instrument integrator). De aceea,  
în cele ce urmează se prezintă principiul de funcționare al contorului monofazat.

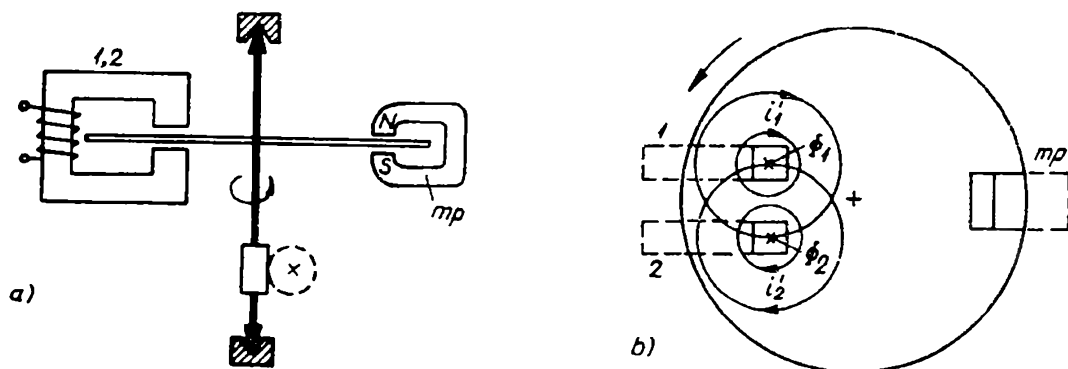


Fig. 9-10. Schița instrumentului de inducție (contorul electric) :  
a — vedere laterală; b — vedere frontală.

În fig. 9-10, a și b este arătată, în principiu, construcția contorului monofazat. Sistemul mobil al instrumentului constă dintr-un disc de aluminiu fixat pe un ax. Prin rotirea discului se pune în mișcare sistemul de înregistrare numerică a contorului. Sistemul fix constă din doi electromagneți, 1 și 2, al căror circuit magnetic este prevăzut fiecare cu un întrefier prin care se mișcă discul. De asemenea, discul se mișcă și printre polii unui magnet permanent mp.

Unul din cei doi electromagneți, spre exemplu electromagnetul 1, are bobina de curent legată în serie cu circuitul, iar electromagnetul 2 are bobina de tensiune legată paralel cu circuitul. Se notează cu  $i_1$  și  $i_2$  valorile momentane, respectiv cu  $I_1$  și  $I_2$  valorile efective ale curenților din cele două bobine. Neglijând rezistența ohmică a bobinei de tensiune în raport cu reactanța sa inductivă, curentul  $I_2$  din această bobină este defazat în urmă cu  $90^\circ$  față de tensiunea aplicată bobinei (fig. 9-11). Curentul  $I_1$  este defazat față de tensiune cu unghiul  $\varphi$  determinat de caracterul circuitului monofazat la care se măsoară energia cu contorul respectiv.

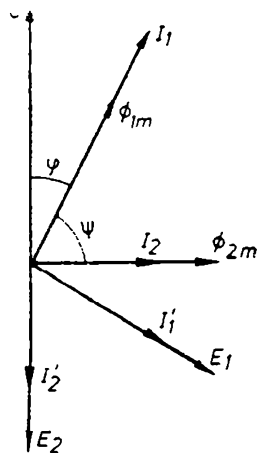


Fig. 9-11. Diagrama fazorială pentru instrumentul de inducție.

În întrefierurile celor doi electromagneți iau naștere fluxurile variabile în timp  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$ , produse de curenții  $i_1$ , respectiv  $i_2$  și în fază cu acești curenți. Valorile maxime ale acestor fluxuri se notează cu  $\Phi_{1m}$  și  $\Phi_{2m}$ .

Conform legii inducției electromagnetice, în disc se induc tensiunile electromotoare  $e_1$  și  $e_2$  decalate în urmă cu  $90^\circ$  față de fluxul  $\Phi_1$ , respectiv  $\Phi_2$  (fig. 9-11). Fiecare din aceste tensiuni electromotoare dă naștere în metalul discului la cîte un curent  $i'_1$ , respectiv  $i'_2$ , care sînt în fază cu tensiunile electromotoare ce îi produc, deoarece discul prezintă numai rezistență ohmică.

Ținînd seama de defazajele din fig. 9-11, se pot scrie următoarele relații:

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin \omega t, \quad i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin (\omega t - \psi),$$

$$\Phi_1 = \Phi_{1m} \sin \omega t, \quad \Phi_2 = \Phi_{1m} \sin (\omega t - \psi),$$

$$e_1 = \sqrt{2} E_1 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad e_2 = \sqrt{2} E_2 \sin \left( \omega t - \psi - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$i'_1 = \sqrt{2} I'_1 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad i'_2 = \sqrt{2} I'_2 \sin \left( \omega t - \psi - \frac{\pi}{2} \right),$$

în care  $\psi$  este unghiul dintre  $\Phi_{1m}$  și  $\Phi_{2m}$ .

Cuplul activ, care pune în mișcare de rotație discul, este determinat de interacțiunea dintre cîmpurile magnetice  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  și curenții  $i'_1$  și  $i'_2$  din disc. Valoarea instantanee a cuplului activ are patru componente :

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4. \quad (9-26)$$

Fiecare din aceste componente este proporțională cu produsul dintre valoarea momentană a unui flux și valoarea momentană a unui curent :

$$\begin{aligned} c_1 &= k_{a1} \Phi_{1i'_2}, & c_2 &= k_{a2} \Phi_{2i'_1}, \\ c_3 &= k_{a3} \Phi_{1i'_1}, & c_4 &= k_{a4} \Phi_{2i'_2}. \end{aligned} \quad (9-27)$$

Calculînd valorile medii în raport cu o perioadă ale acestor cupluri, rezultă :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T c_1 dt = -k_{a1} \Phi_{1m} \sqrt{2} I'_2 \sin \psi, \\ C_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T c_2 dt = k_{a2} \Phi_{2m} \sqrt{2} I'_1 \sin \psi, \\ C_3 &= \frac{1}{T} \int_0^T c_3 dt = 0, \quad C_4 = \frac{1}{T} \int_0^T c_4 dt = 0, \end{aligned} \quad (9-28)$$

de unde, avînd în vedere că în cazul miezurilor de fier nesaturate există proporționalitățile :  $I'_1 \sim E_1 \sim \Phi_{1m}$ ,  $I'_2 \sim E_2 \sim \Phi_{2m}$ , se obține :

$$C_1 = -k_1 \Phi_{1m} \Phi_{2m} \sin \psi, \quad C_2 = k_2 \Phi_{1m} \Phi_{2m} \sin \psi, \quad (9-29)$$

în care  $k_1$  și  $k_2$  sînt constante. Aceste două cupluri determină valoarea medie a cuplului activ rezultat, care este :

$$C = C_1 + C_2 = (k_2 - k_1) \Phi_{1m} \Phi_{2m} \sin \psi$$

sau,

$$C = k \Phi_{1m} \Phi_{2m} \sin \psi, \quad (9-30)$$

unde  $k = k_2 - k_1$ .

Prin urmare, *cuplul activ la instrumentele de inducție este proporțional cu produsul dintre fluxurile magnetice care străbat discul și sinusul unghiului de defazaj dintre aceste fluxuri.*

Cuplul rezistent este determinat de curenții turbionari ce iau naștere în disc datorită mișcării lui printre polii magnetului permanent și este proporțional cu turația :

$$C_r = k_r n. \quad (9-31)$$

*Spira în scurtcircuit* intervine în cazul folosirii instrumentului de inducție ca ampermetru sau ca voltmetru, cînd sistemul fix este prevăzut cu o singură bobină, situată pe un singur miez feromagnetic cu întrefier. Funcționarea instrumentului pretinde însă existența a două fluxuri magnetice  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  defazate între ele cu unghiul  $\psi$ , așa cum s-a explicat mai sus. Pentru realizarea celor două fluxuri

magnetice defazate, se procedează astfel : un pol al electromagnetului se împarte în două jumătăți printr-o creștătură. Pe una din aceste jumătăți se așază o spirală în scurtcircuit (fig. 9-12). Această spirală are rolul de a defaza fluxurile  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  din cele două jumătăți ale miezului.

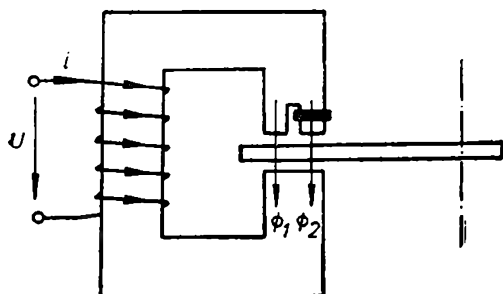


Fig. 9-12. Electromagnetul prevăzut cu spirală în scurtcircuit.

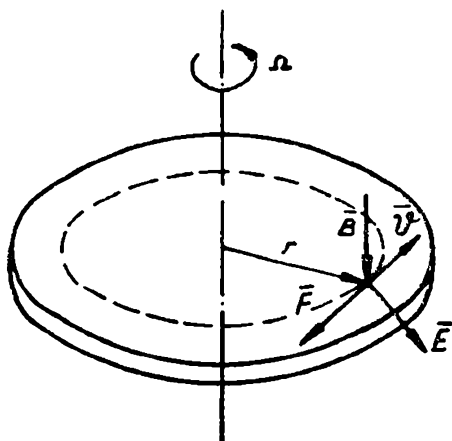


Fig. 9-13. Forța determinată de magnetul permanent.

**Aplicația 9-5.** Să se stabilească expresia cuplului rezistent ce acționează asupra discului unui contor electric.

**Rezolvare.** Cuplul rezistent este determinat de mișcarea discului printre poli magnetului permanent (fig. 9-10). Conform legii Inducției electromagnetice, intensitatea cîmpului electric indus în disc datorită mișcării acestuia într-un cîmp magnetic este (fig. 9-13) :

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B},$$

de unde, ținînd seama că unghiul dintre  $\vec{v}$  și  $\vec{B}$  este  $90^\circ$ , rezultă :

$$E = vB = \omega r B = \frac{2\pi n}{60} r B,$$

în care  $n$  este turația discului în rot/min și  $r$  este raza măsurată pînă la punctul în care se calculează  $E$ .

Conform legii lui Ohm (forma locală), se obține următoarea expresie a densității de curent din disc :

$$J_d = \sigma E = \sigma \frac{2\pi n}{60} r B.$$

Prin secțiunea transversală  $S_d$  a discului, situată între poli magnetului permanent, există curentul :

$$i_d = S_d J_d = S_d \sigma \frac{2\pi n}{60} r B.$$

Forța ce acționează asupra discului în zona străbătută de curentul  $i_d$  și determinată de cîmpul magnetului permanent, se calculează cu formula lui Laplace :

$$\vec{F} = \int_{l_d} i_d [d\vec{l} \times \vec{B}],$$

unde  $l_d$  este porțiunea din disc, măsurată în lungul razei, situată între polii magnetului. Valoarea acestei forțe este :

$$F = i_d l_d B = S_d \sigma \frac{2\pi n}{60} r B l_d B.$$

Cuplul rezistent determinat de forța  $F$  se calculează cu relația :

$$C_r = Fr = S_d l_d \sigma \frac{2\pi}{60} B^2 r^2 n$$

sau

$$C_r = k_r n,$$

unde

$$k_r = S_d l_d \sigma \frac{2\pi}{60} B^2 r^2$$

este o constantă deoarece  $B = \text{const.}$  și  $r \cong \text{const.}$  pentru toată zona din disc de volum  $S_d l_d$ , situată între polii magnetului permanent.

### 9.2.5. GALVANOMETRE

Măsurarea curenților și a tensiunilor foarte mici, de ordinul  $\mu A$ , respectiv  $\mu V$ , nu se poate realiza cu instrumentele obișnuite descrise mai sus din cauza cuplului de frecare care poate fi mai mare decât cuplul activ. În acest scop, sînt necesare instrumente mult mai sensibile, denumite galvanometre.

Galvanometrele sînt instrumente de tip magnetoelectric la care sistemul mobil este suspendat printr-un fir metalic de torsiune (fig. 9-14) care are, în același timp, și rolul de a produce cuplul rezistent și, în unele cazuri, de a conduce curentul la bobina mobilă. Acul indicator al instrumentului poate fi înlocuit

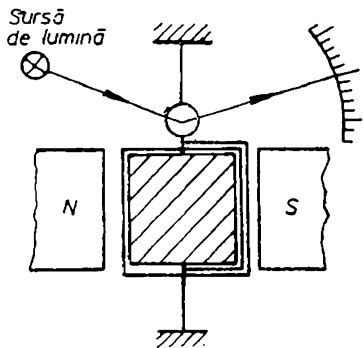


Fig. 9-14. Schița galvanometru-lui magnetoelectric.

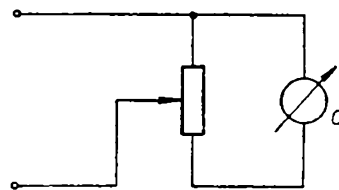


Fig. 9-15. Șuntarea galva-nometrului.

printr-un spot luminos reflectat de o oglindă ce se rotește solidar cu sistemul mobil. Deci, există galvanometre cu ac indicator și cu spot luminos.

Este foarte important de reținut că un galvanometru nu se introduce direct în circuit, ci împreună cu un șunt, cu ajutorul căruia se poate modifica sensibilitatea galvanometrului (fig. 9-15).

Galvanometrele se folosesc pentru măsurări în c.c. și c.a. În unele situații, pentru măsurări în c.a., la sistemul mobil se atașează un termocuplu.

*Galvanometrele balistice* au sistemul mobil cu inerție mare, încît perioada oscilațiilor proprii este mult mai mare decît durata impulsului de curent ce trece prin bobina sa. Practic, sistemul mobil nici nu începe să se rotească pînă cînd impulsul primit deja nu mai există. Cu galvanometrul balistic se măsoară, de exemplu, sarcina electrică transportată de curentul sub formă de impuls ce trece prin sistemul mobil. Se poate demonstra că sarcina electrică este proporțională cu amplitudinea primei oscilații a galvanometrului (calibrarea galvanometrului balistic va fi prezentată la aplicația 10-1).

Există și *galvanometre de rezonanță*, folosite în c.a., la care frecvența proprie de oscilație a sistemului mobil este egală cu frecvența mărimii de măsurat. În acest caz, pe scala gradată apare o linie luminoasă de lungime proporțională cu de două ori amplitudinea mărimii măsurate.

## 9.2.6. LOGOMETRE

Logometrele sînt instrumente de măsurare la care sistemul mobil este prevăzut cu două elemente de producere a cuplului : unul pentru cuplul activ și al doilea pentru cuplul antagonist. Tipul instrumentului poate fi : magnetoelectric, electromagnetic sau electrodinamic.

Sistemul mobil al logometrelor de tip magnetoelectric și electrodinamic este prevăzut cu două bobine, situate de regulă la  $90^\circ$  una față de alta, care produc cuplul activ și cuplul antagonist (fig. 9-16).

Logometrele nu sînt prevăzute cu resoarte spirale pentru producerea cuplului rezistent. Ca urmare, în stare de nefuncționare, acul indicator se poate situa în dreptul oricărei diviziuni de pe scala gradată. Conducerea curentului la bobinele sistemului mobil se face prin benzi maleabile din aur, care nu dezvoltă un cuplu de torsiune.

Folosirea logometrelor pentru măsurarea unor mărimi va fi prezentată la paragrafele următoare.

**Aplicația 9-6.** Să se stabilească expresia de calcul a cuplurilor ce acționează asupra sistemului mobil al unui logometru, considerînd cîmpul magnetic creat de sistemul fix ca fiind omogen.

**Rezolvare.** Se notează cu  $i_1$  și  $i_2$  curenții din cele două bobine ale sistemului mobil, așezate la  $90^\circ$  una față de alta (fig. 9-17), cu  $l_1$ ,  $l_2$  lungimea și cu  $d_1$ ,  $d_2$  lățimea bobinelor. Forțele  $\vec{F}_1$

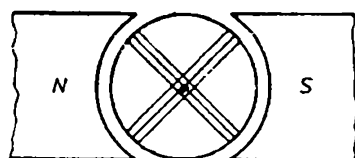


Fig. 9-16. Schița logometru-lui magnetoelectric.

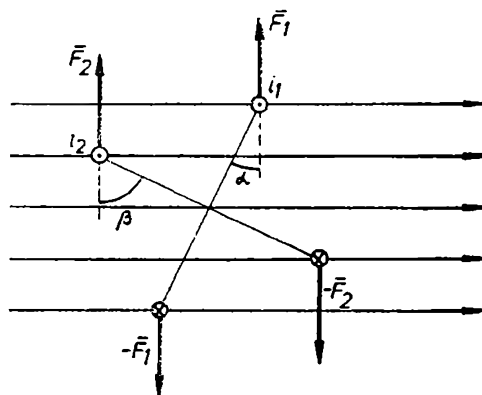


Fig. 9-17. Cuplurile ce acționează asupra sistemului mobil al logometru-lui magnetoelectric.

și  $\vec{F}_2$  ce acționează asupra laturilor celor două bobine se calculează cu formula lui Laplace :  $d\vec{F} = i [d\vec{l} \times \vec{B}]$ , obținându-se :

$$F_1 = N_1 i_1 l_1 B, \quad F_2 = N_2 i_2 l_2 B.$$

Cuplurile determinate de perechile de forțe  $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$  sînt :

$$c_1 = F_1 d_1 \sin \alpha = N_1 i_1 l_1 B d_1 \sin \alpha = N_1 S_1 B i_1 \sin \alpha, \quad (9-32)$$

$$c_2 = F_2 d_2 \cos \alpha = N_2 i_2 l_2 B d_2 \cos \alpha = N_2 S_2 B i_2 \cos \alpha,$$

unde  $S_1 = l_1 d_1$  și  $S_2 = l_2 d_2$  sînt ariile celor două bobine, iar  $N_1$  și  $N_2$  numărul de spire al fiecăreia.

Cuplul rezultat este :  $c = c_1 - c_2$ .

## 9.2.7. PUNȚI DE MĂSURARE

Punțile de măsurare sînt de diverse tipuri și folosite în scopuri multiple. Astfel, există punți de curent continuu, folosite pentru măsurarea rezistențelor (mari și mici) și punți de curent alternativ, folosite pentru măsurarea inductanțelor, capacităților, frecvenței etc.

În principiu, schema electrică a unei punți este reprezentată în fig. 9-18. Între punctele diagonale  $a-b$  se aplică o tensiune (de la o sursă de alimentare) iar între punctele diagonale  $c-d$  se leagă un instrument (galvanometru), prin care se sesizează starea de echilibru a punții. Cele patru brațe ale punții sînt constituite din rezistențe sau impedanțe.

Cu majoritatea punților măsurarea se efectuează prin stabilirea stării de echilibru, caracterizată prin diferență de potențial nulă între punctele  $c-b$ . Există însă și punți cu care se măsoară prin dezechilibrare.

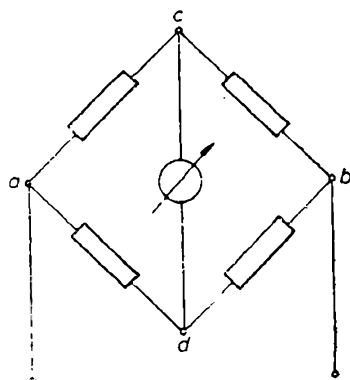


Fig. 9-18. Schema punții de măsură.

## 9.3. MĂSURAREA CURENTULUI ELECTRIC

### 9.3.1. AMPERMETRE

Instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară curentul electric se numește ampermetru. Cuplul activ ce acționează asupra sistemului mobil al ampermetrului, oricare ar fi tipul său constructiv, este o funcție de curentul de măsurat.

Ampermetrul se leagă în serie cu circuitul parcurs de curentul a cărui valoare se măsoară (fig. 9-19). De aceea, ampermetrul trebuie să aibă o rezistență interioară  $R_A$  mică pentru ca, prin intercalarea sa în circuit, să nu se modifice curentul și consumul propriu al instrumentului să fie minim. Legarea ampermetrului în paralel cu circuitul înseamnă practic un scurtcircuit prin intermediul instrumentului, care conduce la deteriorarea lui.

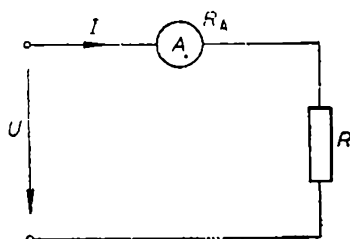


Fig. 9-19. Legarea în circuit a ampermetrului.

Măsurarea curentului continuu se poate face cu ampermetre de tip magneto-electric, electromagnetic sau electrodinamic. Se folosesc, cu preferință, instrumentele magnetoelectrice.

Măsurarea curentului alternativ poate fi făcută cu ampermetre magnetoelectrice prevăzute cu redresor sau cu termoelemente. În primul caz valoarea medie a cuplului activ este proporțională cu valoarea medie a curentului redresat, iar în al doilea caz cuplul activ este proporțional cu patratul valorii efective a curentului. De asemenea, pentru măsurarea curentului alternativ, se pot folosi ampermetre electromagnetice, electrodinamice sau de inducție.

### 9.3.2. EXTINDEREA DOMENIULUI DE MĂSURARE AL AMPERMETRELOR

Extinderea domeniului de măsurare al unui ampermetru poate fi realizată cu ajutorul șunturilor sau al transformatoarelor de măsurare de curent.

Șunturile sînt rezistoare cu rezistență de valoare foarte redusă, legate în paralel cu instrumentul (fig. 9-20). Rezistența  $R_s$  a șuntului se determină în funcție de rezistența interioară  $R_A$  a instrumentului și de raportul  $k_I$  de multiplicare al șuntului :

$$k_I = \frac{I}{I_A} > 1, \quad (9-33)$$

unde  $I_A$  este curentul prin instrument și  $I$  este curentul de măsurat. Ținînd seama de schema reprezentată în fig. 9-20, se pot scrie relațiile :

$$I = I_s + I_A, \quad R_A I_A = R_s I_s, \quad R_s = \frac{I_A}{I_s}, \quad R_A = \frac{I_A}{I - I_A} R_A,$$

adică

$$R_s = \frac{1}{k_I - 1} R_A. \quad (9-34)$$

Rezistența șuntului fiind mult mai mică decît rezistența interioară a ampermetrului, prin șunt trece cea mai mare parte a curentului de măsurat.

Șunturile se construiesc din manganină (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni), care are proprietăți electrice și fizice relativ constante, rezistivitatea de circa  $0,42 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$ , coeficientul de temperatură redus, de  $0,00003/^\circ\text{C}$ . Șunturile se realizează sub formă de bobine, bare rotunde, platbande etc.

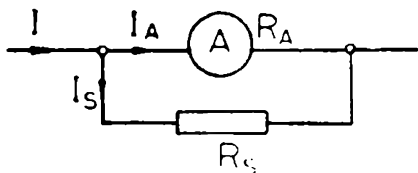


Fig. 9-20. Schema ampermetrului cu șunt.

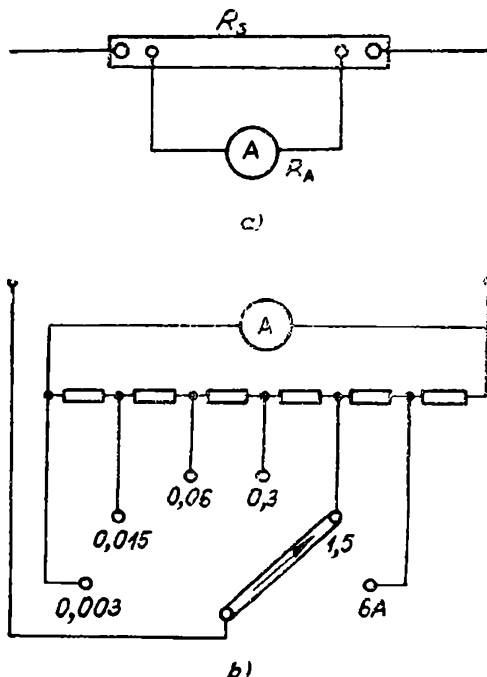


Fig. 9-21. Schema ampermetrului cu mai multe domenii de măsurare (cu șunturi interioare).



La unele tipuri constructive de ampermetre, șunturile se montează în exterior, prin legarea lor la cele două borne ale instrumentului. Unele șunturi exterioare, de precizie mai ridicată, sînt prevăzute cu patru borne: două borne principale — de curent — și două borne auxiliare — la care se leagă instrumentul de măsurare, așa cum este arătat în fig. 9-21, *a*.

La ampermetrele cu mai multe domenii de măsurare, șunturile sînt multiple și se montează în interiorul cutiei instrumentului, schimbarea lor făcîndu-se cu ajutorul unui comutator. În fig. 9-21, *b* este arătată schema unui ampermetru cu șunturi interioare.

Șunturile exterioare au marcate pe ele curentul care poate fi măsurat de instrumentul prevăzut cu șuntul respectiv și căderea de tensiune pe șunt corespunzătoare curentului nominal, exprimată în mV, care trebuie să fie egală cu căderea de tensiune nominală pe rezistența interioară a instrumentului. Valorile standardizate pentru căderea nominală de tensiune sînt: 60, 75, 100 sau 150 mV.

Constanta unui ampermetru prevăzut cu șunt este:

$$[K = \frac{\text{valoarea curentului înscrisă pe șunt}}{\text{numărul total de diviziuni de pe scală}} \left[ \frac{\text{A}}{\text{div.}} \right]$$

Această constantă se calculează în acest fel numai dacă șuntul și instrumentul căruia i se atașează au aceeași cădere nominală de tensiune. În caz contrar, constanta se calculează ținîndu-se seama și de neegalitatea căderilor de tensiune.

**Aplicația 9-7.** Șuntul normal al unui ampermetru are domeniul  $I_N = 7,5$  A și căderea de tensiune  $U_N = 60$  mV. Să se calculeze curentul maxim ce poate fi măsurat cu ampermetrul, dacă i se atașează alt șunt, cu datele  $I_{N1} = 15$  A,  $U_{N1} = 100$  mV.

**Rezolvare.** Folosind schema din fig. 9-20, se pot scrie pentru ampermetrul prevăzut cu șuntul normal următoarele relații:

$$U_N = I_{AN} R_A = I_{sN} R_s, \quad I_{sN} = I_N - I_{AN} \cong I_N \quad (I_{AN} \ll I_N)$$

de unde rezultă:

$$R_s = \frac{U_N}{I_{sN}} \cong \frac{U_N}{I_N}, \quad R_A = \frac{U_N}{I_{AN}}.$$

Pentru al doilea șunt se obțin:

$$U_{N1} = I_{sN1} R_{s1} \cong I_{N1} R_{s1}, \quad R_{s1} = \frac{U_{N1}}{I_{N1}}.$$

Condiția ca prin instrument curentul să nu se modifice prin montarea celui de-al doilea șunt este:

$$I_{AN} R_A = I'_{N1} R_{s1},$$

unde  $I'_{N1}$  este curentul maxim ce se poate măsura de instrumentul cu al doilea șunt.

Din relațiile scrise se obține:

$$I'_{N1} = \frac{R_A}{R_{s1}} I_{AN} = \frac{U_N}{U_{N1}} \frac{I_{N1}}{I_{AN}} I_{AN} = \frac{60}{100} 15 = 9 \text{ A}.$$

### 9.3.3. FOLOSIREA TRANSFORMATOARELOR DE CURENT

Pentru măsurarea curentului alternativ de valoare mare, ampermetrul se leagă în circuit prin intermediul unui transformator de măsurare de curent (reductor de curent). Înfășurarea primară a transformatorului de curent, realizată cu un număr de spire  $N_1$  mic, se leagă în serie cu circuitul străbătut de

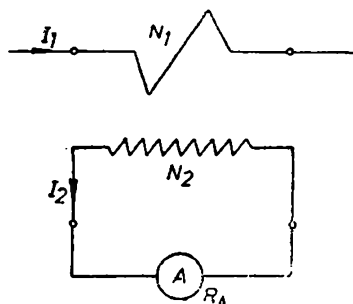


Fig. 9-22. Legarea ampermetrului prin transformatorul (reductorul) de curent.

curentul de valoare mare, care se măsoară, iar la bornele înfășurării secundare, realizată cu un număr de spire  $N_2$  mai mare, se leagă ampermetrul (fig. 9-22).

Raportul curenților  $I_1$  și  $I_2$  din primar și din secundar, în condițiile în care se neglijează curentul de magnetizare, este :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}, \quad (9-35)$$

adică în circuitul secundar se măsoară un curent de  $\frac{N_2}{N_1}$  ori mai mic decât curentul din primar. Curentul

nominal din circuitul secundar este, de obicei, 5 A.

Rezistența interioară a ampermetrului legat în circuitul secundar este foarte mică, din care cauză transformatorul de curent funcționează practic în regim de scurtcircuit. Când ampermetrul lipsește din circuit, este necesar ca înfășurarea secundară să fie legată în scurtcircuit deoarece funcționarea în gol nu este admisă la acest tip de transformator.

Ampermetrul legat în circuitul secundar poate fi etalonat direct în valorile corespunzătoare curentului din primar, avînd în vedere relația (9-35). O astfel de situație se întâlnește la ampermetrele montate pe tablourile de distribuție ale instalațiilor electrice de putere mare.

În măsurările de laborator, sau de verificare în exploatare, se folosesc transformatoare de curent portative, la care există și posibilitatea de a se schimba raportul de reducere (transformare) al curentului prin schimbarea numărului de spire din primar. În acest scop, înfășurarea primară este prevăzută cu prize. În figura 9-23 este schițat un astfel de transformator de curent, avînd miezul toroidal și înfășurările primară și secundară închise într-o cutie din material plastic. În unele cazuri bobinajul primar al transformatorului de curent este realizat chiar cu conductorul circuitului principal care se trece odată sau de mai multe ori prin fereastra miezului de fier al transformatorului, realizîndu-se în felul acesta numărul de spire necesar.

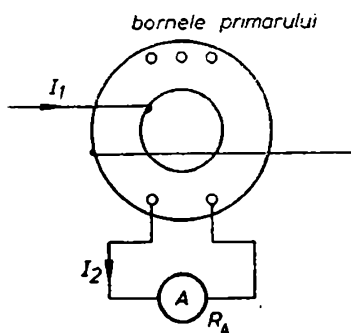


Fig. 9-23. Schița transformatorului de curent cu bobina primară realizată exterior.

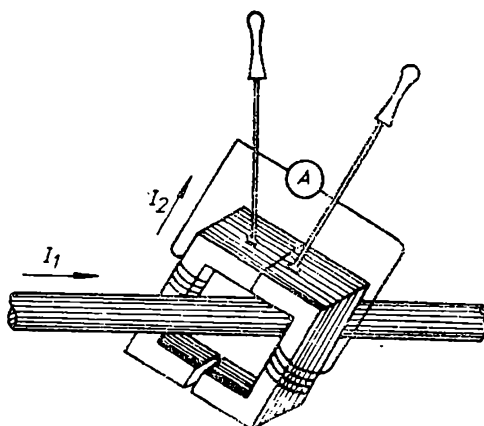


Fig. 9-24. Ampermetrul clește.

Dacă circuitul principal nu poate fi întrerupt pentru introducerea transformatorului de măsurare, atunci se folosesc transformatoare de măsurare care au miezul de fier în formă de clește (fig. 9-24), dar a căror precizie este mai redusă.

Una din bornele secundare ale transformatorului de curent se leagă obișnuit la masă, mai ales atunci când circuitul primar aparține unei linii de tensiune ridicată. Aceasta cu scopul de a se evita pericolul de electrocutare al operatorului care face manevre în circuitul secundar atunci când, dintr-un motiv oarecare, izolația dintre primar și secundar se deteriorează.

Întrucât transformatoarele de curent sînt folosite frecvent în tehnica măsurărilor electrice, sînt utile unele precizări privind construcția lor și erorile pe care le introduc, la care ne referim, pe scurt, în cele ce urmează.

*Construcția transformatoarelor de curent.* Miezul acestor transformatoare se realizează din tole din oțel aliat cu siliciu sau din oțel aliat cu nichel. Pentru a micșora cît mai mult curentul magnetizant, rosturile trebuie să fie cît mai mici. În acest scop la unele tipuri constructive miezul este realizat din bandă feromagnetică înfășurată în formă de tor. Inducția magnetică în miez are valori mici (max. 0,3 T), deci transformatorul de curent funcționează nesaturat. Bobina primară trebuie să aibă izolația corespunzătoare tensiunii circuitului în care se intercalează.

Dependent de tensiune, de locul de folosire și de unele elemente constructive, se disting următoarele tipuri de transformatoare de curent :

— transformatoare de curent de laborator (portative), executate pentru tensiuni pînă la 1 kV ;

— transformatoare de curent pentru alimentarea instrumentelor de măsurare și releelor de pe tablourile de comandă, pentru tensiuni joase (1 kV), cu izolația uscată sau din rășină ;

— transformatoare de curent de medie tensiune (10...15 kV), cu izolația dintre înfășurări din porțelan (transformatoare de trecere, de interior) ;

— transformatoare de curent de înaltă tensiune (peste 35 kV), cu ulei, folosite în stațiile de transformatoare etc.

*Eroarea transformatoarelor de curent* constă din : *eroarea de curent* și *eroarea de unghi (sau de fază)*. Pentru a defini aceste două categorii de erori, se scriu ecuațiile transformatorului (v. relația 5-73) :

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2, \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_1, \quad (9-36)$$

unde  $\underline{Z}_1$  este impedanța circuitului primar,  $\underline{Z}_2$  — impedanța circuitului secundar și  $\underline{Z}_M = j\omega M$  este impedanța de cuplaj magnetic dintre bobina primară și cea secundară. Pe de altă parte, amperspirele ce produc magnetizarea miezului sînt :

$$\underline{I}_1 N_1 + \underline{I}_2 N_2 = \underline{I}_0 N_1, \quad (9-37)$$

unde  $\underline{I}_0$  este curentul de magnetizare (raportat la bobina primară  $N_1$ ).

Avînd în vedere că transformatorul de curent funcționează teoretic în scurt-circuit ( $U_2 = 0$ ) și că curentul de magnetizare se consideră neglijabil ( $I_0 = 0$ ), din (9-36) și (9-37) rezultă, în aceste condiții ideale :

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = - \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_2} = - \frac{N_1}{N_2}. \quad (9-38)$$

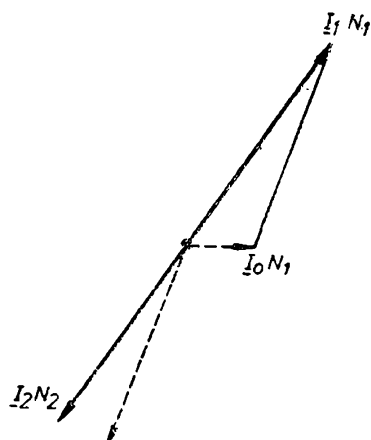


Fig. 9-25. Diagrama curentilor (amperspirelor) la transformatorul de curent.

De aici reiese prima condiție, ca  $\frac{I_2}{I_1} = \left| \frac{Z_M}{Z_2} \right| = \frac{N_1}{N_2}$  care, dacă nu este îndeplinită, introduce o eroare de curent. A doua condiție ce rezultă este ca  $\arg \left\{ \frac{I_2}{I_1} \right\} = \arg \left\{ -\frac{Z_M}{Z_2} \right\} = -\pi$ , adică  $I_1$  și  $I_2$  să fie în opoziție de fază (fig. 9-25), care, dacă nu este îndeplinită, introduce o eroare de unghi (sau de fază).

Eroarea relativă de curent se poate exprima prin relația :

$$\varepsilon_c = \frac{I'_2 - I_2}{I_2} = \frac{I'_2 \frac{N_2}{N_1} - I_1}{I_1}, \quad (9-39)$$

unde  $I_1$  este curentul (nominal) din primar,  $I'_2$  - curentul măsurat în secundar și  $I_2$  - curentul din secundar, în lipsa erorii (corespunzător relației teoretice 9-35).

Eroarea admisibilă de curent și de tensiune introdusă de transformatoarele de curent se exprimă prin clasa de precizie a acestor aparate.

## 9.4. MĂSURAREA TENSIUNII ELECTRICE

### 9.4.1. VOLTMETRE

Pentru măsurarea tensiunii electrice se folosesc instrumentele denumite voltmetre, care se leagă în paralel cu circuitul (fig. 9-26).

Cuplul activ al voltmetrelor, oricare ar fi tipul lor, este funcție de tensiunea de măsurat deoarece curentul care intervine în expresia acestui cuplu se exprimă prin raportul dintre tensiune și rezistența interioară a instrumentului. Voltmetrele sînt de fapt miliampermetre prevăzute cu o rezistență interioară foarte mare, de exemplu 1 000  $\Omega/V$ . Cu cît un voltmetru are rezistență interioară mai mare, cu atît se pot executa cu el măsurări de precizie mai bună și cu atît consumul propriu al instrumentului este mai mic.

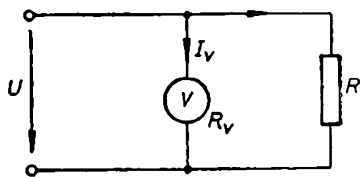


Fig. 9-26. Legarea în circuit a voltmetrului.

Pentru măsurarea tensiunilor continue se folosesc voltmetre de tip magneto-electric, electromagnetic sau electrodinamic. Măsurarea tensiunilor alternative se face cu voltmetre magnetoelectrice prevăzute cu redresor, electromagnetice, electrodinamice etc. Tensiunile foarte mici se măsoară cu galvanometre sau cu voltmetre electronice.

## 9.4.2. EXTINDEREA DOMENIULUI DE MĂSURARE AL VOLTMETRELOR

Pentru extinderea domeniului de măsurare a unui voltmetru se utilizează rezistențe adiționale care se leagă în serie cu instrumentul (fig. 9-27). Valoarea rezistenței adiționale  $R_a$  se calculează în funcție de rezistența interioară  $R_V$  a voltmetrului și de raportul de extindere a domeniului de la valoarea  $U$  la valoarea  $U_1$ :  $k_V = \frac{U_1}{U}$ .

Curentul  $I_V$  prin voltmetru fiind același când nu există rezistență adițională și când aceasta există, se poate scrie:

$$I_V = \frac{U}{R_V} = \frac{U_1}{R_V + R_a}$$

și, înlocuind  $U_1 = k_V U$ , rezultă:

$$R_a = (k_V - 1) R_V. \quad (9-40)$$

Rezistențele adiționale se confecționează din manganină, care are coeficientul de temperatură practic neglijabil. Pe rezistențele adiționale exterioare se indică valoarea lor în ohmi, deoarece extinderea domeniului de măsurare depinde de valoarea acestor rezistențe, comparativ cu valoarea rezistenței interioare a voltmetrului. La instrumentele multiple, rezistențele adiționale sînt montate în interiorul cutiei, schimbarea lor făcîndu-se cu un comutator.

Constanta voltmetrului prevăzut cu rezistență adițională se calculează împărțind domeniul de măsurare extins la numărul total de diviziuni de pe scală.

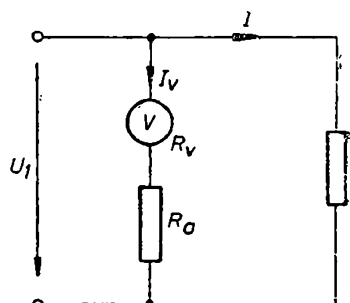


Fig. 9-27. Voltmetrul prevăzut cu rezistență adițională.

## 9.4.3. FOLOSIREA TRANSFORMATOARELOR DE TENSIUNE

Cînd tensiunea alternativă de măsurat depășește 750 V, pentru măsurarea ei se folosesc transformatoare de măsurare de tensiune (reductoare de tensiune), cu ajutorul cărora, la tensiunea ridicată aplicată în primar, se obține în secundar o tensiune de maxim 100 V. Voltmetrul se leagă la bornele secundare ale transformatorului (fig. 9-28) și poate fi etalonat direct în valori ale tensiunii din primar, avînd în vedere că:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}, \text{ adică } U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1. \quad (9-41)$$

Rezistența interioară a voltmetrului este foarte mare, deci curentul din secundarul transformatorului de tensiune este foarte mic. Practic, se poate considera că transformatorul de măsurare de tensiune este construit pentru a funcționa normal în regim de mers în gol.

Una din bornele secundare ale transformatorului de tensiune se leagă obișnuit la masă, pentru

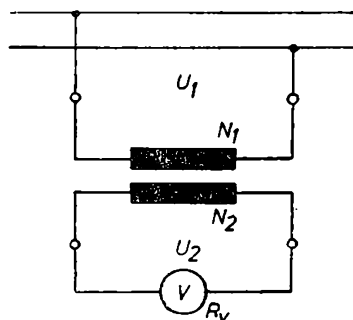


Fig. 9-28. Schema de legare a voltmetrului prin transformatorul (reductorul) de tensiune.

a se evita pericolul de electrocutare al operatorului ce face manevre în circuitul secundar în cazul când izolația dintre primar și secundar se deteriorează.

Transformatoarele de tensiune se realizează pentru tensiuni nominale în primar începînd de la 1 kV, pînă la cele mai înalte tensiuni folosite în sistemele electroenergetice, cu puteri cuprinse între 25... 600 VA. Există transformatoare de măsurare de tensiune monofazate și trifazate.

*Eroarea transformatorului de tensiune* are valoarea admisibilă redată prin clasa sa de precizie și constă din *eroarea de tensiune* și *eroarea de unghi* (sau de fază). Pentru definirea și interpretarea acestor erori se folosesc ecuațiile transformatorului scrise în forma (9-36), din care, avînd în vedere că transformatorul de tensiune funcționează teoretic în gol ( $I_2=0$ ), rezultă :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}, \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M} = \frac{N_1}{N_2}, \quad (9-42)$$

unde s-a ținut seama și de relația (9-41). Deci, un transformator ideal de tensiune satisface simultan condițiile :  $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M} \right| = \frac{N_1}{N_2}$  și  $\arg \left\{ \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right\} = \arg \left\{ \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M} \right\} = 0$ . Dacă prima din aceste condiții nu este satisfăcută, apare eroarea de tensiune, iar dacă a doua condiție nu este satisfăcută, apare eroarea de unghi (fază).

Eroarea relativă de tensiune se poate exprima prin relația

$$\epsilon_t = \frac{U'_2 - U_2}{U_2} = \frac{U_2 \frac{N_1}{N_2} - U_1}{U_1}, \quad (9-43)$$

unde  $U_1$  este tensiunea (nominală) din primar,  $U'_2$  — tensiunea măsurată în secundar și  $U_2$  — tensiunea din secundar în lipsa erorii. De exemplu, la un transformator de tensiune din clasa 0,1, eroarea de tensiune nu trebuie să fie mai mare decît  $\pm 0,1\%$  și eroarea de unghi să fie mai mică decît  $5'$ .

*Unele condiții privind folosirea transformatoarelor de măsurare* sînt următoarele :

- una din bornele secundare se leagă la masă din motive de protecție a muncii, așa cum s-a precizat mai sus ;
- nu este permis ca transformatorul de curent să funcționeze în gol și cel de tensiune în scurtcircuit ; funcționarea în gol a transformatorului de curent conduce la supraîncălzirea acestuia datorită fluxului magnetic din miez care crește foarte mult ( $I_2=0$  și  $I_0=I_1$ ) ;
- la conectarea transformatoarelor de măsurat trebuie respectate indicațiile de la borne (între, ieșire, masă) ;
- consumul instrumentelor de măsurare legate în secundar nu trebuie să depășească puterea nominală a transformatorului, în caz contrar, clasa de precizie nu se păstrează ;
- transformatorul de tensiune trebuie să aibă elemente de protecție (siguranțe fuzibile) atît în primar, cît și în secundar. În schimb, transformatorul de curent nu trebuie să aibă astfel de elemente.

#### 9.4.4. MĂSURAREA TENSIUNILOR ELECTROMOTOARE

Tensiunea electromotoare  $U_e$  a unei surse de c.c. este mai mare decît tensiunea la borne  $U$  cu căderea de tensiune pe rezistența interioară  $R_i$  a sursei (fig. 9-29) :

$$U_e = U + R_i I. \quad (9-44)$$

Cu un voltmetru conectat la bornele sursei se măsoară deci, nu t.e.m., ci tensiunea la borne. Numai dacă  $I=0$ , adică sursa este în gol, atunci tensiunea măsurată la borne este egală cu t.e.m., cu condiția ca curentul prin voltmetru să fie neglijabil.

Dacă  $R_V$  este rezistența interioară a voltmetrului legat la bornele sursei (fig. 9-29), rezultă

$$U = U_e - R_i I = R_V I, \quad (9-45)$$

de unde se obțin :

$$I = \frac{U_e}{R_i + R_V}, \quad U_e = \frac{U}{1 - \frac{R_i}{R_i + R_V}}. \quad (9-46)$$

Se observă că, dacă  $R_i \ll R_V$ , eroarea comisă prin considerarea  $U = U_e$  este neglijabilă. Ca urmare, dacă voltmetrul folosit are o rezistență interioară foarte mare și dacă sursa este în gol, cu ajutorul voltmetrului legat la bornele sursei se măsoară practic t.e.m. a acesteia.

Măsurarea cu precizie a t.e.m. se face cu ajutorul compensatoarelor (v. paragraful 13.2).

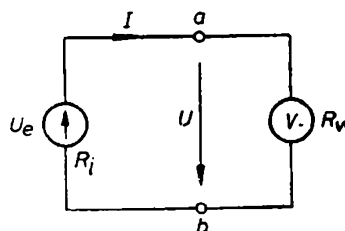


Fig. 9-29. Sursă de t.e.m.

## 9.5. MĂSURAREA CURENȚILOR ȘI TENSIUNILOR DE VALORI MICI CU GALVANOMETRE

Măsurarea curenților și a tensiunilor mici, de ordinul  $\mu A$ ,  $\mu V$  și mai mici, nu se poate realiza cu instrumentele de măsurare obișnuite, ale căror domenii de măsurare nu cuprind astfel de valori. În acest scop se folosesc instrumentele de tip galvanometric, de mare sensibilitate, precum și instrumentele electronice. Instrumentele electronice sînt prezentate la capitolul 11. Aici ne vom referi la unele aspecte esențiale ale măsurărilor cu ajutorul unor tipuri de galvanometre care au fost enumerate la paragraful 9.2.5.

Măsurarea curentului continuu cu galvanometrul cu oglindă și riglă gradată, de tip magnetoelectric (cu magnet permanent fix și bobină mobilă). Oglinda se rotește solidar cu bobina mobilă parcursă de curentul de măsurat. În fig. 9-30, a, b, c și d sînt reprezentate schematic elemente componente și funcționale ale galvanometrului.

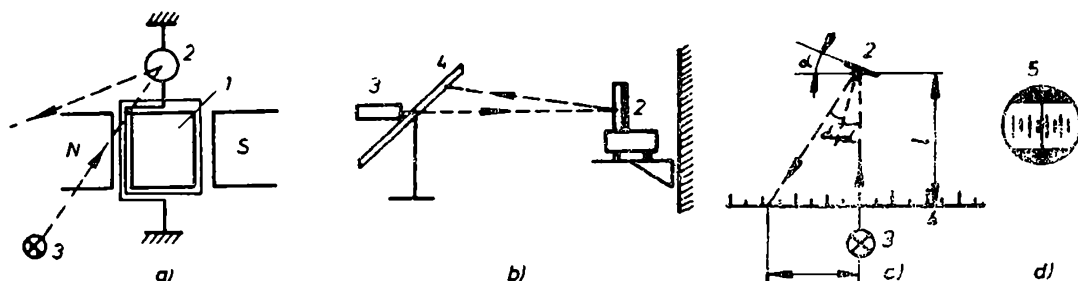


Fig. 9-30. Galvanometrul cu oglindă și riglă gradată :

a — sistemul mobil (1) și oglinda (2); b — așezarea sursei de lumină (3) și a riglei gradate (4); c — unghiul de deviație al spotului luminos; d — imaginea de citire de pe rigla gradată.

Se notează cu  $I_g$  valoarea curentului prin bobina mobilă  $I$  a galvanometrului. Conform celor explicate la aplicația 9-3, cuplul activ ce acționează asupra sistemului mobil este proporțional cu acest curent,  $C = k_a I_g$ . Astfel, ecuația mișcării (9-10) obține forma

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_A \frac{d\alpha}{dt} + k_r \alpha = k_a I_g. \quad (9-47)$$

Integrînd această ecuație se obține modul de variație în timp a unghiului de deviație a sistemului mobil (împreună cu oglinda 2),  $\alpha = f(t)$ , care depinde de valorile coeficienților din ecuație. Introducînd mărimea

$$\beta = \frac{k_A}{2\sqrt{Jk_r}}, \quad (9-48)$$

denumită *grad de amortizare*, se disting următoarele situații :

Cazul I :  $\beta > 1$ , mișcarea este aperiodică (curba I din fig. 9-31) ;

Cazul II :  $\beta = 1$ , mișcarea este aperiodică critică (curba II) ;

Cazul III :  $\beta < 1$ , mișcarea este oscilatorie amortizată (curba III).

În toate aceste cazuri, după un anumit timp de la apariția curentului  $I_g$ , sistemul mobil al galvanometrului se stabilește în poziția de echilibru corespunzătoare acestui curent, avînd deviația

$$\alpha_g = \frac{k_a}{k_r} I_g. \quad (9-49)$$

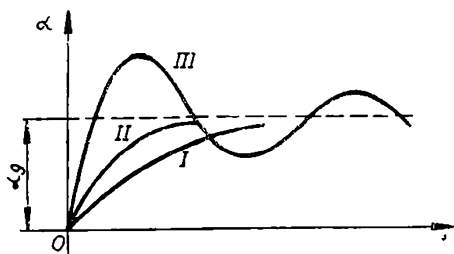


Fig. 9-31. Curbe de variație în timp a unghiului de deviație al galvanometrului.

Se urmărește ca galvanometrul să funcționeze în regim aperiodic critic, ceea ce se realizează prin adaptarea corespunzătoare a unei rezistențe exterioare (rezistența critică).

Sistemul de citire al galvanometrului este prevăzut cu o sursă de lumină (3) cu fantă și fir reticular, fixat pe suportul riglei gradate (4). Raza de lumină este reflectată de oglinda (2) pe rigla gradată, unde se vede o pată luminoasă avînd la mijloc o dungă fină întunecată (imaginea firului reticular, fig. 9-30, d), în dreptul căreia se citește diviziunea de pe riglă. Cu notațiile din fig. 9-30, c se obține :

$$\alpha_g = \frac{1}{2} \arctg \frac{d}{l} \cong \frac{1}{2} \frac{d}{l}, \quad (9-50)$$

unde s-a considerat  $a \ll l$  (obișnuit  $l = 1$  m).

Introducînd (9-49) în (9-50) se obține :

$$\frac{k_a}{k_r} I_g = \frac{d}{2l} \quad \text{sau} \quad I_g = \frac{k_r}{k_a 2l} d = K_I d, \quad (9-51)$$

în care  $K_I = k_r / k_a 2l$  [A/mm] este constanta de curent a galvanometrului, dependentă de distanța  $l$ .

Sensibilitatea galvanometrului, egală cu valoarea inversă a constantei  $K_I$  (v. relația 9-14), devine mai mare dacă distanța  $l > 1$  m.



Constanta și sensibilitatea galvanometrului, precum și regimul de oscilație se modifică dacă galvanometrul este prevăzut cu șunt, folosit la măsurarea curenților de valori ce depășesc curentul admisibil al galvanometrului.

**Măsurarea tensiunilor continue mici** cu ajutorul galvanometrului se realizează, în principiu, în același mod ca măsurarea curenților continui mici, cu deosebirea că, în serie cu galvanometrul, se leagă o rezistență exterioară.

**Măsurarea curenților și tensiunilor periodice de valori mici cu ajutorul galvanometrului.** În acest caz, sistemul mobil al galvanometrului are o mișcare oscilatorie neamortizată în jurul poziției de zero. Se urmărește ca frecvența oscilațiilor forțate  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  (frecvența curentului sau tensiunii de măsurat) să coincidă cu frecvența oscilațiilor proprii (libere) ale sistemului mobil  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_r}{J}}$ , când amplitudinea oscilațiilor devine maximă (condiția de rezonanță).

La galvanometrele obișnuite,  $f_0$  este de ordinul unităților și dacă  $f \geq 50$  Hz, rezultă că aceste galvanometre nu pot fi folosite pentru măsurarea curenților și tensiunilor periodice. Este necesar să se folosească galvanometre vibratoare cu momente de inerție  $J$  a sistemului mobil foarte mici (v. paragraful 11.3.2).

## 9.6. MĂSURAREA REZISTENȚELOR ELECTRICE

Problema măsurării rezistențelor electrice are o deosebită importanță în practică. Spre exemplu, foarte frecvent se cere să se măsoare rezistențe electrice ale rezistoarelor, bobinelor, rezistențe ale prizelor de pământ, rezistențe de izolație etc.

Măsurarea rezistențelor electrice poate fi realizată prin mai multe metode, respectiv folosind diferite instrumente de măsurare. Se deosebesc: metode industriale și metode de laborator, metode de măsurare a rezistențelor foarte mici și mici, a rezistențelor mari (între  $1 \Omega$  și  $1 M\Omega$ ) și a rezistențelor foarte mari ( $> 1 M\Omega$ ).

În continuare se prezintă câteva din metodele și instrumentele uzuale de măsurare a rezistențelor electrice.

### 9.6.1. METODA VOLT-AMPERMETRICĂ

Dacă se cunoaște tensiunea  $U_x$  de la bornele unui rezistor ideal și curentul  $I_x$  prin rezistor, valoarea rezistenței rezistorului rezultă din legea lui Ohm:

$$R_x = \frac{U_x}{I_x}. \quad (9.52).$$

Se vede că măsurarea rezistenței prin metoda volt-ampermetrică se face indirect, adică se măsoară tensiunea și curentul și din valorile obținute se calculează rezistența.

În schema de măsurare, voltmetrul poate fi legat înainte sau după ampermetru, rezultând două montaje de măsurare a rezistențelor prin această metodă.

**Montajul amonte**, reprezentat în fig. 9-32, are voltmetrul legat înaintea ampermetrului. Deci, voltmetrul măsoară tensiunea  $U$  egală cu suma dintre căderea de tensiune pe rezistența  $R_x$  și căderea de tensiune pe rezistența interioară  $R_A$  a ampermetrului. În această situație, rezistența  $R_x$  se calculează în modul următor :

$$R_x + R_A = \frac{U}{I_x}, \text{ sau } R_x = \frac{U}{I_x} - R_A. \quad (9-53)$$

Dacă rezistența interioară a ampermetrului poate fi neglijată față de rezistența de măsurat ( $R_A \ll R_x$ ), atunci :

$$R'_x \cong \frac{U}{I_x}. \quad (9-54)$$

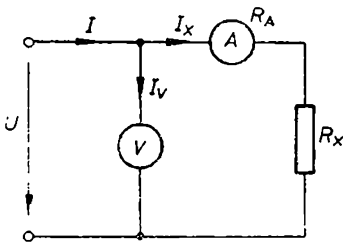


Fig. 9-32. Montajul amonte.

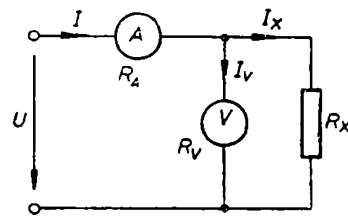


Fig. 9-33. Montajul aval.

Eroarea sistematică (de metodă) care se introduce prin folosirea relației aproximative (9-54) este :

$$\Delta R = R'_x - R_x = R_A, \quad \Delta_r \% = \frac{\Delta R}{R_x} 100 = \frac{R_A}{R_x} 100. \quad (9-55)$$

Această eroare este cu atât mai mică, cu cât  $R_A$  este de valoare mai mică față de  $R_x$ . De aceea, montajul amonte este indicat a fi folosit pentru măsurarea rezistențelor de valoare mare, față de care rezistența interioară a ampermetrului este neglijabilă.

**Montajul aval**, reprezentat în fig. 9-33, are voltmetrul legat în urma ampermetrului, ceea ce înseamnă că ampermetrul măsoară curentul  $I = I_x + I_v$ , unde  $I_v$  este curentul prin voltmetru.

Valoarea rezistenței măsurate se calculează din relația evidentă :

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U_x}{I - I_v}, \text{ sau } R_x = \frac{\frac{U_x}{I}}{1 - \frac{I_v}{I}}. \quad (9-56)$$

Eroarea care se comite calculînd pe  $R_x$  cu relația aproximativă

$$R'_x \cong \frac{U_x}{I} = \frac{R_x R_v}{R_x + R_v} \quad (9-57)$$

este :

$$\Delta R = R'_x - R_x = \frac{R_x R_v}{R_x + R_v} - R_x = - \frac{R_x^2}{R_x + R_v},$$

$$\Delta_r \% = \frac{\Delta R}{R_x} 100 = - \frac{R_x}{R_x + R_v} 100 = - \frac{1}{1 + \frac{R_v}{R_x}} 100 \quad (9-58)$$

Această eroare este cu atât mai mică cu cât curentul  $I_v$  este mai mic față de curentul  $I$ , adică cu cât rezistența interioară  $R_v$  a voltmetrului este mai mare în comparație cu rezistența  $R_x$  ce se măsoară. De aceea, montajul amonte este indicat să se folosească pentru măsurarea rezistențelor mici.

De fapt, dacă se cunosc rezistențele interioare ale instrumentelor  $R_A$  și  $R_v$ , poate fi folosit atât montajul amonte, cât și montajul aval pentru măsurarea rezistențelor mari sau mici deoarece, în această situație, este posibil să se elimine erorile despre care s-a vorbit mai sus. În practică însă, nu întotdeauna se cunosc rezistențele interioare ale instrumentelor de măsurare și, ca urmare, se va folosi montajul amonte pentru măsurarea rezistențelor mari și montajul aval pentru măsurarea rezistențelor mici. Aprecierea inițială asupra valorii mari sau mici a rezistenței este oarecum relativă.

**Aplicația 10-8.** Pentru măsurarea unei rezistențe  $R$  se folosește metoda volt-amperr metrică. Instrumentele de măsurare folosite fiind de clasă de precizie 0,2, să se determine expresia de calcul a erorii totale de măsurare pentru montajul amonte și pentru montajul aval.

*Rezolvare.* Eroarea relativă de metodă este :

$$\Delta_r = \frac{R_A}{R} \text{ — pentru montajul amonte,}$$

$$\Delta_r = - \frac{R}{R_v + R} \text{ — pentru montajul aval,}$$

unde  $R_A$  și  $R_v$  sînt rezistențele proprii ale ampermetrului și voltmetrului. La aceste erori se adaugă și erorile instrumentelor, care sînt  $\pm 0,2\%$ , adică

$$\Delta_U = \frac{\Delta U}{U} = \pm 0,002 : \Delta_I = \frac{\Delta I}{I} = \pm 0,002.$$

Deci, eroarea relativă totală este :

— pentru montajul amonte :

$$\Delta_{r,t} = \Delta_r + \Delta_U + \Delta_I = \frac{R_A}{R} \pm 0,002 \pm 0,002 :$$

— pentru montajul aval :

$$\Delta_{r,t} = \Delta_r + \Delta_U + \Delta_I = - \frac{R}{R_v + R} \pm 0,002 \pm 0,002.$$

Aceste relații de însumare a erorilor se pot justifica pe cale analitică.

## 9.6.2. METODA PUNȚII INDUSTRIALE (WHEATSTONE)

Puntea industrială, cunoscută și sub denumirea de punte Wheatstone, este folosită pentru măsurarea rezistențelor electrice cuprinse între circa  $1\ \Omega$  și  $10\ 000\ \Omega$ . Schema acestei punți este reprezentată în fig. 9-34.

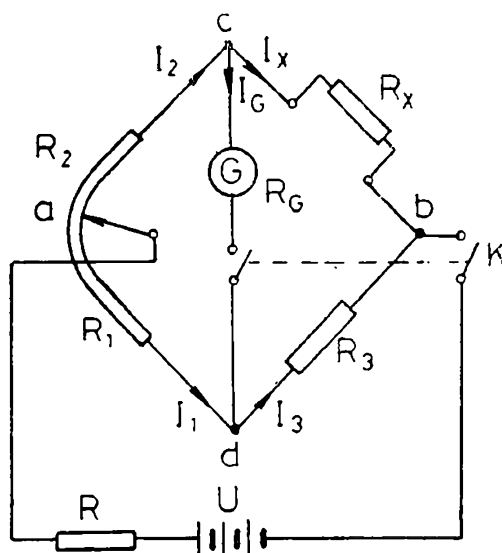


Fig. 9-34. Schema punții industriale (Wheatstone).

Raportul  $\frac{R_2}{R_1}$  poate fi modificat de la circa 4, la 60, iar rezistența variabilă  $R_3$  poate primi valorile: 0,1; 1; 10; 100; 1 000  $\Omega$ . Sursa de curent continuu legată în diagonală  $a-b$  a punții constă, de obicei, dintr-o baterie cu tensiunea  $U = 4,5\text{ V}$  montată în cutia punții. Rezistența  $R$  legată în serie cu sursa are rolul de a limita curentul prin brațele punții.

Pentru măsurarea rezistenței  $R_x$ , puntea se aduce la echilibru prin modificarea raportului  $\frac{R_2}{R_1}$  și a rezistenței  $R_3$ . În această situație, apăsând pe butonul  $K$ , galvanometrul  $G$  indică valoarea zero, adică curentul prin diagonală  $c-d$  este nul,  $I_G = 0$ . Aceasta înseamnă că se pot scrie relațiile:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2, \quad I_3 R_3 = I_x R_x;$$

$$I_1 = I_3, \quad I_2 = I_x.$$

Din aceste relații se obține valoarea rezistenței ce se măsoară:

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3. \quad (9-59)$$

Eroarea cu care se măsoară rezistențele cu ajutorul punții industriale (simple) este de circa 0,5%. Această eroare depinde, pe de o parte, de sensibilitatea punții și, pe de altă parte, de precizia cu care sînt cunoscute rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$  din brațele punții.

**Sensibilitatea punții** se referă la posibilitatea pe care o oferă galvanometrul său de a sesiza exact condiția  $I_G = 0$ . Galvanometrul are un prag de sensibilitate  $\Delta I_{Gmin}$ , adică el nu indică curenți cu valorile  $I_G < \Delta I_{Gmin}$ . Aceasta înseamnă că relația (9-59) nu este îndeplinită cu exactitate, ceea ce constituie o sursă de erori. Cu alte cuvinte, puntea nu sesizează variații ale rezistenței  $R_x$  mai mici decît  $\Delta R_{xmin}$ , corespunzătoare lui  $\Delta I_{Gmin}$ , eroarea relativă de sensibilitate fiind  $\delta = \Delta R_{xmin} / R_x$ . Evitarea acestei surse de erori se poate realiza prin alegerea unui galvanometru foarte sensibil (mai pretențios în manipulare) sau prin majorarea tensiunii sursei de alimentare.

**Aplicația 9-9.** Să se exprime legătura dintre sensibilitatea  $S$  a punții industriale și sensibilitatea  $S_G$  a galvanometrului său, respectiv parametrii celorlalte elemente din schemă.

**Rezolvare.** Sensibilitatea punții este dată de relația:

$$S = \frac{d\alpha}{dR_x} = \frac{1}{K_G} \frac{dI_G}{dR_x} = S_G \frac{dI_G}{dR_x},$$

unde  $\alpha$  este derivația galvanometrului,  $K_G$  este constanta și  $S_G = \frac{1}{K_G}$  este sensibilitatea galvanometrului.

Curentul  $I_G$  prin latura punții ce conține galvanometrul se determină în funcție de parametrii elementelor din schemă folosind una din metodele cunoscute de calcul a rețelilor de c.c. (de exemplu, metoda teoremelor lui Kirchhoff). Se obține:

$$I_G = \frac{U [R_1 R_x - R_2 R_3]}{R_G (R_1 + R_3) (R_2 + R_x) + R_1 R_3 (R_2 + R_x) + R_2 R_x (R_1 + R_3)}$$

din care se calculează  $\frac{dI_G}{dR_x}$  și se înlocuiește în expresia de mai sus a sensibilității punții. Rezultă:

$$S = S_G U \frac{R_x}{R_G (R_1 + R_3) (R_2 + R_x) + R_1 R_3 (R_2 + R_x) + R_2 R_x (R_1 + R_3)}$$

de unde se observă că sensibilitatea punții este direct proporțională cu sensibilitatea galvanometrului, cu tensiunea sursei și depinde atât de valoarea rezistenței de măsurat, cât și de rezistențele cunoscute, introduse în laturile punții.

Ca urmare, pentru a obține o sensibilitate maximă a punții, trebuie făcută o alegere corespunzătoare a rezistențelor  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$ , în funcție de valoarea apreciată anticipat a rezistenței de măsurat  $R_x$ .

### 9.6.3. MĂSURAREA REZISTENȚELOR MICI CU PUNTEA DUBLĂ (THOMSON)

Domeniul de măsurare a punții simple (Wheatstone) nu poate fi coborît sub  $1 \Omega$  din cauza rezistențelor parazite (de contact) din brațele punții, care nu mai pot fi neglijate față de rezistența de măsurat. Măsurarea rezistențelor mici se face cu puntea (Thomson) a cărei schemă este reprezentată în fig. 9-35.

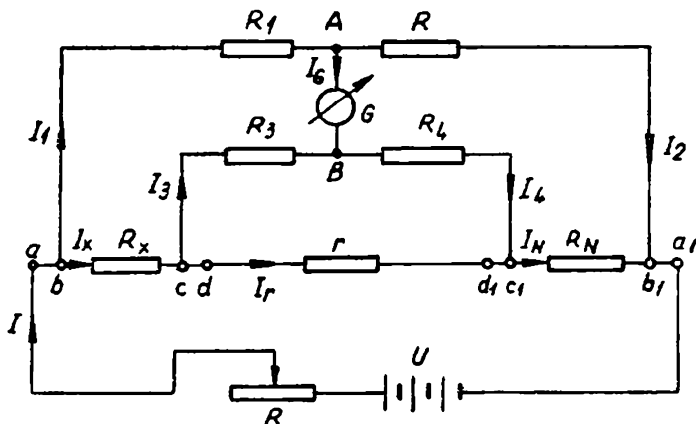


Fig. 9-35. Schema punții duble (Thomson).

Rezistența de măsurat este  $R_x$ , iar  $R_N$  este rezistența etalon. Rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  și  $R$  sînt reglabile, iar  $r$  este o rezistență foarte mică, realizată dintr-o bară de cupru. Bornele  $a$ ,  $d$ ,  $a_1$ ,  $d_1$  sînt de curent, iar bornele  $b$ ,  $c$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  sînt de tensiune.

Rezistențele parazite introduse de contactele de la bornele de tensiune se adaugă la rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  și respectiv  $R_4$ , în raport cu care sînt negli-

jabile. Rezistențele parazite de la contactele  $a$ ,  $a_1$  se exclud fiind în exteriorul punții, iar cele de la contactele  $d$ ,  $d_1$  se neglijează.

În starea de echilibru a punții se obțin:  $I_G=0$ ,  $I_1=I_2$ ,  $I_3=I_4$ ,  $I_N=I_x$ ,  $I_r=I_x-I_3$ . Aplicînd, în această stare de echilibru, teorema a II-a a lui Kirchhoff, rezultă ecuațiile:

$$I_1 R_1 = I_x R_x + I_3 R_3, \quad I_3 R_3 = I_3 R_4 + I_x R_N, \quad I_3 (R_3 + R_4) = (I_x - I_3) r,$$

din care se obține:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_N + \frac{R_4 r}{R_3 + R_4 + r} \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} \right). \quad (9-60)$$

Ultimul termen din relația (9-60) se numește corecție și se notează cu

$$C = \frac{R_4 r}{R_3 + R_4 + r} \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} \right). \quad (9-61)$$

Deci

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_N + C, \quad (9-62)$$

de unde se vede că, dacă  $C=0$ , relația de calcul a rezistenței  $R_x$  este aceeași ca la puntea simplă.

Corecția  $C$  este neglijabilă dacă  $r=0$  sau dacă  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ . Cum ultima condiție este mai greu de îndeplinit, se impune ca rezistența  $r$  să fie foarte mică, ceea ce s-a precizat mai sus.

Schema punții duble reprezentată în fig. 9-35 poate fi redusă la schema punții simple dacă triunghiul  $cBc_1$  se transfigurează în stea.

#### 9.6.4. MĂSURAREA REZISTENȚELOR CU AJUTORUL OHMMETRELOR

Ohmmetrul este instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară direct valoarea rezistenței electrice, cu o precizie care nu depășește 1%. Există diferite tipuri de ohmmetre și anume: ohmmetre serie, derivație, în punte, logometrice etc.

**Ohmmetrul serie**, cu baterie, are schema reprezentată în fig. 9-36. Sursa de curent continuu folosită este, de obicei, o baterie de buzunar de 4,5 V, așezată în cutia aparatului. Se poate folosi și o sursă exterioară. Măsurarea se face cu ajutorul unui instrument magnetoelectric a cărui scală se etalonează direct în ohmi, cuprinzînd intervalul de la  $R_x=0$  pînă la  $R_x=\infty$ . De fapt, instrumentul acestui tip de ohmmetru funcționează ca miliampermetru care măsoară curentul din circuit și a cărui valoare depinde de rezistența  $R_x$ .

Cînd  $R_x=0$ , curentul prin instrumentul de măsurare este maxim admisibil

$$I_{max} = \frac{U_e}{R_p + R_A + R_i}, \quad (9-63)$$

respectiv deviația acului indicator este maximă (notată cu zero pe scala gradată în ohmi).

Cînd  $R_x=\infty$ , acul indicator al instrumentului rămîne nedeiat ( $I=0$ ).

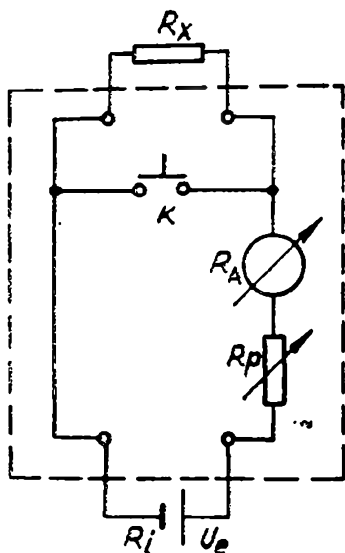


Fig. 9-36. Ohmmetrul serie.

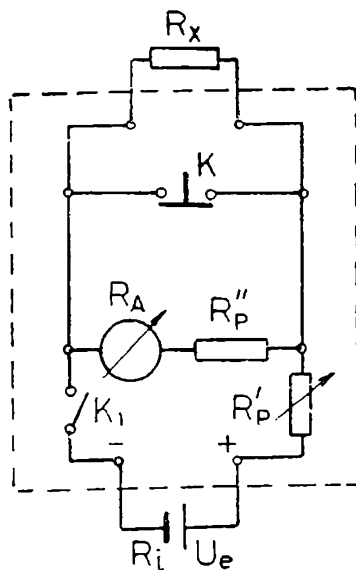


Fig. 9-37. Ohmmetrul derivație.

Se observă că gradarea scalei este inversată. Pentru  $0 < R_x < \infty$ , acul indicator ocupă toate pozițiile în lungul scalei.

Indicația acestui tip de ohmmetru depinde de tensiunea sursei folosite. Pentru măsurarea rezistențelor electrice cu o eroare cât mai mică, este necesar ca tensiunea sursei să rămână riguros constantă. În anumite limite de variație a acestei tensiuni, corectarea poate fi făcută modificând rezistența variabilă  $R_p$ . Se închide butonul de control  $K$  și se modifică  $R_p$  pînă cînd acul indicator ajunge în dreptul diviziunii zero (curent maxim).

**Ohmmetrul derivație**, cu baterie, are schema reprezentată în fig. 9-37. Scala instrumentului de măsurare este gradată în sensul normal.

Cînd  $R_x = 0$ , curentul prin instrument este nul (butonul de control  $K$  închis).

Cînd  $R_x = \infty$  ( $K$  — deschis), curentul prin instrument este maxim admisibil :

$$I_{max} = \frac{U_e}{R_p' + R_p'' + R_A + R_i}, \quad (9-64)$$

respectiv acul indicator trebuie să ajungă în dreptul diviziunii marcată pe scală cu roșu. Modificînd  $R_p'$  se corectează această poziție.

Măsurarea rezistenței  $0 < R_x < \infty$  se face cu butonul de control  $K$  deschis. Raportul între curentul prin rezistența de măsurat  $R_x$  și prin instrumentul de măsurare este invers cu raportul rezistențelor  $R_x$  și  $R_A + R_p''$  legate în paralel.

Înteruptorul  $K_1$  are rolul de a deconecta sursa atunci cînd nu se efectuează măsurări, cu scopul de a evita descărcarea ei.

La unele tipuri de ohmmetre (serie și paralel) corectarea modificării tensiunii de alimentare se face cu șunturi magnetice, prevăzute în construcția instrumentului de măsurare.

**Ohmmetrul logometric** prezintă avantajul că indicația sa este independentă de tensiune. La un logometru de tip magnetoelectric, sistemul mobil constă din două bobine fixate pe același ax și decalate una față de alta cu  $90^\circ$ . Echipamentul mobil se mișcă între polii unui magnet permanent (fig. 9-38, a). Rezistența necunoscută  $R_x$  se leagă în serie cu bobina 2, iar în serie cu bobina 1 se leagă o rezistență  $R_a$  de valoare mare.

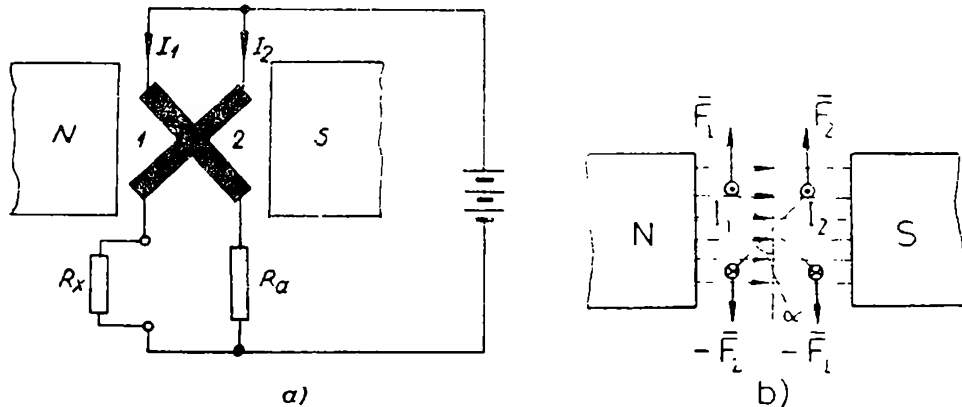


Fig. 9-38. Schema ohmmetrului logometric :  
a — conectarea bobinelor; b — cuplurile.

Notînd cu  $R_1$  și  $R_2$  rezistențele celor două bobine, rezultă curenții prin bobine :

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_a} = kU, \quad I_2 = \frac{U}{R_2 + R_x} \cong \frac{U}{R_x}, \quad (9-65)$$

unde  $k = \frac{1}{R_1 + R_a}$  este o constantă, iar  $R_2$  s-a considerat neglijabil față de  $R_x$ . Sub acțiunea cîmpului magnetic, cele două bobine, parcurse de curenții  $I_1$  și  $I_2$ , sînt supuse fiecare cîte unui cuplu pentru care, pe baza fig. 9-38, b și conform celor explicate la aplicația 9-6, se stabilesc relațiile :

$$C_1 = k_1 I_1 \cos \alpha, \quad C_2 = k_2 I_2 \sin \alpha, \quad (9-66)$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre verticală și normala la suprafața spirelor bobinei 1.

Introducînd (9-65) în (9-66), rezultă :

$$C_1 = k_1 k U \cos \alpha, \quad C_2 = k_2 \frac{U}{R_x} \sin \alpha. \quad (9-67)$$

Cuplurile  $C_1$  și  $C_2$  acționează în sensuri opuse, instrumentele logometrice neavînd cuplu rezistent. Deviația acului indicator se va stabili la valoarea pentru care  $C_1 = C_2$ , adică

$$k_1 k U \cos \alpha = k_2 \frac{U}{R_x} \sin \alpha,$$

de unde se deduce :

$$R_x = \frac{k_2}{k_1 k} \operatorname{tg} \alpha \quad (9-68)$$



Deci, unghiul de deviație  $\alpha$  este independent de tensiunea  $U$  a sursei, fiind funcție numai de rezistența  $R_x$ :

$$\alpha = f(R_x). \quad (9-69)$$

Prin urmare, scala instrumentului poate fi etalonată direct în ohmi, cu precizarea că este neuniformă.

Faptul că la instrumentele logometrice nu se pretinde o tensiune de alimentare riguros constantă, permite folosirea ca sursă a unui generator de curent continuu (magnetou) montat în cutia aparatului și prevăzut cu manivelă pentru a fi pus manual în mișcare de rotație. În timpul măsurării, manivela se rotește cu aproximativ 2 rotații pe secundă.

### 9.6.5. REZISTENȚELE DE IZOLAȚIE ȘI MĂSURAREA LOR

Materialele izolante au o conductivitate electrică practic neglijabilă (de ordin inferior lui  $10^{-8} \Omega^{-1}m^{-1}$ ), fiind întrebuințate pentru a realiza izolația electrică a mașinilor, aparatelor și instalațiilor electrice. Afară de această funcțiune, materialele izolante mai pot îndeplini și funcțiuni secundare ca: evacuarea căldurii, protecția contra umidității și agenților chimici, protecția contra deteriorărilor mecanice, preluarea de sarcini mecanice etc.

Alegerea materialului izolant corespunzător unor condiții de utilizare date se face pe baza caracteristicilor sale:

- electrice: conductivitate, pierderi dielectrice, ridigitate dielectrică și permitivitate;
- termice: conductibilitate termică, căldura specifică, coeficientul de dilatație, punctul de inflamabilitate, rezistența la îngheț etc.;
- mecanice: rezistența la solicitări mecanice, duritatea, fragilitatea etc.;
- fizice: higroscopicitate, porozitate, densitate etc.;
- chimice: toxicitate, solubilitate, rezistența la coroziuni chimice etc.

Problema izolației electrice în construcția de mașini și în instalații este deosebit de importantă pentru asigurarea funcționării în condițiuni normale a acestora. O izolație necorespunzătoare poate să conducă la scurtcircuite, la accidente grave de muncă etc.

Rezistența de izolație este influențată de anumiți factori ca: temperatura, umiditatea, tensiunea etc. În timp, rezistența de izolație scade, mai ales atunci cînd nu se respectă condițiile normale de întreținere și exploatare.

Controlul rezistențelor de izolație constă în măsurarea valorilor acestor rezistențe, care trebuie să se încadreze în normele existente în acest sens. De exemplu, rezistența de izolație a unei instalații electrice, măsurată în ohmi, trebuie să fie mai mare decît  $10^3 U$ ,  $U$  fiind tensiunea de lucru, în volți.

Întrucît rezistența electrică de izolație depinde de foarte mulți factori, măsurarea ei nu poate fi făcută cu exactitate. Din acest motiv, trebuie precizate întotdeauna condițiile în care s-a efectuat o astfel de măsurare.

Există mai multe metode de măsurare a rezistențelor de izolație, dintre care unele se prezintă în cele ce urmează.

**Măsurarea directă.** Deoarece rezistențele de izolație au valori ce depășesc  $10^6 \Omega$ , instrumentul folosit pentru măsurarea lor directă este etalonat în megohmi ( $M\Omega$ ) și se numește *megohmmetru*. Există mai multe tipuri de megohmmetre, dintre care cel mai frecvent utilizat este cel logometric, avînd ca

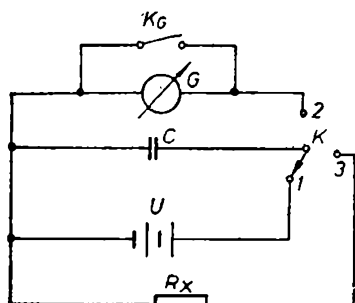


Fig. 9-39. Schema de măsurarea rezistenței de izolație cu galvanometrul.

Din relațiile

$$i = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{du_c}{dt}, \quad i = \frac{u_c}{R_x}$$

se obțin :

$$dt = -R_x C \frac{du_c}{u_c}, \quad t_1 = \int_0^{t_1} dt = R_x C \ln \frac{u_{c0}}{u_{c1}}.$$

$$R_x = \frac{t_1}{C \ln \frac{u_{c0}}{u_{c1}}}, \quad (9-70)$$

unde s-a ținut seama că la  $t=0$ ,  $u_c = u_{c0}$  și la  $t_1$ ,  $u_c = u_{c1}$ .

Măsurarea practică se efectuează astfel : se pune comutatorul  $K$  în poziția 1 și condensatorul se încarcă la tensiunea  $u_{c0} = U$ ; apoi comutatorul  $K$  se trece pe poziția 2 și condensatorul se descarcă pe galvanometru, unde se citește deviația  $\alpha_0$ ; se încarcă din nou condensatorul de la sursa cu tensiunea  $U$  și, punind  $K$  pe poziția 3, se descarcă un timp scurt,  $t_1$ , pe rezistența  $R_x$  după care, trecînd repede  $K$  din poziția 3 în poziția 2, condensatorul, cu tensiunea devenită  $u_{c1}$ , se descarcă pe galvanometru, la care se citește deviația  $\alpha_1$ . Considerînd că deviațiile  $\alpha_0$  și  $\alpha_1$  ale galvanometrului sînt proporționale cu tensiunile  $u_{c0}$  și  $u_{c1}$ , din (9-70) se obține :

$$R_x = \frac{t_1}{C \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_1}}. \quad (9-71)$$

**Măsurarea rezistențelor de izolație la liniile sub tensiune.** Controlul calitativ al izolației față de pămînt a conductoarelor unei linii de transport poate fi făcut și fără a scoate linia respectivă de sub tensiune. Astfel, în curent continuu sau în curent alternativ monofazat, controlul izolației față de pămînt a celor două conductoare ale liniei aflate sub tensiune se face cu ajutorul a două voltmetre, legate așa cum este arătat în fig. 9-40, *a*. Dacă izolația față de pămînt este în stare bună, avînd aceeași valoare pentru ambele conductoare, voltmetrele  $V_1$  și  $V_2$  indică aceeași tensiune, egală cu jumătate de tensiunea liniei. Cînd rezistența de izolație a unuia din conductoarele liniei scade, odată cu ea scade și tensiunea indicată de voltmetrul respectiv, în timp ce tensiunea indicată de celălalt voltmetru crește.

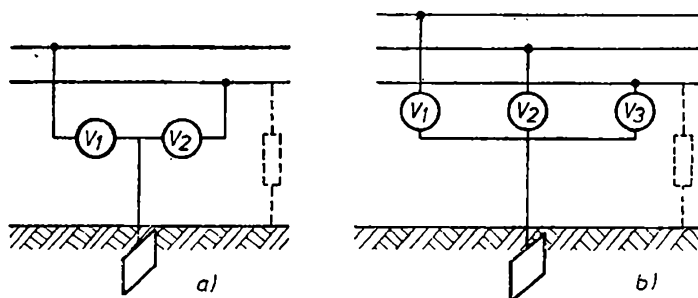


Fig. 9-40. Controlul rezistenței de izolație la linii sub tensiune cu voltmetre:

a — linie de c.c.; b — linie trifazată.

În cazul unei linii trifazate, voltmetrele pentru controlul izolației conductoarelor liniei față de pământ se leagă ca în fig. 9-40, b. Dacă izolația celor trei conductoare este perfectă, tensiunile măsurate de cele trei voltmetre sînt egale. Cînd izolația unui conductor se micșorează, voltmetrul corespunzător indică o tensiune mai mică, în timp ce la celelalte două crește tensiunea măsurată.

Trebuie reținut că voltmetrele folosite în aceste scopuri trebuie să aibă aceeași rezistență interioară.

La liniile de curent alternativ de înaltă tensiune, voltmetrele pentru controlul izolației se leagă la linie prin intermediul transformatoarelor de tensiune.

**Aplicația 9-10.** Folosind un voltmetru cu domeniul de 250 V și rezistența interioară de 1 000  $\Omega/V$ , s-au măsurat la o linie de curent continuu următoarele:

- tensiunea între cele două conductoare,  $U=218$  V;
- tensiunea între conductorul „+” și pământ,  $U_p=188$  V;
- tensiunea între conductorul „-” și pământ,  $U_n=10$  V.

Să se calculeze rezistența de izolație dintre fiecare conductor și pământ.

**Rezolvare.** În fig. 9-41 sînt reprezentate cele 3 rezistențe de izolație. Cînd voltmetrul este legat între „-” și pământ, avem:

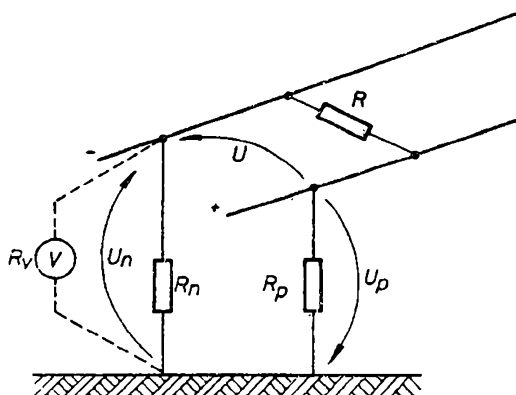


Fig. 9-41. Rezistențele de izolație la linia de c.c.

$$U_n = I_v R_v = I \frac{R_n R_v}{R_n + R_v}, \quad U = I R_p + I \frac{R_n R_v}{R_n + R_v},$$

unde  $I_v$  este curentul prin voltmetru, iar  $I$  este curentul total de scurgere prin izolație. Din aceste relații se obține:

$$\frac{U_n}{R_v} = \frac{U R_n}{R_v (R_p + R_n) + R_p R_n}.$$

În mod analog, dacă voltmetrul este legat între conductorul „+” și pământ, rezultă:

$$\frac{U_p}{R_v} = \frac{U R_p}{R_v (R_p + R_n) + R_p R_n}.$$

Din aceste ultime două relații se obțin :

$$R_n = \frac{U - U_p - U_n}{U_p} R_v = 26\,600 \, \Omega,$$

$$R_p = \frac{U - U_p - U_n}{U_n} R_v = 500\,000 \, \Omega,$$

unde s-a introdus  $R_v = 250 \cdot 10^3 \, \Omega$ .

### 9.6.6. PRIZELE DE PĂMÎNT

Priza de pământ este un dispozitiv prin intermediul căruia se realizează o legătură electrică conductoare directă cu pământul a carcaselor metalice ale mașinilor și aparatelor electrice, a grilajelor și cutiilor metalice de protecție, a unor puncte (noduri) ale rețelelor și circuitelor electrice etc., cu scopul de a se evita pericolul electrocutării personalului care lucrează cu aceste mașini și instalații.

Legătura la pământ a unor puncte din rețelele sau circuitele electrice se face cu scopul de a se realiza o anumită circulație a curenților. De exemplu, în anumite situații, punctul de nul al transformatoarelor trifazate se leagă la pământ. De asemenea, prizele de pământ sînt folosite și în instalațiile de protecție împotriva supratensiunilor atmosferice cum sînt : paratrăsnetele (folosite la depozite, magazine, clădiri înalte etc.), conductoarele de protecție ale liniilor electrice de înaltă tensiune etc.

O priză de pământ se realizează, în general, dintr-unul sau mai multe corpuri conductoare așezate în sol și legate electric prin conductoare de mică rezistență cu instalația ce trebuie pusă la pământ. În acest scop, se întrebuintează țevi din oțel, zincate, plumbuite sau arămite, cu diametrul de 25... 50 mm și lungimea de 3 m, îngropate în pământ la o adîncime de aproximativ 2 m. De asemenea, se întrebuintează tablă din oțel zincată sau plumbuită, respectiv tablă din cupru, avînd minimum 0,5 mp suprafață și 3 mm grosime, îngropată în pământ în poziție verticală. Uneori sînt folosite ca prize de pământ conductele instalațiilor de apă sau gaz. Îmbinările se realizează prin lipire sau nituire cu scopul de a se obține un contact electric cît mai bun.

Pentru realizarea punerii la pământ în ateliere, săli de mașini etc., trebuie neapărat consultate și respectate normele existente în acest sens.

Rezistența prizei de pământ, prin care se înțelege rezistența electrică de trecere de la priză la pământ, trebuie să aibă o valoare cît mai mică, astfel încît căderea de tensiune pe această rezistență să fie sub limita periculoasă pentru electrocutare. Rezistența electrică a prizei depinde atît de elementele sale constructive, cît și de conductibilitatea electrică a solului, adică de umiditate, de sărurile existente în sol, de temperatură etc. Ca urmare, rezistența prizelor de pământ se modifică în timp, ceea ce necesită executarea unor măsurări periodice de control.

Pentru a se înțelege mai bine rolul prizelor de pământ în cadrul atelierelor, laboratoarelor etc., ne referim la o instalație prevăzută cu un motor electric (fig. 9-42). Dacă carcasa metalică a motorului nu ar fi legată la pământ și, prin deteriorarea izolației ar ajunge în contact metalic direct cu bobinajul aflat la potențialul  $U$  față de pământ, atunci și carcasa obține același potențial față de pământ. În această situație, dacă un muncitor, așezat cu picioa-

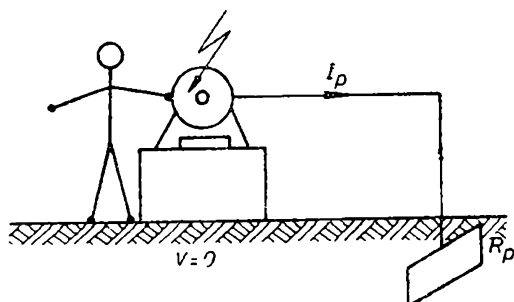


Fig. 9-42. Schiță explicativă asupra rolului prizei de pământ.

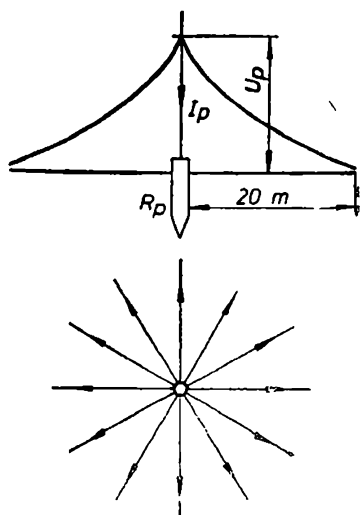


Fig. 9-43. Potențialul electric și dispersia curentului în pământ, în jurul prizei de pământ.

rele direct pe pământ, atinge cu mâna, sau cu altă parte a corpului, carcasa metalică, va fi supus unei diferențe de potențial egală cu  $U$ , care poate fi periculoasă. În schimb, dacă carcasa metalică este legată la pământ, potențialul pe care îl are față de pământ se micșorează, obținînd valoarea :

$$U_p = R_p I_p, \quad (9-72)$$

unde  $I_p$  este curentul de scurgere la pământ prin rezistența  $R_p$  a prizei. Acest curent, în unele cazuri, produce deconectarea motorului de la rețea prin topirea siguranței fuzibile sau prin deschiderea întreruptorului automat.

Este evident că, cu cît rezistența  $R_p$  a prizei este mai mică, cu atît tensiunea  $U_p$  este mai mică. Se impune prin norme ca :  $R_p < 4 \, \Omega$ ,  $U_p < 65 \, \text{V}$ .

În fig. 9-43 este arătată variația potențialului pământului din jurul prizei de pământ, precum și liniile curentului electric de scurgere în pământ prin priză. Dacă, în dreptul prizei, pământul are potențialul  $U_p$ , același cu potențialul carcasei metalice aflate sub tensiune, la o distanță de aproximativ 20 m de priză devine practic egal cu zero (potențialul convențional al pământului), datorită faptului că la această distanță densitatea curentului dispersat în pământ este neglijabilă.

Avînd în vedere variația potențialului pământului în jurul prizei, este evident că pericolul de electrocutare este maxim dacă muncitorul atinge cu mâna un corp metalic aflat sub tensiune și situat la o distanță mai mare de 20 m de priză. Aceasta pentru că picioarele muncitorului se găsesc într-un loc de potențial zero (al pământului), iar mâna pe corpul metalic cu potențialul  $U_p$ . Obişnuit, prizele de pământ sînt îngropate de distanțe mai mari decît 20 m față de corpurile metalice pe care le protejează.

În jurul stîlpilor metalici ai liniilor de înaltă și foarte înaltă tensiune, potențialul pământului are aceeași variație cu cea reprezentată în fig. 9-43. Aici

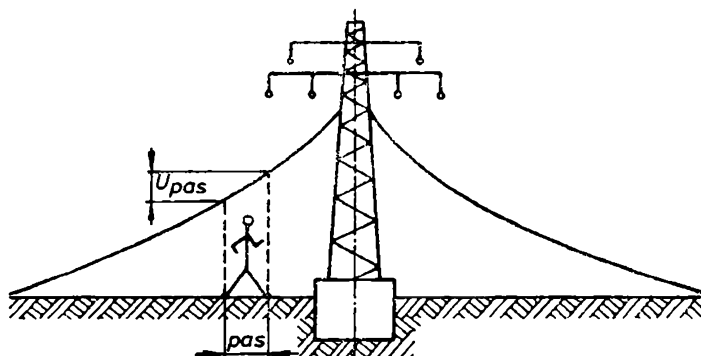


Fig. 9-44. Variația potențialului electric al pământului în jurul unui stîlp de înaltă tensiune.

poate deveni periculoasă și așa-numita tensiune de pas,  $U_{pas}$  (fig. 9-44). Pentru evitarea pericolului tensiunii de pas, apropierea de stîlp trebuie făcută pe un drum în formă de spirală.

Pericolul de moarte prin electrocutare depinde de următorii factori :

- intensitatea și traseul de trecere a curentului electric prin corpul omenească ;
- frecvența curentului și durata trecerii sale prin corp ;
- rezistența electrică a corpului.

Corpul omului are o rezistență electrică cuprinsă între  $500 \Omega$  și  $5000 \Omega$ , fiind datorată în principal pielii. Pielea umedă prezintă o rezistență electrică mult mai mică decât cea uscată.

S-a stabilit că nu este periculoasă o intensitate a curentului electric mai mică decât  $25 \text{ mA}$  în c.a. și mai mică decât  $50 \text{ mA}$  în c.c. Frecvența cea mai periculoasă este cuprinsă între  $40-60 \text{ Hz}$ .

### 9.6.7. MĂSURAREA REZISTENȚEI ELECTRICE A PRIZELOR DE PĂMÎNT

Există mai multe metode, folosite în practică, pentru măsurarea rezistențelor electrice a prizelor de pămînt.

**Metoda volt-ampermetrică** (fig. 9-45). Se bazează pe schema din fig. 9-40 la care, în afara prizei de pămînt  $P_x$ , este necesară o priză auxiliară  $P_a$  și o sondă  $P_s$ .

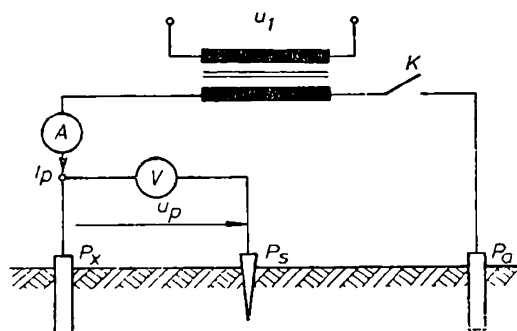


Fig. 9-45. Schema de măsurare a rezistenței prizei de pămînt cu voltmetru și ampermetru.

Ca sursă se folosește curentul alternativ din secundarul unui transformator. Nu se folosește curentul continuu pentru a evita influența asupra măsurărilor a tensiunilor electromotoare de natură chimică ce apar la suprafața de contact dintre priză și pămînt, prizele avînd rol de electrod, iar pămîntul cu sărurile din el, rol de electrolit. Cu ampermetrul  $A$  se măsoară curentul  $I_p$ , iar cu voltmetrul  $V$ , care are rezistență interioară mare și cu-

rentul neglijabil, se măsoară tensiunea  $U_p$ . Rezistența prizei  $P_x$  este :

$$R_{px} = \frac{U_p}{I_p} . \quad (9-73)$$

**Metoda punții de curent alternativ** (fig. 9-46). Două din laturile punții sînt formate dintr-un fir calibrat, de rezistență totală constantă, de-a lungul căruia se deplasează un cursor ce împarte rezistența firului calibrat în  $R_1$  și  $R_2$ , astfel că :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho \frac{l_1}{S}}{\rho \frac{l_2}{S}} = \frac{l_1}{l_2} . \quad (9-74)$$

Ca instrument de nul, la care se urmărește echilibrarea punții, se folosește un instrument electrodinamic de precizie sau o cască telefonică (puntea este în echilibru atunci cînd tonul din cască este minim).

Pentru determinarea valorii rezistenței  $R_{px}$  a prizei se execută trei măsurări, așa cum se arată în fig. 9-46 a, b și c. Rezultă pentru cele trei măsurări :

$$R_a = R_{px} + R_{pa}, \quad R_b = R_{px} + R_{ps},$$

$$R_c = R_{ps} + R_{pa},$$

de unde :

$$R_{px} = \frac{R_a + R_b - R_c}{2} . \quad (9-75)$$

Această metodă este greoaie și destul de imprecisă (rezistența se determină prin diferența unor rezistențe de valori apropiate).

**Metoda de măsurare prin compensare.** Aparatele pentru măsurat rezistențele prizelor de pămînt prin compensare au o largă răspîndire. Schema de principiu a unui astfel de aparat este reprezentată în fig. 9-47. Priza de măsurat  $P_x$  și priza auxiliară  $P_a$  sînt legate în

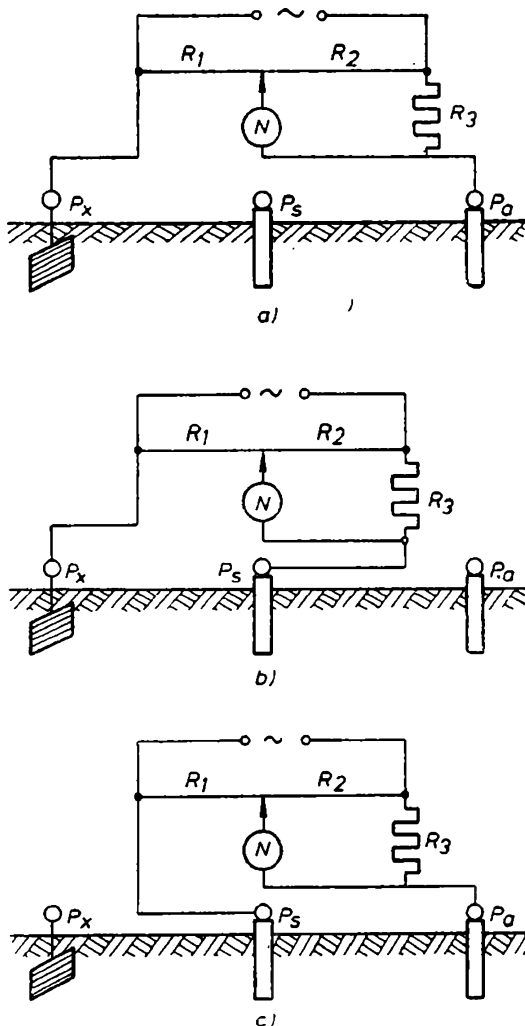


Fig. 9-46. Schemele de măsurare cu puntea de curent alternativ :

$P_x$  — priza de pămînt;  $P_s$  — sonda;  $P_a$  — priza auxiliară.

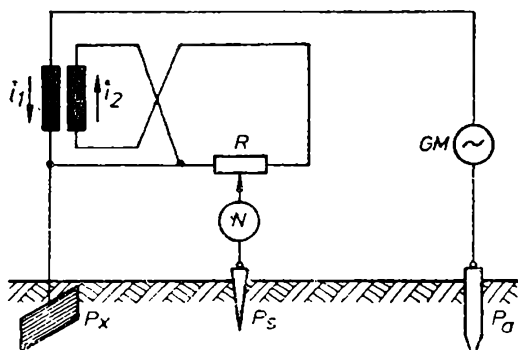


Fig. 9-47. Schema aparatului de măsurare prin compensare a rezistenței prizei de pămînt.

circuitul unei surse de curent alternativ, care poate fi un generator acționat prin manivelă. În circuit există și un transformator cu raportul de transformare 1 : 1 și cu un capăt al bobinei primare legat cu un capăt al bobinei secundare. În circuitul secundar al transformatorului se introduce o rezistență  $R$ , avind cursor. Instrumentul de nul, cu care se urmărește starea de compensare, format dintr-o cască telefonică sau dintr-un instrument electric, este montat între priza cursorului și sondă.

Măsurarea rezistenței  $R_{px}$  se face în modul următor : după ce se realizează montajul din fig. 9-47, se deplasează cursorul în lungul rezistenței  $R$ , pînă cînd instrumentul de nul indică zero. În această situație :

$$I_1 R_{px} = I_2 R, \quad (9-76)$$

unde prin  $R$  trebuie înțeleasă valoarea rezistenței cuprinsă între cursor și punctul de legare în comun a primarului și secundarului transformatorului. Deoarece raportul de transformare al transformatorului este 1 : 1, înseamnă că  $I_1 = I_2$ , iar din relația (9-76) se obține :

$$R_{px} = R. \quad (9-77)$$

În starea de compensare, prin sonda  $P_s$  nu trece curent, iar rezistența prizei auxiliare  $P_a$  nu intră în calcul.

Unele precizări asupra *erorilor de măsurare a rezistențelor prizelor de pămînt*, în afară de cele determinate de clasa de precizie a instrumentelor folosite, se referă la influența unor factori externi. Astfel, s-a amintit mai sus faptul că folosind o sursă de c.c., măsurarea poate fi influențată de t.e.m., imprimate (chimice) ce apar la suprafața de contact între priză (sau sondă) și pămînt. Evitarea acestei erori se realizează folosind sursă de c.a., ceea ce face ca, pentru cele două sensuri ale c.a., influența t.e.m. imprimate să fie compensată.

Mai poate apare o eroare datorită existenței în pămînt (la locul de măsurare) a unor curenți de dispersie (vagabonzi) proveniți de la sistemele de tracțiune electrică (tramvai, trenuri electrice etc.), care pot fi continui sau periodici (50 Hz).

Curenții de dispersie cu frecvența de 50 Hz au influență asupra măsurării prizelor de pămînt în c.a. Eroarea datorită lor poate fi în bună măsură evitată folosind ca sursă de alimentare a aparatului de măsurare un generator cu frecvența diferită de 50 Hz, iar instrumentul de nul fiind prevăzut cu un dispozitiv de detectare numai a curentului de frecvență egală cu cea a generatorului de alimentare.

Aparatul portabil de fabricație indigenă, tip APP, destinat măsurării prizelor de pămînt, are schema de principiu similară cu cea reprezentată în fig. 9-47, fiind tranzistorizat, alimentat cu șase baterii uscate de 1,5 V. În componența sa este prevăzut un convertor static, care asigură o tensiune alternativă cu frecvența de 122 Hz, un detector sincron și un amplificator de c.a. Instrumentul de măsurare este de tip magnetoelectric, alimentat de la o punte de redresare.

## 9.7. DETERMINAREA LOCULUI DEFECTELOR ÎN CABLURI ȘI LINII AERIENE

Transportul și distribuția energiei electrice se realizează prin linii aeriene și cabluri subterane. În timpul exploatării pot apare defecte (întreruperi, scurt-circuite) care produc perturbații în alimentarea cu energie și care trebuie urgent depistate și remediate.



După cum se știe, alimentarea cu energie electrică în orașe este mai avantajoasă dacă se face prin cabluri subterane, în acest caz dispărînd o serie de deranjamente specifice liniilor aeriene. Ea are însă dezavantaje, printre care se numără și depistarea locului defectelor și înlăturarea acestora, operație mult mai complicată decît la liniile aeriene.

La liniile aeriene, locul defectului se găsește prin controlul vizual pe traseul liniei. La cabluri, locul defectului se stabilește prin măsurarea distanței pînă la el, de la capetele cablului.

Înainte de măsurare, se stabilește natura defectului deconectînd cablul de la ambele capete și măsurînd cu instrumente (megohmmetre) obișnuite rezistențele de izolație dintre conductoarele cablului, apoi dintre conductoare și mantaua cablului. Cînd este necesar, se măsoară și rezistențele conductoarelor (cu ohmmetre sau punți).

Astfel, cu ajutorul unor măsurări prealabile, se poate stabili natura deranjamentului. Deranjamentele ce pot apare în exploatarea cablurilor pot fi de mai multe categorii : punerea unor conductoare la pămînt, scurtcircuit între conductoare, întreruperea conductoarelor și o serie întreagă de deranjamente mai complexe. De precizia cu care se stabilește locul defectului, va depinde și rapiditatea cu care se elimină, cu alte cuvinte, determinarea cît mai exactă a locului are o importanță economică deosebită. De aceea, pentru fiecare defect se aplică metodele care dau cele mai bune rezultate.

După stabilirea naturii defectului are loc accentuarea lui, cu scopul majorării preciziei de localizare. De exemplu, la scurtcircuit se tinde la scăderea rezistenței defectului prin arderea cu un curent electric suficient de mare prin cablu și locul defect. Efectul Joule-Lenz este mai mare în locul unde rezistența este mai mare și acolo temperatura va crește treptat, accentuînd puternic defectul. Instalația de ardere este o sursă de curent continuu sau curent alternativ.

În cele ce urmează se prezintă cîteva metode de determinare a locului defectului la cabluri subterane, prin care se urmărește să se stabilească exact locul defecțiunii ce urmează a fi remediată, fără a dezgropa cablul pe o lungime prea mare.

**Metoda punții cu fir calibrat și un conductor auxiliar.** Se consideră în fig. 9-48 un cablu de lungime  $L$ , care prezintă o punere la pămînt în punctul  $P$ , la distanța  $l_x$  de unul din capete. Stabilirea distanței  $l_x$  se face cu ajutorul unei punți cu fir calibrat și cu ajutorul unui conductor de lungime  $L_a$  — de exemplu un conductor de la o linie aeriană — care se leagă cu un capăt la capătul conductorului cu izolație defectă al cablului, iar cu celălalt capăt la punte, așa cum este arătat în fig. 9-48. La echilibrul punții sînt valabile relațiile :

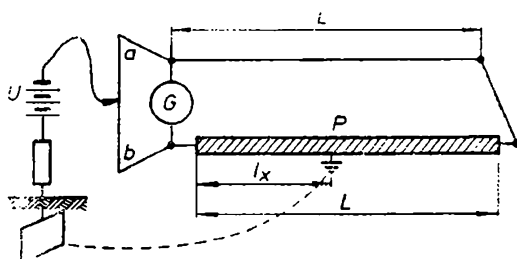


Fig. 9-48. Schema de măsurare pentru localizarea defectului în cablu folosind puntea cu fir calibrat și un conductor auxiliar.

$$\frac{a}{h} = \frac{\rho \frac{L_a}{S_a} + \rho \frac{L-l_x}{S}}{\rho \frac{l_x}{S}}$$

sau

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\frac{L_a}{S_a} + \frac{L}{S}}{\frac{l_x}{S}},$$

de unde

$$l_x = \frac{b}{a+b} \left( \frac{S}{S_a} L_a + L \right), \quad (9-78)$$

în care :  $a$  și  $b$  sînt două lungimi ale firului calibrat ;

$S_a$  — este secțiunea conductorului auxiliar ;

$S$  — secțiunea conductorului cablului ;

$\rho$  — rezistivitatea electrică considerată aceeași pentru conductorul auxiliar și pentru conductorul cablului.

**Metoda căderilor de tensiune.** În cazul în care un conductor este bun, pentru determinarea locului defect se poate aplica și metoda căderilor de tensiune, cunoscîndu-se că între căderea de tensiune între două puncte ale unui cablu omogen și lungimea dintre cele două puncte există o proporționalitate. Conductorul defect și unul din conductoarele bune ale cablului se scurtcircuitază la unul din capete, iar la celelalte capete se alimentează cablul cu o tensiune continuă. În schemă se prevede un ampermetru și o rezistență reglabilă ce permite reglarea curentului la valorile dorite (fig. 9-49).

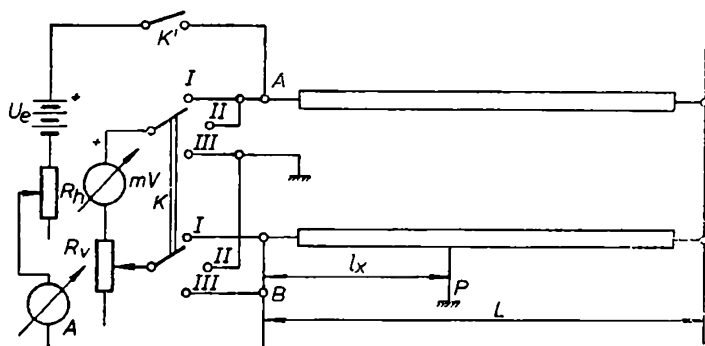


Fig. 9-49. Schema de măsurare a căderilor de tensiune pentru localizarea defectului la un cablu.

Măsurarea căderilor de tensiune se face cu ajutorul unui milivoltmetru, conectat la comutatorul  $K$  cu trei poziții.

Dacă întreruptorul  $K$  este în poziția  $I$ , atunci milivoltmetrul va măsura căderea de tensiune între punctele  $A$  și  $B$ , corespunzătoare lungimii  $2L$  a cablului. Cu alte cuvinte, indicația milivoltmetrului va fi proporțională cu  $2L$ , putîndu-se deci scrie :

$$\alpha_1 = K_1 2L.$$

În poziția  $II$ , milivoltmetrul măsoară căderea de tensiune dintre punctele  $A$  și  $P$ , corespunzătoare unei distanțe  $2L - l_x$ , putîndu-se scrie :

$$\alpha_2 = K_2 (2L - l_x).$$

Constantele  $K_1$  și  $K_2$  sînt diferite pentru că, în serie cu milivoltmetrul, în cazul *II*, mai apare pe lîngă  $R_V$  și rezistența de punere la pămînt.

Conectat în poziția *III*, milivoltmetrul va indica căderea de tensiune dintre cele două puncte  $P$  și  $B$ , proporțională cu distanța pînă la locul defect

$$\alpha_3 = K_2 l_x.$$

Din ultimele două relații se poate scrie :

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{l_x}{2L - l_x}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} = \frac{l_x}{2L},$$

$$l_x = \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} 2L, \quad (9-79)$$

rezultînd astfel distanța de la locul de unde se fac măsurările pînă la locul defectului.

Dacă rezistența de punere la pămînt este foarte mică, cu alte cuvinte defectul este puternic accentuat, se poate aproxima  $K_1 = K_2$  și atunci

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{K_2}{K_1} \frac{l_x}{2L}$$

deci :

$$l_x = 2L \frac{\alpha_3}{\alpha_1}. \quad (9-80)$$

**Metoda t.e.m. induse.** În scopul depistării locului defect, cablul se alimentează de la o sursă de curent alternativ. Curentul alternativ care parcurge cablul va produce în spațiul din jurul conductorului un cîmp magnetic alternativ. Dacă în acest cîmp este plasată, în mod corespunzător, o bobină, în aceasta se va induce o t.e.m., care amplificată poate fi sesizată cu un instrument indicator. Deci, deplasînd bobina deasupra solului astfel ca indicatorul să indice în permanență existența cîmpului magnetic, se poate determina traseul necunoscut al cablului. În cazul în care există un defect, de exemplu scurtcircuit între conductoare, sau punerea unor conductoare la pămînt etc., cîmpul magnetic scade brusc, indicatorul va sesiza lipsa tensiunii induse și se poate astfel determina locul defectului.

În realitate, apar dificultăți în aplicarea acestei metode din mai multe motive. După cum se știe, conductoarele cablului sînt răsucite, asigurînd astfel simetria fazelor cablului (inductivitățile și capacitățile proprii ale fazelor devin astfel egale). Din acest motiv, configurația cîmpului magnetic exterior este complicată, putîndu-se întîmpla ca liniile de cîmp să nu intersecteze bobina, cu alte cuvinte s-ar putea trage concluzii greșite în ceea ce privește depistarea locului defectului. Deoarece cablul are o manta de  $Ol$  sau  $Pb$  în contact cu pămîntul, aceasta, manifestîndu-se pentru cablu ca un ecran, cîmpul magnetic în exteriorul cablului va fi micșorat.

Din aceste motive sînt necesare surse de putere mai mare. Cel mai des, ca sursă de alimentare a cablului, se folosește un generator de frecvență acustică, iar ca indicator se folosește o cască telefonică.

**Metoda impulsurilor.** Una din metodele cele mai utilizate în depistarea locului defectelor în cabluri este metoda impulsurilor. Se cunoaște că dacă se trimite un impuls electric pe o linie (sau cablu) și dacă, undeva pe linie, se schimbă

impedanța de undă a liniei, atunci în acel punct o parte din undă se reflectă. Dacă sfârșitul liniei este întrerupt, atunci de acolo va apare o altă reflexie a undei.

Cunoscând viteza impulsului și măsurînd timpul corespunzător parcurgerii distanței pînă la defect, acesta poate fi o măsură a distanței pînă la locul defect. Pentru aceasta se recurge la un osciloscop catodic, vizualizînd impulsul trimis pe linie și cel reflectat. După cum se știe, spotul se deplasează pe ecran cu o viteză

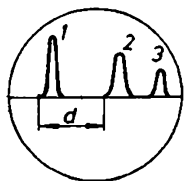


Fig. 9-50. Imaginea impulsurilor pe ecranul osciloscopului.

constantă determinată de frecvența de baleiaj. Osciloscopul se leagă la capătul cablului. În locul în care este legat și generatorul de impuls. Astfel, pe ecran (fig. 9-50) va apare și impulsul inițial, ce se trimite pe cablu. Pe ecran va apare și impulsul 2, reflectat de la locul defectului înapoi spre sursa de alimentare. Mai poate apare și impulsul 3, corespunzător reflexiei de la capătul opus al cablului. Se poate afirma că distanța  $d$  este o măsură pentru dublul distanței pînă la locul defect.

Pentru a putea etalona osciloscopul direct în unități de lungime, este necesar a cunoaște raportul vitezei undei și a vitezei spotului. Fie „ $t$ ” timpul în care unda ajunge de la generator la locul defect și de la defect din nou la osciloscop, reflectîndu-se. În acest interval de timp unda va parcurge un spațiu corespunzător distanței duble la locul defect, adică  $2l_x$ . Se poate scrie :

$$2l_x = tv,$$

unde  $v$  este viteza undei corespunzătoare mediului în care se deplasează (depinzînd de  $\mu$  și  $\epsilon$  ai mediului).

În același timp,  $t$ , este parcursă și distanța  $d$ , de către spotul luminos al ecranului, însă cu viteza de baleiaj  $v_b$  :

$$d = t v_b.$$

Împărțind cele două relații de mai sus, se obține :

$$l_x = d \frac{v}{v_b}. \quad (9-81)$$

Se observă că dacă raportul  $v/v_b$  se cunoaște,  $d$  va putea fi etalonat direct în unități de lungime  $l_x$ .

Metoda se poate aplica indiferent de natura defectului, de asemenea se poate utiliza pentru determinarea locului defectului atât la linii aeriene, cît și la cabluri. Precizia care se obține este de ordinul a sute de metri pentru distanțe de 100...200 km (linii aeriene), fiind suficientă deoarece în acest interval trebuie controlate izolatoarele doar la 1—2 stîlpi de susținere. La cabluri este necesară o precizie cît mai mare.

## 9.8. MĂSURAREA INDUCTANȚELOR ȘI CAPACITĂȚILOR ELECTRICE

### 9.8.1. MĂSURAREA INDUCTANȚELOR PROPRII ALE BOBINELOR ȘI CAPACITĂȚII CONDENSATOARELOR

Pentru măsurarea inductanței unei bobine, respectiv a capacității unui condensator, există mai multe metode, dintre care se amintesc : metoda volt-ampmetrică, metoda voltmetrului, ampermetrului și wattmetrului, metoda

punții de curent alternativ, metoda comparației etc. Dintre acestea se prezintă mai pe larg metoda punții de curent alternativ.

Puntea de curent alternativ (fig. 9-51) are laturile formate din patru impedanțe:  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$  și  $\underline{Z}_4$ ; pe una din diagonale se găsește sursa de curent alternativ, iar pe cealaltă diagonală se găsește instrumentul de nul  $N$  cu ajutorul căruia se urmărește echilibrul punții.

Cînd puntea este în echilibru, sînt satisfăcute următoarele relații, scrise sub formă complexă :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 \underline{I}_1 &= \underline{Z}_2 \underline{I}_2, & \underline{Z}_3 \underline{I}_3 &= \underline{Z}_4 \underline{I}_4; \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_3, & \underline{I}_2 &= \underline{I}_4, & \underline{I}_5 &= 0,\end{aligned}$$

de unde rezultă :

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4} \quad \text{sau} \quad \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \quad (9-82)$$

Ținînd seama de exprimarea sub forma exponențială a impedanțelor complexe :

$$\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\alpha_1}, \quad \underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\alpha_2}, \quad \underline{Z}_3 = Z_3 e^{j\alpha_3}, \quad \underline{Z}_4 = Z_4 e^{j\alpha_4},$$

relația (9-82) de echilibru a punții se transformă în următoarele relații între module și argumente, care trebuie să fie îndeplinite simultan :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4. \quad (9-83)$$

**Măsurarea inductanței proprii a unei bobine** se realizează punînd pe două laturi ale punții rezistențe electrice pure, de valoare cunoscută :  $\underline{Z}_1 = R_1$  și  $\underline{Z}_2 = R_2$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ), a treia latură este formată dintr-o bobină etalon cu inductanța  $L_3$  și rezistența proprie  $R_3$ , adică  $\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3$ , iar a patra latură constă din bobina cu inductanța  $L_x$  de măsurat și rezistența proprie  $R_x$  :  $\underline{Z}_4 = R_x + j\omega L_x$ . Cu acestea, din condițiile de echilibru (9-83), rezultă :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{R_3^2 + (\omega L_3)^2}}{\sqrt{R_x^2 + (\omega L_x)^2}}, \quad \varphi_3 = \varphi_4. \quad (9-84)$$

Din egalitatea unghiurilor  $\varphi_3$  și  $\varphi_4$  se obține :

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \operatorname{tg} \varphi_4, \quad \text{sau} \quad \frac{R_3}{\omega L_3} = \frac{R_x}{\omega L_x}, \quad \text{respectiv} \quad \frac{R_3^2}{(\omega L_3)^2} = \frac{R_x^2}{(\omega L_x)^2}.$$

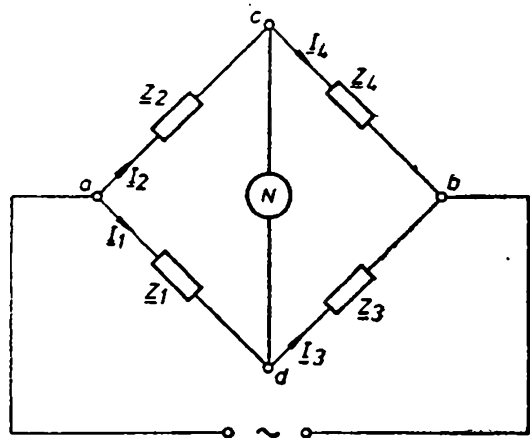


Fig. 9-51. Schema punții de c.a.

Prin folosirea unor reguli ale proporțiilor rezultă :

$$\frac{R_3^2 + (\omega L_3)^2}{(\omega L_3)^2} = \frac{R_x^2 + (\omega L_x)^2}{(\omega L_x)^2}, \quad \frac{R_3^2}{R_3^2 + (\omega L_3)^2} = \frac{R_x^2}{R_x^2 + (\omega L_x)^2},$$

adică :

$$\frac{R_3^2 + (\omega L_3)^2}{R_x^2 + (\omega L_x)^2} = \frac{(\omega L_3)^2}{(\omega L_x)^2} = \frac{R_3^2}{R_x^2}. \quad (9-85)$$

Din relațiile (9-84) și (9-85) se obțin proporționalitățile :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x} = \frac{L_3}{L_x},$$

din care rezultă :

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3, \quad L_x = \frac{R_2}{R_1} L_3. \quad (9-86)$$

Îndeplinirea simultană a acestor două condiții aduc puntea de curent alternativ în stare de echilibru, respectiv se obține valoarea inductanței  $L_x$  a bobinei în funcție de raportul  $R_2/R_1$  și de inductanța etalon  $L_3$ . Se observă că condițiile de echilibru sînt independente de frecvența tensiunii de alimentare. Sînt necesare totuși unele precizări asupra stabilirii acestui echilibru al punții și anume :

— în brațul 3 trebuie să existe un element reglabil, fie  $R_3$ , fie  $L_3$ , cu scopul de a se putea realiza condiția  $\varphi_3 = \varphi_4$  (unde  $\varphi_4 = \varphi_x$ ) ; deci, în serie cu bobina etalon se introduce și o rezistență reglabilă ;

— în locul bobinei etalon se poate introduce o capacitate etalon, plasată în brațul opus față de cel care conține bobina de măsurat, adică

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1 \left( -j \frac{1}{\omega C_1} \right)}{R_1 - j \frac{1}{\omega C_1}} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}, \quad \underline{Z}_2 = R_2, \quad \underline{Z}_3 = R_3, \quad \underline{Z}_4 = R_x + j\omega L_x,$$

cu care condițiile de echilibru (9-82) conduc la

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3, \quad L_x = R_2 R_3 C_1, \quad (9-87)$$

unde  $R_1$  este rezistența de pierderi a condensatorului etalon (în paralel cu  $C_1$ , ca în fig. 9-52, a).

**Măsurarea capacității** unui condensator ideal (fără pierderi) cu ajutorul punții de curent alternativ se face în mod analog cu măsurarea inductanței, introducînd în brațele punții :  $\underline{Z}_1 = R_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2$ ,  $\underline{Z}_3 = -j \frac{1}{\omega C_3}$ ,  $\underline{Z}_4 = -j \frac{1}{\omega C_x}$ , și, pe aceeași cale ca mai sus, se obține :

$$C_x = \frac{R_1}{R_2} C_3, \quad (9-88)$$

unde  $C_3$  este capacitatea condensatorului etalon (ideal).

Condensatoarele folosite în practică nu sînt ideale, astfel încît  $\underline{Z}_3$  și  $\underline{Z}_4$  nu se reduc numai la reactanțele capacitive scrise mai sus, ci intervine și rezistența

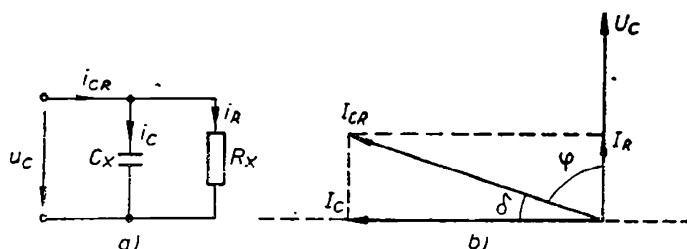


Fig. 9-52. Schema echivalentă a condensatorului cu pierderi (a) și diagrama fazorială (b).

electrică corespunzătoare dielectricului imperfect dintre armături. Schema electrică a unui astfel de condensator, denumit condensator cu pierderi, este reprezentată în fig. 9-52, a. În acest caz, unghiul de defazaj  $\varphi$  dintre tensiunea la bornele condensatorului și curentul prin condensator este mai mic decât  $90^\circ$  (fig. 9-52, b). Unghiul  $\delta = 90^\circ - \varphi$  se numește unghi de pierderi :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{I}{\omega C_x R_x}. \quad (9-89)$$

În această situație, schema punții de c.a. este cea reprezentată în fig. 9-53 (puntea Nernst), avînd în laturi impedanțele :

$$\underline{Z}_1 = R_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2, \quad \underline{Z}_3 = \frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C_3}, \quad \underline{Z}_4 = \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x}.$$

Cu aceste impedanțe, condițiile de echilibru (9-82) conduc la

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3, \quad C_x = \frac{R_1}{R_2} C_3. \quad (9-90)$$

Se observă independența de frecvența tensiunii de alimentare a acestor condiții de echilibru.

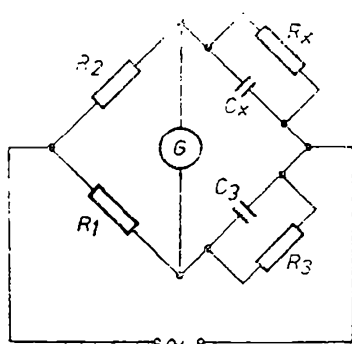


Fig. 9-53. Schema punții de c.a. pentru măsurarea capacității electrice.

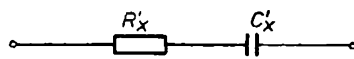


Fig. 9-54. Schema echivalentă în serie a condensatorului cu pierderi.

În locul schemei echivalente în paralel a condensatorului cu pierderi (fig. 9-52, a) se poate recurge la schema echivalentă în serie (fig. 9-54). Și în acest caz condițiile de echilibru ale punții au forma (9-90), dar este necesar ca și al doilea condensator, din cealaltă latură, să fie tot cu schemă echivalentă serie. În caz contrar, dacă schemele condensatoarelor sînt diferite, condițiile de echilibru depind și de frecvență.

Unghiul de pierderi pentru schema în serie este :

$$\operatorname{tg} \delta' = \omega C'_x R'_x. \quad (9-91)$$

## 9.8.2. MĂSURAREA INDUCTANȚELOR MUTUALE

Cu ajutorul punții de c.a., se poate măsura inductanța mutuală  $M$  dintre două bobine cuplate magnetic (adițional sau în opoziție). În acest sens, există două posibilități de măsurare.

**Măsurarea indirectă.** Cele două bobine cuplate magnetic se leagă în serie adițional ( $A$ ) și în opoziție ( $B$ ) și se introduc în latura punții de măsurare. În cele două situații,  $A$  și  $B$ , se măsoară inductanțele :

$$L_A = L_1 + L_2 + 2M, \quad L_B = L_1 + L_2 - 2M,$$

de unde rezultă :

$$M = \frac{L_A - L_B}{4}. \quad (9-92)$$

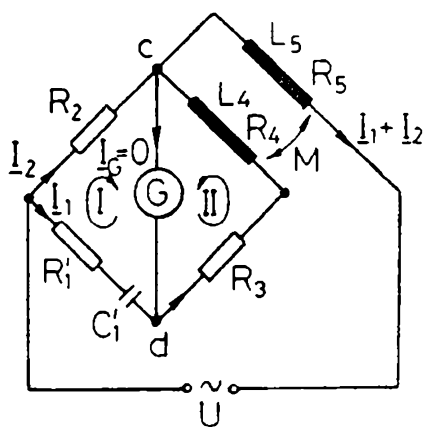


Fig. 9-55. Schema punții de c.a. pentru măsurarea directă a inductanței mutuale.

Din cauza calculului prin diferență, precizia măsurării este scăzută.

**Măsurarea directă** a inductanței mutuale se realizează conform schemei din fig. 9-55. În cazul echilibrului, când  $\underline{U}_{cd} = 0$  ( $I_G = 0$ ), se pot scrie următoarele relații pentru curenții  $I$  și  $II$  (teorema a II-a a lui Kirchhoff) :

$$-\underline{I}_1 \left( R'_1 - j \frac{1}{\omega C'_1} \right) + \underline{I}_2 R_2 = 0,$$

$$\underline{I}_1 (R_3 + R_4 + j\omega L_4) \pm (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) j\omega M = 0$$

sau

$$\underline{I}_1 \left( R'_1 - j \frac{1}{\omega C'_1} \right) = \underline{I}_2 R_2,$$

$$\underline{I}_1 [R_3 + R_4 + j\omega (L_4 \pm M)] = \mp \underline{I}_2 j\omega M.$$

Prin împărțirea acestor două relații, se obține :

$$\frac{R_3 + R_4 + j\omega (L_4 \pm M)}{R'_1 - j \frac{1}{\omega C'_1}} = \mp \frac{j\omega M}{R_2},$$

de unde, separînd termenii reali și cei imaginari rezultă condițiile de echilibru ale punții

$$M = \pm R_2 C'_1 (R_3 + R_4), \quad M = \pm \frac{R_2}{R'_1 + R_2} L_4. \quad (9-93)$$

Semnul plus corespunde cuplajului adițional și semnul minus cuplajului în opoziție.

Deoarece  $\frac{R_2}{R'_1 + R_2} < 1$ , trebuie ca  $M < L_4$  pentru ca puntea să se poată echilibra.

Capacitatea etalon  $C'_1$  și rezistența  $R'_1$  trebuie să fie reglabile, cu scopul de a se putea aduce puntea în stare de echilibru.



### 9.8.3. PUNTEA SCHERING

Acest tip de punte se utilizează pentru măsurarea capacității și unghiului de pierderi la condensatoarele de înaltă tensiune, prin compararea cu o capacitate fără pierderi ( $C_1$ ) de înaltă tensiune și cu rezistențe cunoscute. Schema punții este reprezentată în fig. 9-56, cu următoarele impedanțe pe laturi :

$$\underline{Z}_1 = -j \frac{1}{\omega C_1}, \quad \underline{Z}_2 = R_2, \quad \underline{Z}_3 = \frac{R_3}{R_3 - j \frac{1}{\omega C_3}}, \quad \underline{Z}_4 = \underline{Z}_x = R'_x - j \frac{1}{\omega C'_x}.$$

Condițiile de echilibru (9-82) conduc la relațiile

$$R'_x = \frac{C_3}{C_1} R_2, \quad C'_x = \frac{R_3}{R_2} C_1. \quad (9-94)$$

Aceste condiții se realizează modificînd rezistența  $R_3$  și capacitatea  $C_3$ .

Unghiul de pierderi este dat de relația (9-91)

$$\operatorname{tg} \delta' = \omega C'_x R'_x.$$

Prin această metodă se măsoară, spre exemplu, capacitatea cablurilor de înaltă tensiune.

Sursa de alimentare a punții Schering poate fi cu frecvența de 50 Hz sau cu frecvență reglabilă (dacă se cere ca măsurarea să se facă la diferite frecvențe).

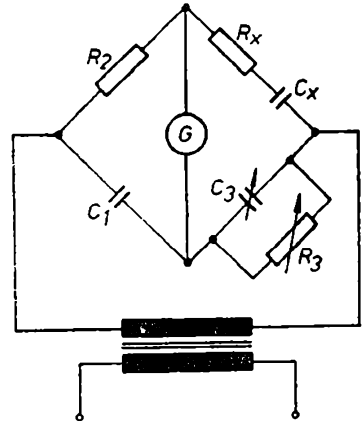


Fig. 9-56. Schema punții Schering.

### 9.8.4. FARADMETRUL

În afară de metodele în punte, capacitățile se pot măsura și cu alte metode. De multe ori capacitățile se măsoară cu ajutorul galvanometrelor balistice, această metodă fiind indirectă deoarece capacitatea rezultă în funcție de sarcina măsurată cu galvanometrul balistic și tensiunea aplicată condensatorului. Precizia de măsurare a capacității va depinde evident de precizia de etalonare a galvanometrului balistic și de precizia de măsurare a tensiunii aplicate condensatorului (tensiunea se măsoară cu un voltmetru).

Capacitățile se mai pot măsura cu ajutorul faradmetrelor, care sînt instrumente cu citire directă a capacităților, similare cu ohmmetrele, cu deosebirea că tensiunea de alimentare va fi alternativă. De aceea, la construcția faradmetrelor logometrice se exclude logometrul magnetoelectric care, după cum se știe, funcționează numai în curent continuu. Se pot utiliza logometre feromagnetice și electrodinamice.

Schema principală a logometrului feromagnetic este arătată în fig. 9-57. Prin relațiile (9-66) s-a arătat că cele două cupluri opuse ce

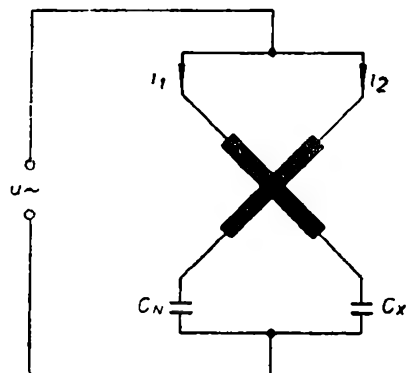


Fig. 9-57. Schema de principiu a faradmetrului logometric feromagnetic.

acționează asupra sistemului mobil sînt proporționale cu curenții  $I_1$ , respectiv  $I_2$ . La echilibru, cele două cupluri devin egale ( $C_1 = C_2$ ), adică

$$k_1 I_1 \cos \alpha = k_2 I_2 \sin \alpha, \quad (9-95)$$

de unde rezultă

$$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right). \quad (9-96)$$

Neglijînd impedanțele bobinelor în raport cu reactanțele condensatoarelor, se poate scrie :

$$I_1 = U\omega C_x, \quad I_2 = U\omega C_N,$$

unde  $C_x$  este capacitatea necunoscută, iar  $C_N$  este o capacitate cunoscută. Înlocuind  $I_1$  și  $I_2$  în expresia deviației, se obține :

$$\alpha = f\left(\frac{C_x}{C_N}\right) \quad (9-97)$$

Dacă  $C_N$  este o capacitate fixă, instrumentul poate fi gradat direct în unități de măsură a capacității  $C_x$ . Făcînd  $C_N$  variabil în trepte, se realizează mai multe domenii pentru faradmetru.

Indicația instrumentului nu depinde de tensiunea de alimentare, însă aceasta este astfel prescrisă încît cuplul de frecare al instrumentului să fie neglijabil față de cuplurile produse de curenții  $I_1$  și  $I_2$ .

## 9.9. MĂSURAREA PUTERII ELECTRICE

Instrumentul folosit pentru măsurarea directă a puterii se numește *wattmetru*. Cel mai frecvent utilizat este wattmetrul de tip electrodinamic, care are o bobină de curent ce se leagă în serie cu circuitul (bobina sistemului fix) și o bobină de tensiune ce se leagă în paralel cu circuitul (bobina sistemului mobil), așa cum este arătat în fig. 9-58.

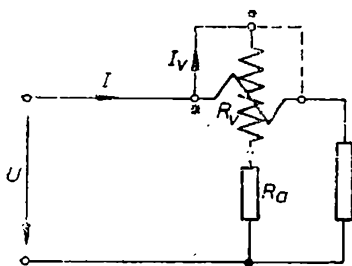


Fig. 9-58. Schema wattmetrului.

Pentru ca wattmetrul legat în circuit să indice în sensul direct, este necesar ca cele două borne marcate cu steluță, sau cu alt semn (o bornă a bobinei de curent și o bornă a bobinei de tensiune), să fie legate la același conductor al circuitului. Montajul wattmetrului poate fi amont sau aval, după cum bobina de tensiune este legată înainte sau după bobina de curent. În fig. 9-58 este realizat montajul amont, iar prin linia punctată este arătat cum se execută legătura pentru montajul aval.

Constanta wattmetrului se determină făcînd produsul dintre tensiunea nominală și curentul nominal al wattmetrului și împărțînd la numărul total de diviziuni de pe scală, adică :

$$K = \frac{U_N I_N}{\alpha_{max}} [\text{W/div.}] \quad (9-98)$$

### 9.9.1. MĂSURAREA PUTERII ÎN CURENT CONTINUU

Pentru măsurarea puterii la circuite de curent continuu se folosesc diferite metode.

**Metoda voltmetrului și ampermetrului.** Avînd în vedere că la un circuit de curent continuu puterea este dată de produsul dintre tensiune și curent :  $P=UI$  [W], rezultă posibilitatea de a măsura în mod indirect puterea cu ajutorul unui voltmetru care măsoară tensiunea  $U$  și a unui ampermetru care măsoară curentul  $I$ . Voltmetrul poate fi legat față de ampermetru în amonte sau în aval, ceea ce se stabilește în funcție de condițiile concrete ale măsurării.

**Măsurarea puterii cu ajutorul wattmetrului electrodinamic** se realizează legînd wattmetrul în circuit conform schemei din fig. 9-58. Cuplul activ ce acționează asupra sistemului mobil al wattmetrului și care determină deviația acului indicator este proporțional cu puterea. În adevăr, ținînd seama de relația (9-24)

în care se pune  $i_1=I$  și  $i_2=I_v=\frac{U}{R_v+R_a}$ , rezultă :

$$C=\frac{k_a}{R_v+R_a} UI=k_1P, \quad (9-99)$$

unde  $k_1=\frac{k_a}{R_v+R_a}$  este o constantă de proporționalitate,  $R_v$  fiind rezistența electrică a bobinei de tensiune, iar  $R_a$  rezistența adițională legată în serie cu această bobină.

Cuplul rezistent este determinat de resoarte spirale, fiind proporțional cu deformația elastică a acestora, care este în același timp și deviația acului indicator, adică :

$$C_r=k_r\alpha \quad (9-100)$$

Acul indicator al instrumentului se va opri în dreptul diviziunii pentru care este îndeplinită condiția  $C=C_r$ , ceea ce înseamnă :

$$k_1P=k_r\alpha, \text{ sau } P=K\alpha \quad (9-101)$$

unde  $K=\frac{k_r}{k_1}$  este constanta wattmetrului. Rezultă proporționalitatea dintre deviația  $\alpha$  a acului indicator și puterea  $P$ .

### 9.9.2. MĂSURAREA PUTERII ACTIVE LA CIRCUITE MONOFAZATE

Puterea activă la circuitele monofazate de curent alternativ sinusoidal are expresia :

$$P=UI \cos \varphi, \quad (9-102)$$

unde  $U$  este valoarea efectivă a tensiunii,  $I$  — valoarea efectivă a curentului și  $\cos \varphi$  — factorul de putere.

Pentru măsurarea acestei puteri se folosește wattmetrul de tip electrodinamic, ferodinamic sau cu inducție. În fig. 9-59, *a* este arătat modul de legare în circuit a unui wattmetru electrodinamic ; bobina de curent se leagă în serie cu circuitul, iar bobina de tensiune, legată în serie cu o rezistență adițională, se

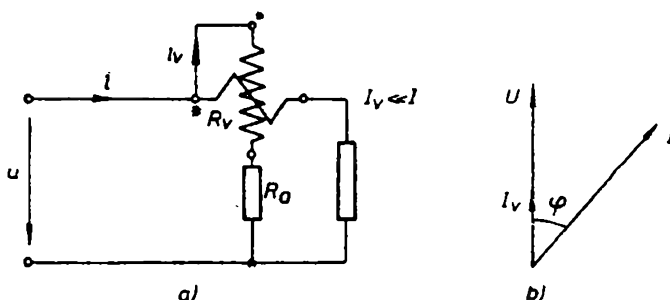


Fig. 9-59. Wattmetrul electrodinamic :  
a — schema de legare în circuit; b — diagrama fazorială  
a tensiunii și curenților.

conectează în paralel cu circuitul. Wattmetrul măsoară puterea activă, dacă valoarea medie în raport cu o perioadă a cuplului activ este proporțională cu această putere. În adevăr, introducând în relația (9-24)  $i_1 = i$  — curențul din bobina de curent și  $i_2 = i_v$  — curențul din bobina de tensiune, rezultă valoarea momentană a cuplului activ :  $c = k_a i i_v$ .

Avînd în vedere diagrama fazorială din fig. 9-59, b, în care curențul  $i$  este defazat cu unghiul  $\varphi$  față de tensiunea  $u$ , iar curențul  $i_v$  este în fază cu tensiunea, deoarece rezistența adițională  $R_a$  este mult mai mare decît reactanța inductivă a bobinei de tensiune, se pot scrie relațiile :

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi), \quad i_v = \sqrt{2}I_v \sin \omega t = \frac{\sqrt{2}U}{R_v + R_a} \sin \omega t,$$

în care  $I$ ,  $I_v$  și  $U$  sînt valorile efective ale mărimilor sinusoidale, iar  $R_v$  este rezistența proprie a bobinei de tensiune. Aceste expresii ale curenților se introduc în relația scrisă mai sus pentru valoarea momentană a cuplului activ și, prin integrare, se obține valoarea medie în raport cu o perioadă a acestui cuplu :

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T c dt = \frac{k_a}{R_v + R_a} UI \cos \varphi = k_1 P, \quad (9-103)$$

unde  $k_1 = \frac{k_a}{R_v + R_a}$ .

Deci, valoarea medie a cuplului activ este proporțională cu puterea activă. În consecință, wattmetrul măsoară puterea activă din circuit.

### 9.9.3. MĂSURAREA PUTERII REACTIVE LA CIRCUITE MONOFAZATE

Puterea reactivă la circuite monofazate de curent alternativ sinusoidal are expresia :

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (9-104)$$

Pentru măsurarea acestei puteri se folosește instrumentul denumit *varmetru*. Un varmetru se deosebește de wattmetru prin aceea că, în serie cu bobina de tensiune are legată nu o rezistență adițională, ci o reactanță inductivă  $X_a$ , de valoare mare față de rezistența  $R_v$ . Astfel, curențul  $I_v$  este practic în cuadra-

tură cu tensiunea  $U$ . În aceste condiții, efectuînd calculul valorii medii a cuplului activ după același procedeu, ca și în cazul precedent al puterii active, rezultă :

$$C = \frac{k_a}{X_v + X_a} UI \sin \varphi = k_2 Q, \quad (9-105)$$

în care  $k_2 = \frac{k_a}{X_v + X_a}$ , iar  $X_v$  este reactanța proprie a bobinei de tensiune.

Prin urmare, valoarea medie a cuplului activ este proporțională cu puterea reactivă din circuit, ceea ce înseamnă că varmetrul măsoară această putere.

Legarea varmetrelor în circuit se execută respectînd aceleași reguli privind polaritatea bornelor bobinelor de curent și de tensiune ca și la wattmetre. Indicația varmetrului în sensul direct al scalei gradate corespunde unui defazaj inductiv între curent și tensiune (putere reactivă consumată), iar în sens contrar, unui defazaj capacitiv (putere reactivă debitată de receptor).

#### 9.9.4. MĂSURAREA PUTERII ACTIVE LA CIRCUITE TRIFAZATE

Măsurarea puterii active la circuite trifazate poate fi făcută prin mai multe metode, descrise în continuare.

**Metoda cu trei wattmetre** constă în măsurarea puterii active pe fiecare fază cu cite un wattmetru. Legarea wattmetrelor în circuitul receptorului trifazat conectat în stea se realizează ca în fig. 9-60, cînd *punctul de nul este accesibil*.

Dacă există conductor neutru, cele trei bobine de tensiune ale wattmetrelor se leagă la acest conductor, în locul punctului de nul.

Cele trei wattmetre măsoară puterea pe fiecare fază în parte, iar puterea totală din circuit este :

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3, \quad (9-106)$$

unde :  $U_1, U_2$  și  $U_3$  sînt valorile efective ale tensiunilor de fază ;

$I_1, I_2$  și  $I_3$  — valorile efective ale curenților de fază (aceiași ca și curenții de linie) ;

$\varphi_1, \varphi_2$  și  $\varphi_3$  — defazajele dintre curenții de fază și tensiunile de fază.

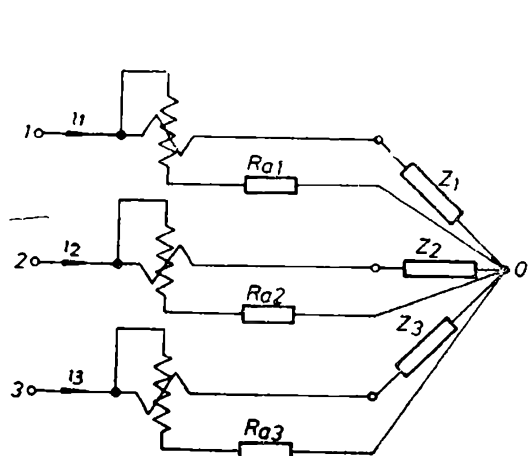


Fig. 9-60. Schema de măsurare a puterii active cu trei wattmetre, cînd punctul de nul este accesibil.

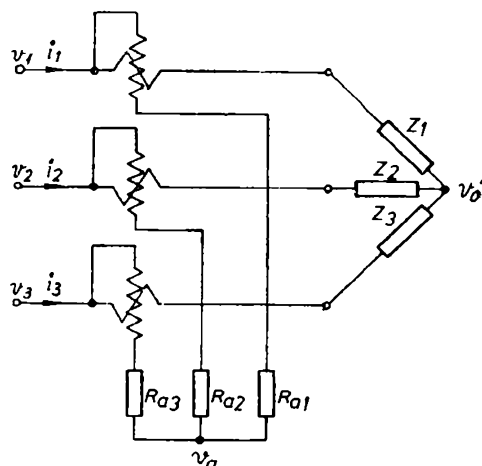


Fig. 9-61. Schema de măsurare a puterii active cu trei wattmetre, cu punct de nul artificial.

Dacă punctul de nul nu este accesibil și conductorul de nul lipsește, legarea celor trei wattmetre în circuit se face realizând un *punct de nul artificial* (fig. 9-61), cu potențialul  $v_a$  diferit de potențialul  $v_0$  al punctului de nul. Rezistențele  $R_{a1}$ ,  $R_{a2}$  și  $R_{a3}$  cu care se realizează punctul de nul artificial sînt în același timp și rezistențele adiționale pentru bobinele de tensiune.

Prin legarea bobinelor de tensiune ale wattmetrelor la punctul de nul artificial, puterea măsurată de fiecare wattmetru în parte se modifică față de cazul legării la punctul de nul real. În schimb, puterea totală măsurată de cele trei wattmetre rămîne aceeași. Justificarea acestor afirmații constă în aceea că puterea electromagnetică :

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3, \quad (9-107)$$

a cărei valoare mijlocie în raport cu o perioadă este puterea activă, este independentă de potențialul punctului de nul. În adevăr, ținînd seama că

$$u_1 = v_1 - v_0, \quad u_2 = v_2 - v_0, \quad u_3 = v_3 - v_0.$$

relația (9-107) devine :

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_0 (i_1 + i_2 + i_3)$$

și, întrucît conform teoremei I a lui Kirchhoff  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ , rezultă  $p$  independent de potențialul  $v_0$  ( $v_1$ ,  $v_2$  și  $v_3$  sînt valorile momentane ale potențialelor fazelor).

Dacă circuitul trifazat este cu conexiune în triunghi, legarea celor trei wattmetre se face tot prin realizarea unui punct de nul artificial.

Această metodă de măsurare a puterii active cu trei wattmetre, aplicabilă mai ales în cazul circuitelor trifazate nesimetrice și neechilibrate, nu este economică deoarece sînt necesare trei instrumente de măsurare.

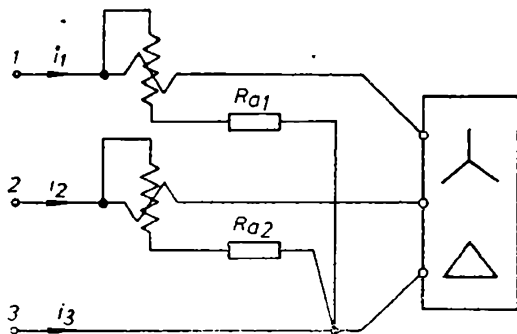


Fig. 9-62. Schema de măsurare a puterii active cu două wattmetre.

**Metoda cu două wattmetre** înlătură dezavantajul metodei precedente. Faptul că puterea activă dintr-un circuit trifazat poate fi măsurată numai cu două wattmetre se întemeiază pe concluzia care a fost prezentată mai sus și anume că puterea totală măsurată de cele trei wattmetre este independentă de potențialul punctului de nul artificial  $v_a$ . Dacă este așa, se poate pune  $v_a = v_3$ , adică se poate face ca punctul de nul artificial să coincidă cu faza a treia și, ca urmare, wattmetrul de pe

faza trei poate fi exclus din circuit, deoarece tensiunea ce revine bobinei sale de tensiune este zero. Rezultă schema de legare a celor două wattmetre ca în fig. 9-62, aplicabilă atât pentru circuite trifazate cu conexiune în stea fără conductor de nul, cît și în triunghi.

Puterea activă măsurată de cele două wattmetre este :

$$P = U_{13} I_1 \cos \varphi_{13,1} + U_{23} I_2 \cos \varphi_{23,2}, \quad (9-108)$$

unde  $U_{13}$ ,  $U_{23}$ ,  $I_1$  și  $I_2$  sînt valorile efective ale tensiunilor de linie și curenților de linie, iar  $\varphi_{13,1}$  și  $\varphi_{23,2}$  sînt defazajele dintre tensiunea și curentul corespunzător indicilor.

Dacă circuitul trifazat este simetric și echilibrat, atunci  $U_{12}=U_{23}=U_{31}=U$  și  $I_1=I_2=I_3=I$ , iar defazajele  $\varphi_{13,1}$  și  $\varphi_{23,2}$  rezultă din diagrama reprezentată în fig. 9-63 :

$$\varphi_{13,1}=30^\circ-\varphi, \quad \varphi_{23,2}=30^\circ+\varphi, \quad (9-109)$$

unde  $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi$  este defazajul dintre tensiunea de fază și curentul de fază. În această situație, relația (9-108) devine :

$$P=UI \cos (30^\circ-\varphi)+UI \cos (30^\circ+\varphi), \quad (9-110)$$

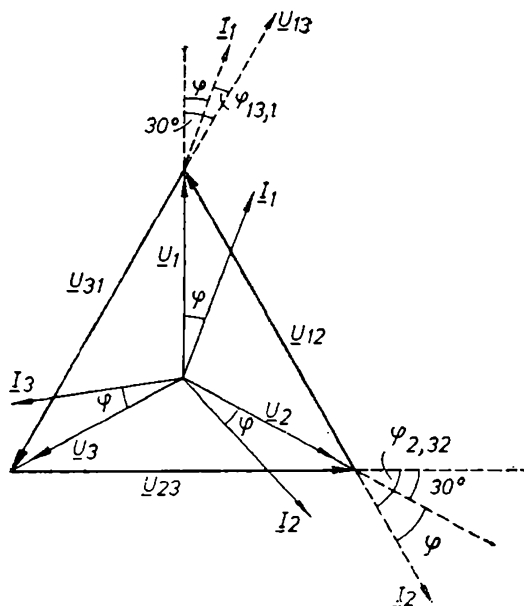


Fig. 9-63. Diagramă explicativă pentru tensiuni și curenți.

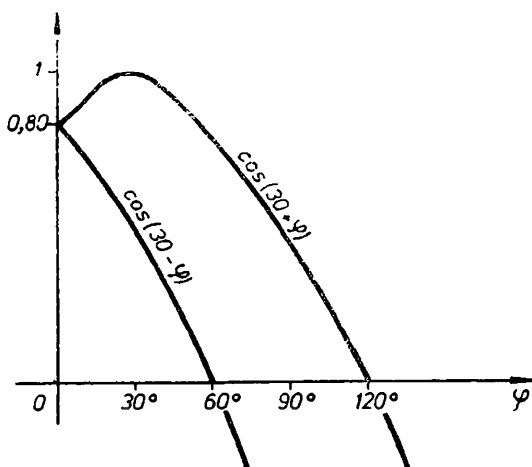


Fig. 9-64. Modificarea în funcție de defazaj a indicațiilor celor două wattmetre.

adică, după dezvoltare :

$$P=\sqrt{3} UI \cos \varphi. \quad (9-111)$$

Din relația (9-110) se vede că, odată cu schimbarea unghiului de defazaj  $\varphi$ , dependent de caracterul consumatorului, se modifică și indicația celor două wattmetre conform curbelor din fig. 9-64. Când  $\varphi > 60^\circ$ , indicația wattmetrului doi își schimbă semnul, adică acul indicator al instrumentului va bate invers. Pentru ca instrumentul să indice din nou în sensul direct, se schimbă între ele legăturile la bornele de curent (sau la cele de tensiune), iar indicația instrumentului se cotează cu semn negativ, adică :

$$P=P_{w1}-P_{w2}. \quad (9-112)$$

Metoda celor două wattmetre este folosită pe scară largă în practică pentru măsurarea puterii active la circuite trifazate. Se obișnuiește ca cele două wattmetre să fie înglobate într-un singur aparat, cu un singur ac indicator.

**Metoda cu un singur wattmetru** se aplică pentru măsurarea puterii active la circuite trifazate simetrice și echilibrate. Pentru circuite trifazate cu conexiune

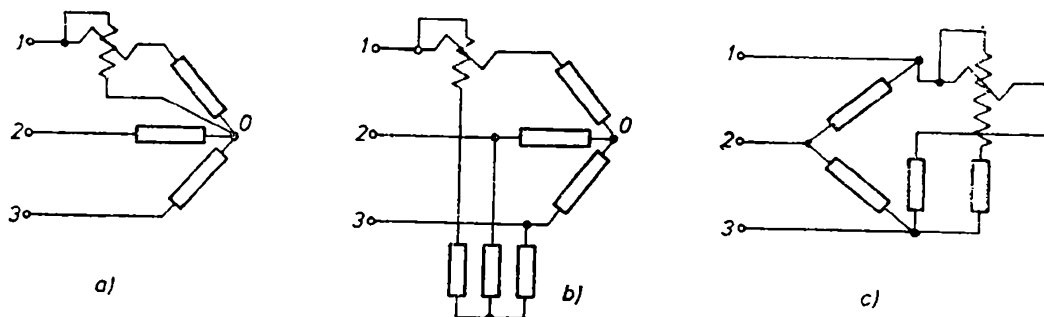


Fig. 9-65. Schema de măsurare a puterii cu un singur wattmetru :

a — legare la punctul de nul; b — cu punct de nul artificial; c — cazul conexiunii în triunghi.

În stea și cu punctul de nul accesibil, legarea wattmetrului în circuit se face conform schemei din fig. 9-65, a. Dacă punctul de nul nu este accesibil, se creează un punct de nul artificial, așa cum este arătat în schema din fig. 9-65, b.

Pentru circuite trifazate cu conexiune în triunghi, legarea wattmetrului se face conform schemei din fig. 9-65, c, sau se poate recurge și la schema cu punct de nul artificial (fig. 9-65, b).

În toate aceste cazuri, puterea totală din circuitul trifazat este egală cu de trei ori puterea măsurată de wattmetru :

$$P = 3 P_w. \quad (9-113)$$

### 9.9.5. MĂSURAREA PUTERII REACTIVE LA CIRCUITE TRIFAZATE

Măsurarea puterii reactive la circuite trifazate se poate face cu ajutorul varmetrelor sau cu ajutorul wattmetrelor.

**Măsurarea puterii reactive cu varmetrele** se realizează executând scheme de montaj identice cu cele folosite pentru măsurarea puterii active cu ajutorul wattmetrelor.

**Măsurarea puterii reactive cu ajutorul wattmetrelor.** Pentru a justifica posibilitatea măsurării puterii reactive la circuitele trifazate cu ajutorul wattmetrelor, se consideră cazul unui circuit trifazat simetric și echilibrat și un wattmetru montat conform schemei din fig. 9-66, a.

Având în vedere cele prezentate la paragraful 9.9.2 referitor la calculul valorii medii a cuplului activ ce pune în mișcare sistemul mobil al instrumentului, pentru cazul de față rezultă :

$$C = k_1 U_{23} I_1 \cos \varphi_{23,1}, \quad (9-114)$$

unde :  $U_{23}$  este valoarea efectivă a tensiunii de linie :

$I_1$  — valoarea efectivă a curentului de linie ;

$\varphi_{23,1}$  — unghiul de defazaj dintre tensiune și curent, corespunzător indicilor.

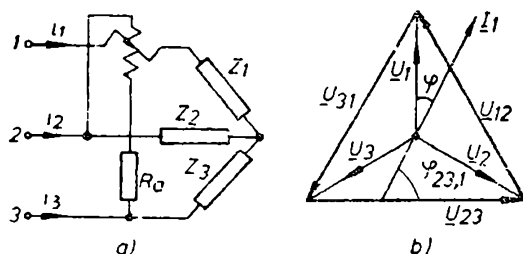


Fig. 9-66. Schema de măsurare a puterii reactive cu un wattmetru (a) și diagrama tensiunilor și curenților (b).



Din diagrama prezentată în fig. 9-66, *b*, rezultă  $\varphi_{23,1} = 90 - \varphi$ , unde  $\varphi$  este defazajul dintre tensiunea de fază și curentul de fază. Înlocuind în relația (9-114), se obține :

$$C = k_1 U_{23} I_1 \sin \varphi, \quad (9-115)$$

de unde se vede că valoarea medie a cuplului activ este proporțională cu puterea reactivă, adică wattmetrul, legat conform schemei din fig. 9-66, *a*, măsoară puterea reactivă.

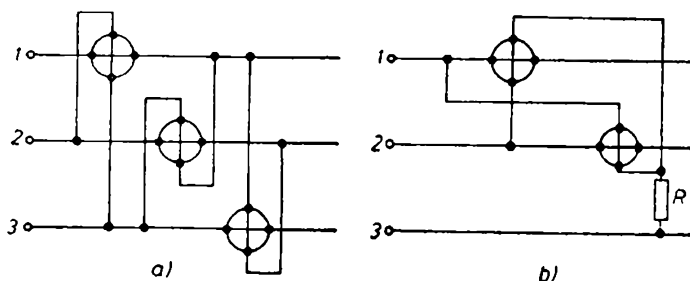


Fig. 9-67. Scheme de legare a wattmetrelor pentru măsurarea puterii reactive la circuite trifazate nesimetrice:  
a — cu trei wattmetre; b — cu două wattmetre.

În fig. 9-67, *a* este reprezentată o schemă pentru măsurarea puterii reactive la circuite trifazate cu trei wattmetre, iar în fig. 9-67, *b* este reprezentată o schemă de măsurare a aceleiași puteri cu două wattmetre.

#### 9.9.6. MĂSURAREA PUTERII LA CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV FOLOSIND TRANSFORMATOARELE DE MĂSURARE

Legarea directă în circuit a unui wattmetru sau varmetru nu poate fi făcută decât dacă curentul și tensiunea din circuitul respectiv nu depășesc anumite limite, admise de instrument.

La circuitele de curent continuu, unde curentul și tensiunea depășesc anumite limite, legarea în circuit a wattmetrului se face conectând în paralel cu bobina de curent un șunt portiv și în serie cu bobina de tensiune, o rezistență adițională corespunzătoare.

La circuitele de curent alternativ, unde curenții și tensiunile depășesc anumite limite, cum sînt, spre exemplu, circuitele secundare ale transformatoarelor de sudură sau la liniile de transport de energie electrică de tensiune ridicată, legarea în circuit a wattmetrelor și varmetrelor se face prin intermediul transformatoarelor de măsurare, de curent și de tensiune. În fig. 9-68 este arătată schema de legare prin intermediul transformatoarelor de măsurare.

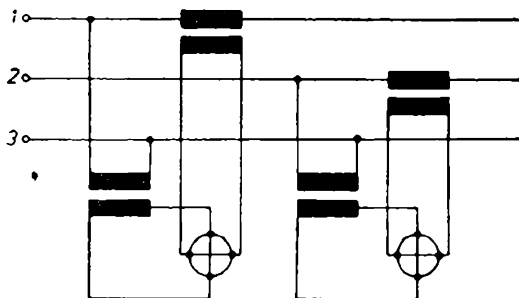


Fig. 9-68. Schema de conectare a celor două wattmetre prin intermediul transformatoarelor de măsurare.

rare a celor două wattmetre pentru măsurarea puterii active la un circuit trifazat. În mod analog se folosesc transformatoarele de măsurare și pentru alte scheme de măsurare a puterii active sau reactive, la circuite monofazate sau trifazate.

**Aplicația 9-11.** Un wattmetru monofazat este conectat în circuitul unui receptor trifazat simetric și echilibrat conform schemei din fig. 9-69, a. Să se determine puterea măsurată de wattmetru și să se arate că este raportul dintre puterea măsurată și puterea activă din circuitul trifazat ( $R_a$  este rezistența adițională de valoare foarte mare).

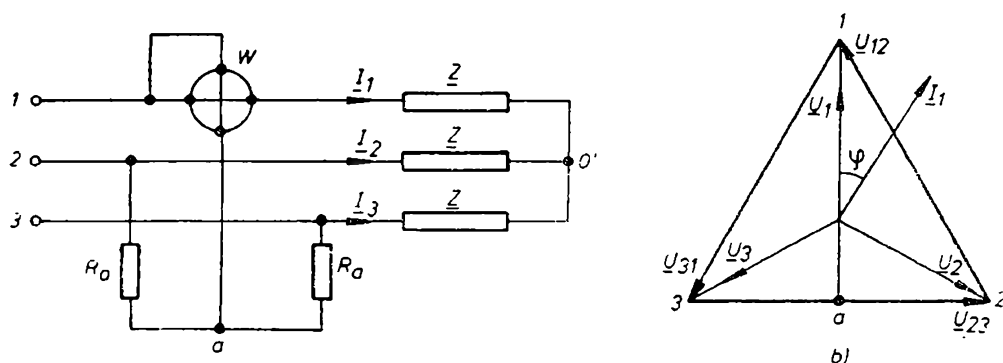


Fig. 9-69. Schemă explicativă referitoare la modul de legare a wattmetrului (a) și diagrama pentru tensiunea  $U_{1a}$  și curentul  $I_1$ .

*Rezolvare.* Prin bobina de curent a wattmetrului trece curentul  $I_1$ , iar la bobina de tensiune este aplicată tensiunea  $U_{1a} = V_1 - V_a = \frac{3}{2} U_1$  (fig. 9-69, b). Unghiul de defazaj dintre  $U_{1a}$  și  $I_1$  este  $\varphi_{1a} = \varphi$ .

Deci, puterea măsurată de wattmetru este:  $P_w = U_{1a} I_1 \cos \varphi_{1a} = \frac{3}{2} U_1 I_1 \cos \varphi$ .

Puterea activă din circuitul trifazat este:  $P = 3 U_1 I_1 \cos \varphi$ , cu care rezultă raportul  $\frac{P_w}{P} = \frac{1}{2}$ .

## 9.10. MĂSURAREA ENERGIEI ELECTRICE

Măsurarea energiei electrice este o operație deosebit de importantă în exploatare deoarece, pe baza ei, se achită obligațiile dintre furnizori și consumatori din punct de vedere al livrării și consumului de energie electrică. Unitatea folosită în practică pentru măsurarea energiei electrice este kilowatt-ora:  $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ . Instrumentele cu care se măsoară (înregistrează) energia electrică se numesc *contoare de energie electrică*. Avînd în vedere că energia electrică este egală cu integrala în raport cu timpul a puterii, contorul trebuie să aibă un dispozitiv de măsurat la care cuplul activ este proporțional cu puterea și un dispozitiv de însumare a puterii într-un interval de timp dat.

### 9.10.1. MĂSURAREA ENERGIEI ELECTRICE ÎN CURENT CONTINUU

Pentru măsurarea energiei electrice în curent continuu se folosește, aproape în exclusivitate, contorul de tip electrodinamic, a cărui schemă este reprezentată în fig. 9-70. Pe axul sistemului mobil al contorului se găsește un motor mic de curent continuu, discul de aluminiu care se rotește între polii unui magnet permanent și șurubul melcat prin care se transmite mișcarea la sistemul de înregistrare numerică a turației.

Bobina de curent a contorului, care se leagă în serie cu circuitul, este formată din înfășurările  $E_1$  și  $E_2$  de excitație ale motorului, iar bobina de tensiune, care se leagă în paralel cu circuitul, este formată din niște spire ce constituie rotorul motorului. Înfășurarea de excitație suplimentară  $E_s$  are rolul de a compensa pierderile prin frecare.

Cuplul activ  $C$ , dezvoltat de motorul de c.c., este proporțional, prin intermediul unei constante  $k_c$ , cu fluxul de excitație  $\Phi$  și cu curentul  $i$  din spirele rotorice, adică :

$$C = k_c \Phi i. \quad (9-116)$$

Pe de altă parte, fluxul  $\Phi$  este proporțional cu curentul  $I$  din circuitul principal, iar curentul  $i$ , cu tensiunea  $U$  din circuit. Deci, relația (9-116) devine :

$$C = k_a UI = k_a P. \quad (9-117)$$

Prin urmare, cuplul activ care pune în mișcare de rotație sistemul mobil al contorului este proporțional cu puterea  $P$  din circuitul de c.c.

Cuplul rezistent este determinat de interacțiunea dintre câmpul magnetic al magnetului permanent și curenții turbionari induși în discul de aluminiu prin mișcarea acestuia în câmpul magnetului, fiind proporțional cu turația  $n$  a discului :

$$C_r = k_r n. \quad (9-118)$$

Discul contorului se rotește cu turație constantă când cele două cupluri, activ și rezistent, sînt egale,  $k_a P = k_r n$ , de unde, prin înmulțire cu timpul elementar  $dt$ , se obține  $k_a P dt = k_r n dt$ , iar prin integrare rezultă :

$$k_a \int_{t_1}^{t_2} P dt = k_r \int_{t_1}^{t_2} n dt,$$

adică :

$$KW = N, \quad (9-119)$$

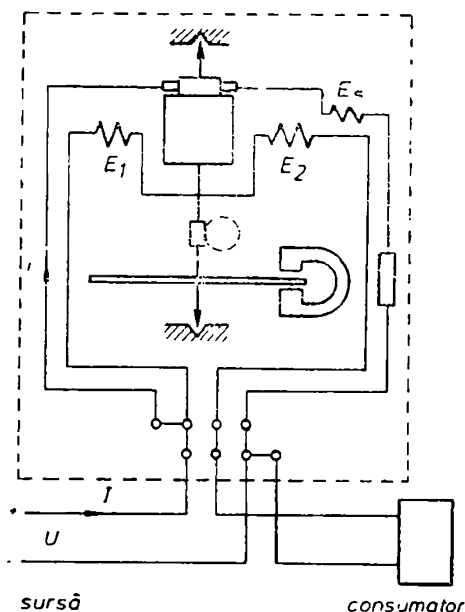


Fig. 9-70. Schema contorului electrodinamic de măsurare a energiei electrice în c.c.

unde :

$W$  este energia, măsurată în kWh ;

$N = \int_{t_1}^{t_2} n \, dt$  — numărul de rotații efectuat de contor în intervalul de timp  $t_2 - t_1$  ;

$K = \frac{k_a}{k_r}$  — constanta contorului, exprimată în rot/kWh.

Din relația (9-119) se vede că numărul de rotații  $N$  efectuate de contor în intervalul de timp  $t_2 - t_1$  este proporțional cu energia  $W$ . Mecanismul de înregistrare a numărului de rotații este astfel realizat, încît cifra citită pe cadranul contorului reprezintă tocmai valoarea energiei consumate, sau debitate, în kWh.

### 9.10.2. MĂSURAREA ENERGIEI ACTIVE LA CIRCUITE MONOFAZATE

Măsurarea energiei active în curent alternativ monofazat se face aproape exclusiv cu contoare de inducție. Contorul monofazat are o bobină de curent care se leagă în serie cu circuitul și bobina de tensiune care se leagă în paralel cu circuitul (fig. 9-71). Se remarcă faptul că schema electrică a unui contor monofazat este identică cu schema electrică a unui wattmetru.

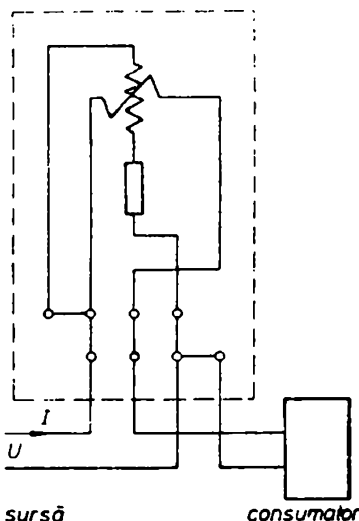


Fig. 6-71. Schema de legare a bobinelor contorului monofazat de energie activă.

Cuplul activ la contorul monofazat se determină cu ajutorul relației (9-30), în care se ține seama că fluxul  $\Phi_{1m}$  este proporțional cu valoarea efectivă  $I$  a curentului din circuit, respectiv din bobina de curent a contorului, fluxul  $\Phi_{2m}$  este proporțional cu valoarea efectivă  $U$  a tensiunii aplicată bobinei de tensiune, iar  $\psi = 90^\circ - \varphi$ . Deci :

$$C = k_a U I \cos \varphi = k_a P, \quad (9-120)$$

adică, valoarea medie în raport cu o perioadă a cuplului activ este proporțională cu puterea activă.

Printr-un raționament analog celui aplicat la contorul electrodinamic de la paragraful precedent, rezultă că numărul de rotații  $N$  al contorului de inducție este proporțional cu energia activă  $W$  (relația 9-119).

### 9.10.3. MĂSURAREA ENERGIEI REACTIVE LA CIRCUITE MONOFAZATE

Măsurarea energiei reactive la circuite monofazate se face cu ajutorul contoarelor de energie reactivă (varoră-metre). Un contor de energie reactivă este construit în așa fel, încît cuplul său activ este proporțional cu puterea reactivă. Astfel de contoare se folosesc destul de rar deoarece, în general, consumatorii monofazați, formați în majoritate din receptoare casnice, consumă numai energie activă.

#### 9.10.4. MĂSURAREA ENERGIEI ACTIVE ȘI A ENERGIEI REACTIVE LA CIRCUITE TRIFAZATE

Măsurarea energiei active și reactive la circuite trifazate se face principal la fel ca măsurarea puterii active, respectiv reactive. În practică se folosesc în acest scop contoare trifazate de energie activă (kilowattoră-metre) și, respectiv, de energie reactivă (kilovaroră-metre).

Un contor trifazat se compune din trei, sau din două contoare monofazate având ax comun, respectiv mecanism comun de înregistrare. La construcțiile noi, în loc de trei sau două discuri de aluminiu, există un singur disc.

În fig. 9-72 este arătată schema de conexiuni a unui contor trifazat de energie activă, prevăzut cu trei dispozitive. În fig. 9-73 este arătată schema de conexiuni a unui contor trifazat de energie activă, prevăzut cu două dispozitive, pentru un circuit trifazat fără conductor de nul.

La circuitele monofazate sau trifazate cu tensiuni sau curenți mari, legarea contoarelor în circuit se realizează prin intermediul transformatoarelor de măsurare, de tensiune și de curent. În fig. 9-74 este

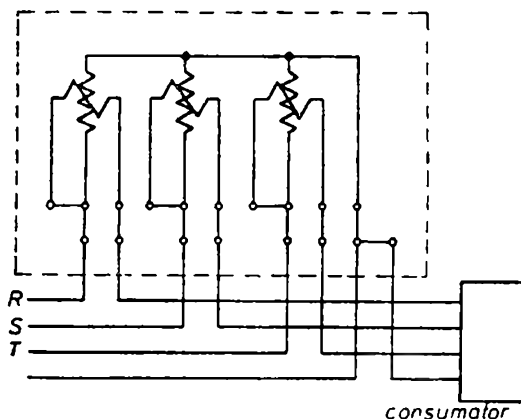


Fig. 9-72. Schema de legare a contorului trifazat pentru măsurarea energiei active, prevăzut cu trei dispozitive.

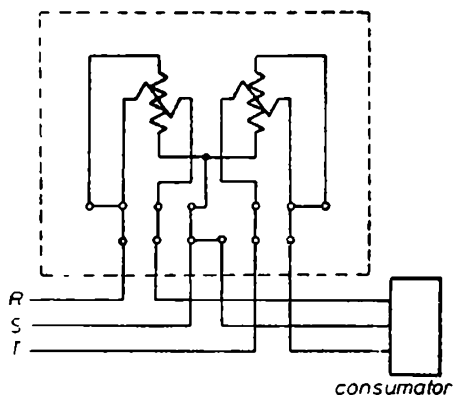


Fig. 9-73. Schema de legare a contorului cu două dispozitive pentru măsurarea energiei active la circuite trifazate.

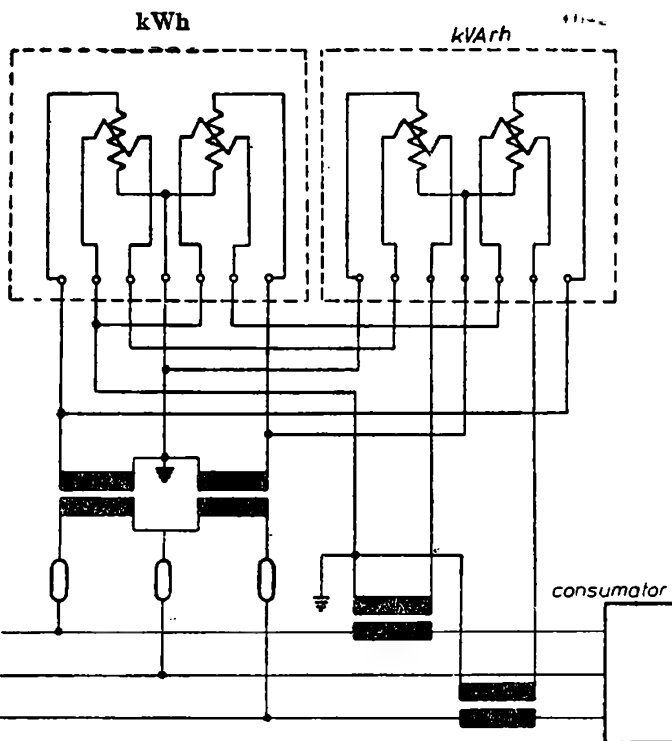


Fig. 9-74. Conectarea contoarelor de energie prin transformatoare de măsurare.

arătată schema de conexiuni prin intermediul transformatoarelor de măsurare a două contoare trifazate, unul pentru energie activă și altul pentru energie reactivă, avînd fiecare cîte două dispozitive.

## 9.11. MĂSURAREA FACTORULUI DE PUTERE

Se știe că la circuitele receptoarelor monofazate în regim sinusoidal factorul de putere este :

$$\Delta = \frac{P}{P_{max}} = \frac{P}{S} = \cos \varphi, \quad (9-121)$$

unde  $P$  este puterea activă și  $S$  este puterea aparentă.

Relația (9-121) este valabilă și pentru circuitele (receptoarele) trifazate simetrice și echilibrate, alimentate cu tensiuni sinusoidale.

Există mai multe metode de măsurare a factorului de putere la circuite de curent alternativ monofazate și trifazate.

**Măsurarea factorului de putere la circuite monofazate cu wattmetrul, voltmetrul și ampermetrul** este o metodă indirectă de măsurare, bazată pe următoarea relație de calcul a factorului de putere :

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI}. \quad (9-122)$$

Puterea activă  $P$  se măsoară cu wattmetrul, tensiunea  $U$  cu voltmetrul, iar curentul  $I$  cu ampermetrul.

Metoda prezintă inconvenientul că necesită citirea simultană a trei instrumente de măsurare, fiind însoțită de erorile de indicație și de citire respective. În afară de aceasta, cînd  $\cos \varphi$  are valori apropiate de 1, metoda nu prezintă suficientă precizie deoarece, la asemenea defazaje, o eroare oricît de mică a instrumentelor sau de citire a lor, antrenează o eroare sensibilă în determinarea valorii lui  $\cos \varphi$  și a defazajului  $\varphi$ .

**Măsurarea factorului de putere la circuite trifazate cu ajutorul a două wattmetre** este tot o metodă indirectă, aplicabilă la circuite trifazate simetrice și echilibrate.

Acest procedeu de măsurare rezultă din cele arătate la măsurarea puterii active prin metoda celor două wattmetre. Din relația (9-110) se deduce :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}(P_{w1} - P_{w2})}{P_{w1} + P_{w2}}, \quad (9-123)$$

în care  $P_{w1}$  și  $P_{w2}$  sînt puterile active măsurate la circuitul trifazat de cele două wattmetre. Rezultă :

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \left( \frac{P_{w1} - P_{w2}}{P_{w1} + P_{w2}} \right)^2}}. \quad (9-124)$$

**Măsurarea factorului de putere cu ajutorul  $\cos \varphi$ -metrului.**  $\cos \varphi$ -metrul este un instrument logometric de tip electrodinamic cu care se măsoară direct fie factorul de putere  $\cos \varphi$ , fie defazajul  $\varphi$ , la receptoare (circuite) monofazate.

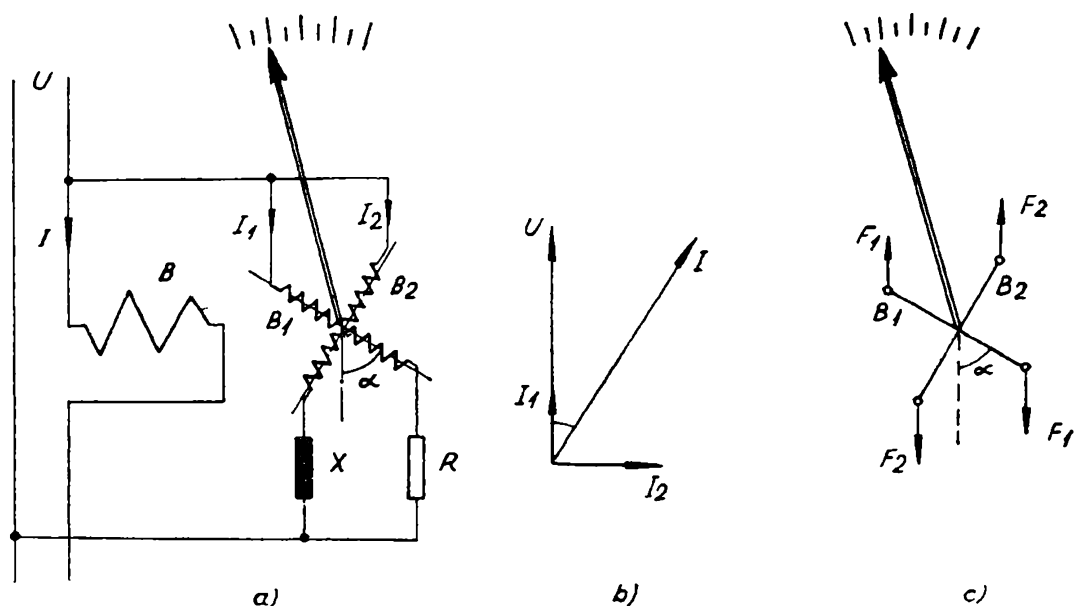


Fig. 9-75. Cos  $\varphi$ -metrul electrodinamic :  
 a — schema de principiu; b — diagrama tensiunii și curenților; c — cuplurile.

În fig. 9-75, *a* este reprezentată schema electrică a unui cos  $\varphi$ -metru monofazat de tip electrodinamic. Sistemul fix constă dintr-o bobină *B* care se leagă în serie cu circuitul, iar sistemul mobil constă din două bobine, *B*<sub>1</sub> și *B*<sub>2</sub>, așezate la 90° una față de alta. Bobina *B*<sub>1</sub> este legată în serie cu o rezistență *R* de valoare mare, iar bobina *B*<sub>2</sub> este legată în serie cu o reactanță inductivă *X* tot de valoare mare. Ambele bobine se leagă în paralel cu circuitul monofazat.

În diagrama din fig. 9-75, *b* sînt arătate defazajele curenților *I*, *I*<sub>1</sub> și *I*<sub>2</sub> din cele trei bobine față de tensiunea *U* a circuitului monofazat.

Cele două bobine *B*<sub>1</sub> și *B*<sub>2</sub> fiind străbătute de curenții *I*<sub>1</sub> și *I*<sub>2</sub> și găsindu-se în câmpul magnetic creat de curentul *I* din bobina *B*, asupra fiecăreia din ele acționează câte un cuplu. Pentru valorile medii în raport cu o perioadă a acestor cupluri, ținînd totodată seama și de unghiul  $\alpha$  din fig. 9-75, *c* care stabilește poziția în câmp a celor două bobine, se obțin expresiile :

$$C_1 = k_1 I_1 I \cos \varphi \sin \alpha, \quad (9-125)$$

$$C_2 = k_2 I_2 I \sin \varphi \cos \alpha$$

(v. aplicația 9-6).

Aceste cupluri acționează în sensuri opuse, sistemul mobil oprindu-se în poziția pentru care  $C_1 = C_2$ , adică

$$k_1 I_1 \cos \varphi \sin \alpha = k_2 I_2 \sin \varphi \cos \alpha, \quad (9-126)$$

de unde rezultă :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 I_2}{k_1 I_1} \operatorname{tg} \varphi$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha = k \operatorname{tg} \varphi, \quad (9-127)$$

unde  $k$  este o constantă ce înglobează și curenții  $I_1$  și  $I_2$  care depind numai de tensiunea  $U$  aplicată și al căror raport este independent de această tensiune. Deoarece

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}},$$

rezultă că scala instrumentului poate fi gradată în valori ale factorului de putere  $\cos \varphi$  sau în valori ale defazajului  $\varphi$ .

Din relația (9-127) se vede că, odată cu schimbarea semnului defazajului  $\varphi$ , se schimbă și sensul de indicație al instrumentului. Deci, instrumentul are scală bilaterală, într-un sens pentru valorile  $\cos \varphi$ -inductiv și în celălalt sens pentru  $\cos \varphi$ -capacitiv.

La circuite trifazate nesimetrice sau neechilibrate, măsurarea factorului de putere este o operație mai dificilă deoarece, în acest caz, factorul de putere nu se confundă cu  $\cos \varphi$ .

## 9.12. MĂSURAREA FRECVENȚEI

Măsurarea frecvenței curentului alternativ se face cu instrumentele denumite *frecvențmetre*.

**Frecvențmetrul cu rezonanță mecanică** are schița reprezentată în fig. 9-76 și constă din: electromagnetul  $E$ , a cărui bobină este parcursă de curentul alternativ cu frecvența de măsurat, armătura  $A$  legată rigid de traversa  $T$  și lamelele vibrante  $L$ , fixate de traversa  $T$ .

Forța  $F$  de atracție a armăturii  $A$  de către electromagnet are variație pulsatorie în timp (fig. 9-77), frecvența de variație a forței fiind dublă față de frecvența curentului din bobina electromagnetului. Aceasta deoarece forța de

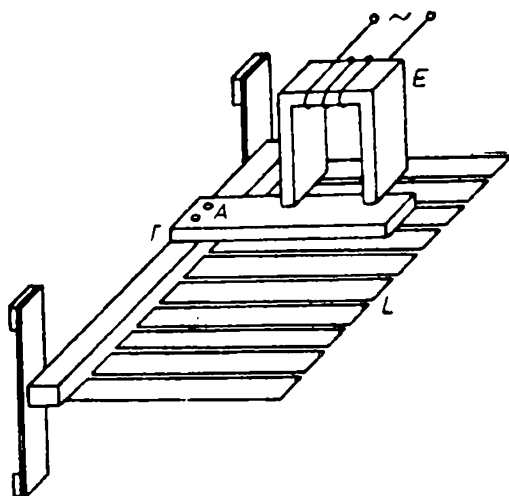


Fig. 9-76. Frecvențmetrul cu lamele vibrante.

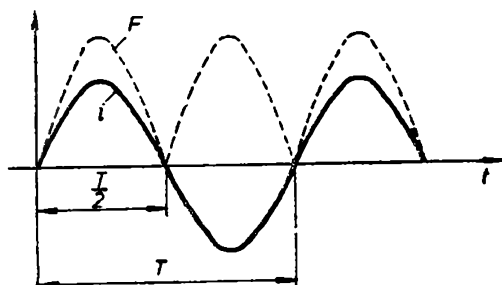


Fig. 9-77. Variația în timp a forței electromagnetului.



atracție (portantă) la un electromagnet este proporțională cu patratul inducției magnetice adică, la o altă scară, este proporțională cu patratul curentului din bobina electromagnetului (dacă circuitul magnetic nu este saturat). Deci, în timpul funcționării instrumentului, armătura  $A$ , traversa  $T$  și lamelele  $L$  vor vibra cu frecvența dublă față de frecvența curentului alternativ. Lamelele  $L$  avînd dimensiuni diferite, una din ele va intra în rezonanță, amplitudinea oscilațiilor sale fiind maximă, ceea ce se observă pe partea frontală a instrumentului, unde se văd capetele vopsite în alb ale lamelelor (fig. 9-78). Instrumentul fiind etalonat anterior, în dreptul lamelei cu amplitudine de oscilație maximă se citește valoarea în Hz a frecvenței curentului alternativ. Schimbîndu-se frecvența, se schimbă și lamela care intră în rezonanță.

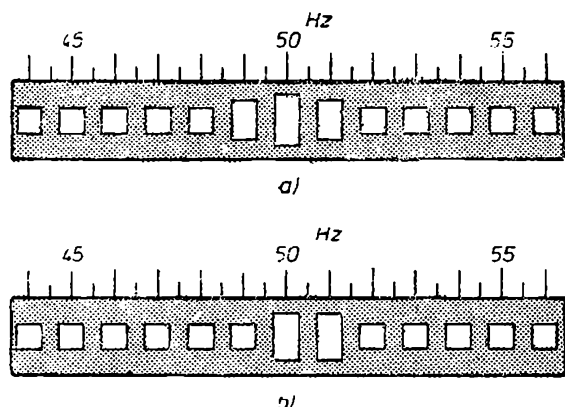


Fig. 9-78. Scala de citire a indicațiilor la frecvențmetrul cu lamele vibrante :  
a —  $f = 50$  Hz; b —  $f = 50,5$  Hz.

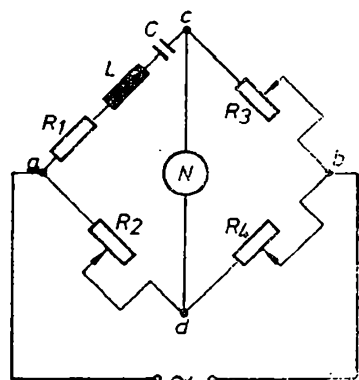


Fig. 9-79. Schema punții de c.a. pentru măsurarea frecvenței.

Frecvențmetrul cu rezonanță se leagă în circuit ca un voltmetru, adică în paralel.

Frecvențmetrul cu rezonanță electrică funcționează pe principiul punților de curent alternativ. Starea de echilibru a unei astfel de punți depinde, în anumite situații și de valoarea frecvenței tensiunii de alimentare. Deci, dacă în stare de echilibru se cunosc parametrii elementelor din cele patru brațe ale punții, rezultă frecvența la care s-a obținut acest echilibru.

În fig. 9-79 este reprezentată schema electrică a unei punți de c.a. folosită pentru măsurarea frecvenței. Condiția de echilibru se exprimă prin relația :

$$\left[ R_1 + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] R_4 = R_2 R_3,$$

adică

$$R_1 R_4 = R_2 R_3, \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,$$

de unde rezultă valoarea frecvenței măsurate :

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}. \quad (9-128)$$

Modificînd valoarea lui  $L$  sau  $C$ , se schimbă frecvența pentru care puntea este în echilibru.

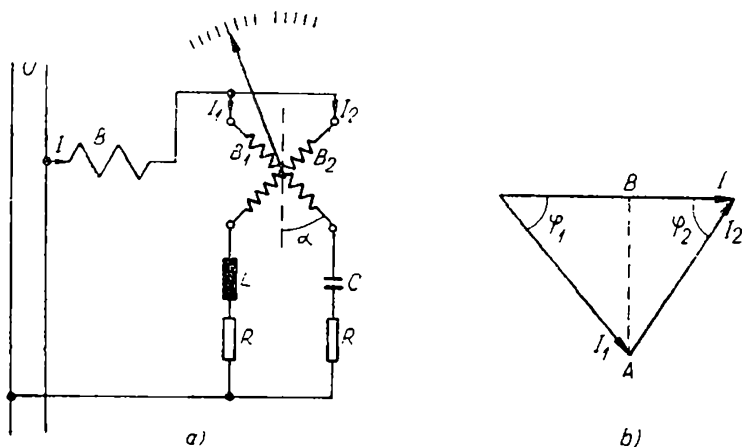


Fig. 9-80. Frecvențmetrul electrodinamic :  
a — schema de principiu; b — diagrama curenților.

Frecvențmetrul electrodinamic are principiul de funcționare analog cu  $\cos \varphi$ -metrul electrodinamic (paragraful 9.11). În fig. 9-80, a este reprezentată schema electrică a acestui tip de instrument. Conform relației (9-126), condiția de echilibru este :

$$k_1 I_1 I \cos \varphi_1 \sin \alpha = k_2 I_2 I \cos \varphi_2 \cos \alpha \quad (9-129)$$

sau

$$\frac{k_2}{k_1} \frac{I_2 \cos \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1} = \tan \alpha, \quad (9-130)$$

unde  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sînt defazajele curenților  $I_1$  și  $I_2$  față de  $I$  (fig. 9-80, b).

Pe de altă parte,  $I = I_1 + I_2$ , iar din fig. 9-80, b rezultă :

$$\overline{AB} = I_1 \sin \varphi_1 = I_2 \sin \varphi_2, \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}. \quad (9-131)$$

Înlocuind relația (9-131) în (9-130), se obține :

$$\frac{k_2}{k_1} \frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \tan \alpha. \quad (9-132)$$

Parametrii  $R$ ,  $L$  și  $C$  ai circuitului fiind ficși, defazajele  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  nu depind decît de frecvența  $f$  a tensiunii de alimentare, adică :

$$\frac{k_2}{k_1} F(f) = \tan \alpha, \quad (9-133)$$

de unde rezultă că deviația  $\alpha$  a instrumentului este o funcție de frecvența  $f$ .

### 9.13. Q-METRUL

$Q$ -metrul este instrumentul folosit pentru măsurarea factorului de calitate a bobinelor de înaltă frecvență,  $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ . Schema electrică de principiu a instrumentului constă dintr-un circuit cu rezonanță de tensiune (sau de curent), deci cu bobina de inductanță  $L$  legată în serie (sau în paralel) cu un condensator variabil cu capacitatea  $C$ . La bornele circuitului se aplică tensiunea cu valoarea efectivă  $U$  și de frecvență  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ . Cu un voltmetru (electronic) se măsoară tensiunea  $U_C$  pe condensator.

Se modifică capacitatea  $C$  pînă cînd  $U_C$  devine maxim. În această situație circuitul ajunge în regim de rezonanță și :

$$Q = \frac{U_C}{U}, \quad (9-134)$$

unde

$$U_C = U_L = \omega_0 L I \quad \text{și} \quad U = R I.$$

## Capitolul 10

### MĂSURĂRI MAGNETICE

#### 10.1. MĂSURAREA INDUCȚIEI MAGNETICE ȘI A FLUXULUI MAGNETIC

Considerînd inducția magnetică  $\vec{B}$  constantă pe secțiunea transversală  $S$  a unui miez, fluxul magnetic prin această secțiune este :

$$\Phi = BS. \quad [(10-1)]$$

Ca urmare, cunoscînd secțiunea și măsurînd fluxul magnetic, rezultă inducția magnetică sau, măsurînd inducția, rezultă fluxul.

La circuitele magnetice de c.c., fluxul magnetic, respectiv inducția magnetică sînt constante în timp și nu apare fenomenul de inducție electromagnetică. În schimb, la circuitele magnetice de c.a. aceste mărimi sînt variabile în timp și apare fenomenul de inducție electromagnetică. Aceste precizări sînt utile pentru a înțelege principiile pe care se bazează metodele de măsurare a inducției magnetice, respectiv a fluxului magnetic, ce vor fi prezentate în cele ce urmează.

##### 10.1.1. MĂSURAREA INDUCȚIEI MAGNETICE CU SONDA HALL. TESLAMETRUL HALL

Este cunoscut că tensiunea Hall  $u_H$  măsurată cu milivoltmetrul  $mV$  (fig. 10-1) este proporțională cu inducția magnetică  $B$  a cîmpului în care este plasată sonda Hall și cu curentul de comandă  $i_c$  din sondă, adică :

$$u_H = k_H B i_c, \quad (10-2)$$

unde  $k_H$  este constanta Hall. Sonda, realizată din material semiconductor, este așezată perpendicular pe direcția inducției și are dimensiuni mici.

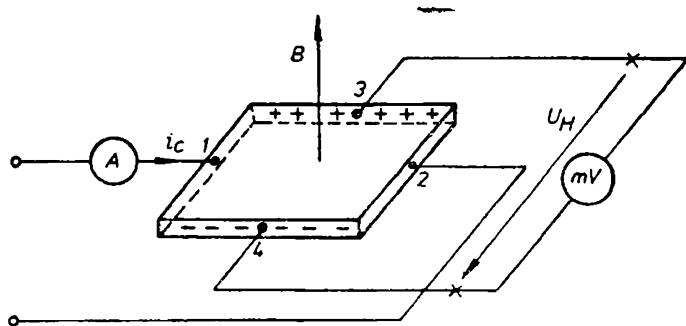


Fig. 10-1. Sonda Hall.

Deci, măsurînd tensiunea Hall și curentul de comandă și cunoscînd constanta Hall, rezultă din (10-2) valoarea inducției magnetice. Deoarece sonda are dimensiuni mici, se măsoară practic cu ajutorul ei inducția magnetică într-un punct. Evident, locul de măsurare trebuie să fie accesibil pentru sondă (întrefierul mașinilor electrice, spațiul dintre polii unui magnet sau electro-magnet etc.).

Inducția magnetică ce se măsoară poate fi constantă în timp sau cu variație periodică. În primul caz, curentul de comandă este continuu, iar în al doilea caz curentul de comandă poate fi continuu sau periodic sinusoidal.

Cunoscînd permeabilitatea magnetică a mediului în care este plasată sonda Hall, rezultă și valoarea intensității cîmpului magnetic din relația  $B = \mu H$ .

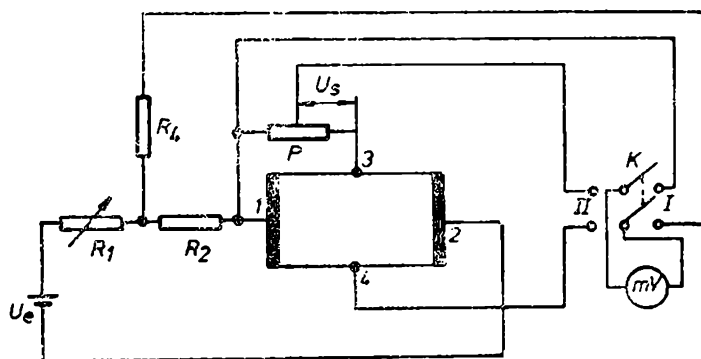


Fig. 10-2. Schema de principiu a teslametrului Hall.

*Teslametrul cu sondă Hall* este instrumentul construit pentru măsurarea inducției magnetice, avînd schema de principiu reprezentată în fig. 10-2. Curentul de comandă este asigurat de sursa de c.c. cu t.e.m.  $U_e$ . Valoarea acestui curent,  $i_c = I_c$ , trebuie păstrată în timpul măsurării aceeași cu cea de la etalonare, ceea ce se verifică cu instrumentul de măsură  $mV$ , în poziția *I* a comutatorului *K*, și se corectează prin rezistența  $R_1$  (acul indicator al instrumentului trebuie să fie în dreptul diviziunii marcată cu roșu).

Măsurarea inducției magnetice se face cu comutatorul *K* în poziția *II*. Pentru  $B=0$ , indicația instrumentului trebuie să fie zero, ceea ce înseamnă diferență de potențial nulă între electrozii 3 și 4. Corectarea în poziția zero a acului indicator se realizează cu potențiometrul *P* legat între electrozii 1 și 3, astfel că tensiunea suplimentară  $U_s$  compensează diferența de potențial inițială dintre electrozii 3 și 4.

Printr-o rezistență variabilă în trepte se realizează modificarea sensibilității teslametrului. Teslametrul de fabricație indigenă are domeniile 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2 T (cu scala instrumentului gradată direct în tesla).

Teslametrele de precizie sînt prevăzute și cu un sistem de compensare în funcție de temperatură.

Dacă inducția magnetică este cu variație sinusoidală în timp,  $B = B_m \sin \omega t$ , și curentul de comandă este continuu,  $I_c$ , instrumentul pentru măsurarea lui  $u_H$  (la altă scară pentru măsurarea lui  $B$ ) trebuie să fie de c.a. Indicația acestui instrument redă valoarea  $B_m/\sqrt{2}$ .

### 10.1.2. MĂSURAREA INDUCȚIEI MAGNETICE PE BAZA EFECTULUI GAUSS

Efectul Gauss constă în modificarea rezistenței electrice a unor tipuri de conductoare metalice, de exemplu conductoare din bismut, în funcție de intensitatea cîmpului magnetic în care sînt plasate. În acest scop, se realizează o sondă în formă de spirală și se măsoară variația rezistenței sale atunci cînd este introdusă în cîmp, această variație fiind proporțională cu inducția, respectiv cu intensitatea cîmpului magnetic.

Sonda de bismut are dezavantajul că rezistența ei se modifică și în funcție de temperatură și, în plus, prezintă un fenomen de histerezis magnetic. Ca urmare, această metodă de măsurare nu asigură precizia necesară, motiv pentru care nu este folosită pe scară largă în practică.

### 10.1.3. MĂSURAREA INDUCȚIEI MAGNETICE PE BAZA FENOMENULUI DE INDUCȚIE ELECTROMAGNETICĂ

Introducînd o bobină într-un cîmp magnetic variabil în timp, în bobină se induce o tensiune electromotoare ce poate fi măsurată. Dacă fluxul magnetic prin secțiunea bobinei variază sinusoidal în timp, valoarea efectivă a t.e.m. induse este proporțională cu amplitudinea fluxului:

$$U_e = 4,44 f \Phi_m N, \quad (10-3)$$

unde  $f$  este frecvența de variație, iar  $N$  este numărul de spire al bobinei (cîmpul magnetic din interiorul bobinei se consideră omogen).

Cunoscînd frecvența  $f$ , numărul de spire  $N$  și secțiunea  $S$  a bobinei și măsurînd tensiunea  $U_e$ , rezultă valoarea maximă a inducției magnetice:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{U_e}{4,44 f S N}. \quad (10-4)$$

Dacă cîmpul magnetic este constant în timp, măsurarea inducției magnetice pe baza fenomenului de inducție electromagnetică se realizează rotind bobina de măsurare în cîmp cu o viteză unghiulară constantă. Folosind ca instrument de măsurare galvanometrul balistic, măsurarea se face prin introducerea (sau scoaterea) rapidă a bobinei în cîmp.

**Aplicația 10-1.** Se cere să se justifice posibilitatea de măsurare a inducției magnetice în întrefierul mașinilor electrice de c.c. cu ajutorul unei bobine-sondă și a unui galvanometru balistic.

**Rezolvare.** În fig. 10-3, *a* este reprezentată schema electrică de măsurare, respectiv de calibrare a galvanometrului. În fig. 10-3, *b* este reprezentată] schița bobinei sondă care are  $N$  spire și aria medie a unei spire  $S_{med}$ .

**Calibrarea galvanometrului balistic** se face folosind sursa cu tensiunea  $U_e$  și condensatorul cu capacitatea  $C$ . Se pune comutatorul  $K$  pe poziția 2, în care condensatorul  $C$  se încarcă de la sursă. Apoi, se trece  $K$  pe poziția 3 și condensatorul se descarcă pe rezistența  $R$  legată în paralel cu galvanometrul balistic  $G$ . Bobina-sondă este în serie cu galvanometrul. La gal-

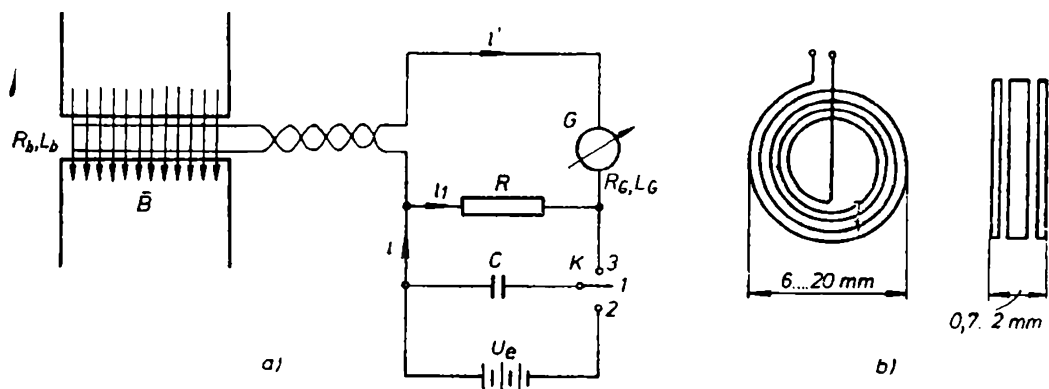


Fig. 10-3. Măsurarea inducției magnetice în întrefier cu bobină și galvanometru :  
a — schema electrică; b — bobina de măsurare.

vanometru se citește deviația  $\alpha_0$ , în funcție de care se calculează constanta  $K_G$  a galvanometrului, așa cum se arată în continuare.

Aplicînd teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitul galvanometrului, rezultă:

$$(R_b + R_G) i' + (L_b + L_G) \frac{di'}{dt} = Ri_1.$$

Integrînd în raport cu timpul cît durează descărcarea condensatorului, se obține:

$$(R_b + R_G) \int_0^t i' dt + (L_b + L_G) \int_{i'_1=0}^{i'_2=0} di' = R \int_0^t i_1 dt$$

unde  $i'_1=0$  și  $i'_2=0$  sînt curenții prin circuitul galvanometrului la începutul și la sfîrșitul descărcării condensatorului. Avînd în vedere că  $\int i dt = Q = Q' + Q_1 = CU$ , relația de mai sus devine:

$$(R_b + R_G) Q' = RQ_1, \text{ sau } (R_b + R_G + R) Q' = RQ = RCU.$$

Deviația  $\alpha_0$  a galvanometrului balistic este proporțională cu sarcina  $Q'$ , adică  $Q' = K_G \alpha_0$ , deci

$$(R_b + R_G + R) K_G \alpha_0 = RCU,$$

de unde se obține constanta galvanometrului:

$$K_G = \frac{RCU}{(R_b + R_G + R) \alpha_0}. \quad (10-5)$$

Sensibilitatea galvanometrului balistic se stabilește alegînd o valoare potrivită pentru rezistența  $R$

Măsurarea inducției magnetice în întrefier se realizează scoțînd repede bobina-sondă din cîmp, astfel încît fluxul magnetic prin suprafața sa se modifică de la  $\Phi$  la 0. Întreruptorul

$K$  fiind pus pe poziția 3, apare în circuitul galvanometrului balistic un impuls de curen  $i''$  care provoacă deviația  $\alpha_1$ . Relațiile de calcul sînt următoarele :

$$(R_b + R_G + R) i'' + (L_b + L_G) \frac{di''}{dt} = - N S_{med} \frac{dB}{dt},$$

$$(R_b + R_G + R) \int_0^t i'' dt + (L_b + L_G) \int_{i_1''=0}^{i_2''=0} di'' = - N S_{med} \int_B^0 dB,$$

$$(R_b + R_G + R) Q'' = N S_{med} B ; Q'' = K_G \alpha_1.$$

Deci

$$B = \frac{(R_b + R_G + R) K_G \alpha_1}{N S_{med}}$$

sau înlocuind  $K_G$  din (10-5), se obține :

$$B = \frac{RCU}{N S_{med}} \frac{\alpha_1}{\alpha_0}. \quad (11-6)$$

Întrebarea care se pune este : cît de repede trebuie scoasă bobina-sondă din cîmp ? Se fac în acest sens mai multe încercări, scoțînd din ce în ce mai repede bobina din cîmp. Deviația  $\alpha_1$  obținută la galvanometrul balistic este din ce în ce mai mare, pînă la un moment dat, cînd nu mai crește. Viteza avută la încercarea respectivă este cea corectă.

#### 10.1.4. FLUXMETRUL

Fluxmetrul este un instrument cu ajutorul căruia se măsoară variații ale fluxului magnetic. Este de tip magnetoelectric, fără cuplu rezistent, deci fără resoarte spirale, avînd schema reprezentată în fig. 10-4. Bobina sistemului

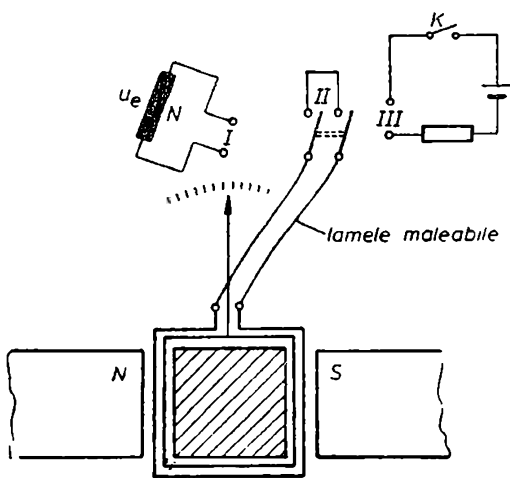


Fig. 10-4. Schema fluxmetrului.

mobil se poate conecta prin intermediul unor lamele maleabile și a unui comutator cu trei poziții în următoarele trei situații :

În poziția *I*, de măsurare, bobina sistemului mobil este conectată la bornele bobinei de măsurare prevăzute cu  $N$  spire, în care fluxul magnetic variabil de măsurat induce tensiunea electromotoare  $u_e$ .

În poziția *II*, de transport, bobina sistemului mobil este legată în scurtcircuit.

Poziția *III* se folosește pentru aducerea la zero a instrumentului.

În poziția de măsurare *I*, asupra sistemului mobil acționează următoarele cupluri :



Cuplul activ are valoarea momentană :

$$c = k_a i, \quad (10-7)$$

unde  $i$  este curentul din bobina mobilă determinat de t.e.m.  $u_a$  indusă în bobina de măsurare.

Cuplul de amortizare este proporțional cu viteza unghiulară :

$$C_A = k_A \frac{d\alpha}{dt}, \quad (10-8)$$

unde  $\alpha$  este unghiul de deviație al sistemului mobil.

Cuplul de inerție (dinamic) este :

$$C_J = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (10-9)$$

unde  $J$  este momentul de inerție al sistemului mobil.

Cu aceste cupluri se obține următoarea ecuație de mișcare a sistemului mobil :

$$C_J + C_A = c]$$

sau

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_A \frac{d\alpha}{dt} = k_a i. \quad (10-10)$$

Înmulțind relația (10-10) cu  $dt$  și integrând-o între limitele  $t_1$  și  $t_2$ , rezultă :

$$J \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} d\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + k_A \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = k_a \int_{t_1}^{t_2} i dt, \quad (10-11)$$

unde limitele de integrare s-au stabilit astfel :

$$\text{la } t=t_1 \text{ avem } \alpha=\alpha_1 \text{ și } \frac{d\alpha}{dt} = \Omega_1;$$

$$\text{la } t=t_2 \text{ avem } \alpha=\alpha_2 \text{ și } \frac{d\alpha}{dt} = \Omega_2.$$

Dacă se ține seama că sistemul mobil se mișcă dintr-o poziție de repaus în altă poziție de repaus, adică  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ , din (10-11) se obține :

$$k_A (\alpha_2 - \alpha_1) = k_a Q, \text{ sau } k_A \Delta\alpha = k_a Q, \quad (10-12)$$

unde  $\alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\alpha$  și  $\int_{t_1}^{t_2} i dt = Q$ .

În continuare, trebuie să stabilim legătura dintre variația fluxului magnetic și deviația sistemului mobil al fluxmetrului.

Aplicînd teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitul de măsurare, se obține :

$$u_a - L \frac{di}{dt} = Ri \quad (10-13)$$

unde  $L$  și  $R$  sînt inductanța și rezistența electrică a acestui circuit (bobina mobilă și bobina de măsurare).

T.e.m. indusă în bobina de măsurare se determină cu legea inducției electromagnetice în funcție de variația în timp a fluxului magnetic (înlănțuirii magnetice) de măsurat.

$$u_e = - \frac{d\psi}{dt} \quad (\psi = N\Phi) \quad (10-14)$$

Înlocuind relația (10-14) în (10-13) se obține :

$$- \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (10-15)$$

sau

$$-d\psi = L di + Ri dt. \quad (10-16)$$

Prin integrare, rezultă :

$$- \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = L \int_{i_1}^{i_2} di + R \int_{t_1}^{t_2} i dt, \quad (10-17)$$

unde s-au introdus următoarele limite de integrare :

la  $t=t_1$  avem  $\psi=\psi_1$  și  $i=i_1$  ;

la  $t=t_2$  avem  $\psi=\psi_2$  și  $i=i_2$ .

Dacă se consideră că fluxul magnetic (înlănțuirea) are o variație în treaptă de la  $\psi_1$  la  $\psi_2$ , curentul din circuit este nul atât înainte, cât și după această variație ( $i_1=i_2=0$ ). În această situație, din (10-17) rezultă :

$$\psi_1 - \psi_2 = RQ$$

sau

$$\Delta\psi = RQ \quad (10-18)$$

unde  $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$  și  $Q = \int_{t_1}^{t_2} i dt$  (sarcina electrică transportată de curentul  $i$  prin circuit în intervalul de timp  $t_2 - t_1$ ).

Din relațiile (10-12) și (10-18) rezultă :

$$\Delta\psi = R \frac{k_A}{k_a} \Delta\alpha, \text{ sau } \Delta\psi = K_\Phi \Delta\alpha, \quad (10-19)$$

unde  $K_\Phi = R \frac{k_A}{k_a}$  este constanta fluxmetrului.

Se constată că deviația  $\Delta\alpha$  a fluxmetrului este proporțională cu variația fluxului magnetic  $\Delta\psi = N\Delta\Phi$ . De asemenea, se remarcă faptul că poziția inițială  $\alpha_1$  a sistemului mobil poate fi oarecare deoarece în relația (10-19) intervine diferența  $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ .

La variații mari ale fluxului magnetic, fluxmetrul se șuntează cu o rezistență electrică.

În situația că variația fluxului magnetic se face de la valoarea  $\Phi$  la valoarea zero, adică

$$\Delta\psi = \psi = N\Phi = NS_b B \quad (10-20)$$

și, dacă secțiunea  $S_b$  a miezului bobinei de măsurare este cunoscută, rezultă posibilitatea măsurării cu ajutorul fluxmetrului și a inducției magnetice  $B$ .

Cu ajutorul fluxmetrului se poate măsura și sarcina electrică  $Q$ , ceea ce rezultă din relațiile (10-18) și (10-19) adică :

$$Q = \frac{K_{\Phi}}{R} \Delta\alpha. \quad (10-21)$$

## 10.2. MĂSURAREA INTENSITĂȚII CÎMPULUI MAGNETIC

În afară de posibilitățile de măsurare a intensității cîmpului magnetic amintite la paragraful 10.1, adică pe baza cunoașterii inducției magnetice și a permeabilității mediului, se mai pot folosi și următoarele metode :

### 10.2.1. MĂSURAREA INTENSITĂȚII CÎMPULUI MAGNETIC PE BAZA LEGII CIRCUITULUI MAGNETIC

Intensitatea cîmpului magnetic din interiorul unei bobine toroidale (fig. 10-5) se poate determina pe baza legii circuitului magnetic :  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$ , de unde rezultă :

$$Hl = NI, \text{ sau } H = \frac{NI}{l}, \quad (10-22)$$

unde  $N$  este numărul de spire a bobinei,  $l$  este lungimea liniei de cîmp (linia de integrare), iar  $I$  este curentul din bobină. Deci, cunoscînd pe  $N$  și  $l$  și măsurînd pe  $I$ , rezultă  $H$ .

Se observă că produsul  $NI = \text{const.}$ , în timp ce lungimea  $l$  este mai mare spre periferie și mai mică spre interiorul bobinei. Înseamnă că  $H$  este mai mare în partea interioară a bobinei și mai mic în partea exterioară. Valoarea medie  $H_{med}$  rezultă pentru lungimea medie  $l_{med}$  a bobinei.

Dacă diametrul bobinei este mult mai mic în raport cu diametrul torului, se poate considera că  $H = \text{const.}$  pe toată secțiunea torului.

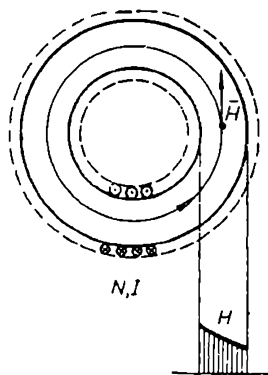


Fig. 10-5. Bobină în formă de tor.

### 10.2.2. METODA MAGNETOMETRICĂ

Fie  $H_2$  intensitatea cîmpului magnetic de măsurat (fig. 10-6). Perpendicular pe direcția lui  $H_2$  se găsește un cîmp magnetic de intensitate cunoscută  $H_1$ , care poate fi chiar cîmpul magnetic terestru.

Cu ajutorul unui ac magnetic se determină direcția intensității cîmpului magnetic rezultat, adică unghiul  $\alpha$ . Cunoscînd pe  $\alpha$  rezultă :

$$H_2 = H_1 \operatorname{tg} \alpha. \quad (10-23)$$

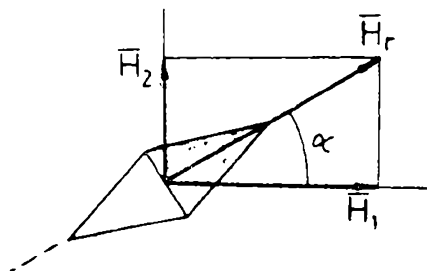


Fig. 10-6. Principiul metodei magnetometrice.

## 10.3. MĂSURAREA CARACTERISTICILOR MAGNETICE A MATERIALELOR FEROMAGNETICE

### 10.3.1. DETERMINAREA CICLULUI DE HISTEREZIS CU AJUTORUL OSCILOSCOPULUI

Ciclul de histerezis  $B(H)$  constituie o caracteristică fundamentală a materialelor magnetice cu histerezis, în special a celor feromagnetice. Dependent de forma ciclului histerezis rezultă inducția magnetică de saturație, inducția magnetică remanentă, cîmpul magnetic coercitiv, pierderile prin histerezis (proportionale cu suprafața delimitată de ciclu) etc. Inclusiv curba de magnetizare se

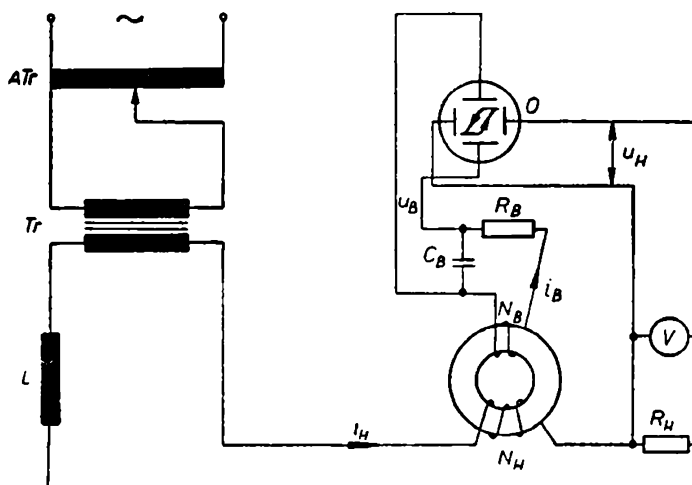


Fig. 10-7. Schema electrică de principiu pentru determinarea cu osciloscopul a ciclului de histerezis.

obține prin unirea vîrfurilor ciclurilor de histerezis principale (obținute pentru diferite valori ale lui  $H_{max}$ ).

Schema electrică de principiu a instalației de determinare cu ajutorul osciloscopului a ciclului de histerezis este reprezentată în fig. 10-7, în care :  $M$  este miezul magnetic în formă de tor, al cărui ciclu de histerezis se determină,  $T_r$  este un transformator care are rolul de a nu permite trecerea în circuitul de măsurare a componentelor continue ale tensiunii de alimentare,  $L$  este o bobină de filtrare care asigură pentru curentul  $i_H$  o variație sinusoidală, iar  $O$  este osciloscopul pe ecranul căruia apare ciclul de histerezis.

Magnetizarea miezului  $M$  se realizează de către bobina cu  $N_H$  spire parcurse de curentul sinusoidal  $i_H$ . Avînd în vedere relația :

$$H = \frac{N_H i_H}{l}, \quad (10-24)$$

unde  $l$  este lungimea medie a miezului, se observă că intensitatea  $H$  a cîmpului magnetic din miez este proporțională cu  $i_H$ , respectiv cu căderea de tensiune  $u_H$  provocată de acest curent pe rezistența  $R_H$ . Tensiunea  $u_H = R_H i_H$  este aplicată la plăcile verticale ale osciloscopului și poate fi măsurată în același timp cu voltmetrul  $V$ .

Deci, deviația pe orizontală a spotului osciloscopului este proporțională cu intensitatea  $H$  a câmpului magnetic din miezul feromagnetic.

Variația fluxului magnetic din secțiunea  $S$  a bobinei de măsurare cu  $N_B$  spire produce în această bobină tensiunea electromotoare :

$$u_{eB} = - \frac{d\psi}{dt} = -N_B \frac{d\Phi}{dt} = -N_B S \frac{dB}{dt}. \quad (10-25)$$

Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff și cu notațiile din fig. 10-7, rezultă :

$$u_{eB} = R_B i_B + \frac{1}{C_B} \int i_B dt \quad (10-26)$$

sau, în valori efective :

$$U_{eB} = I_B \sqrt{R_B^2 + \left(\frac{1}{\omega C_B}\right)^2} = I_B \frac{\sqrt{R_B^2 \omega^2 C_B^2 + 1}}{\omega C_B}. \quad (10-27)$$

Dacă se aleg parametrii  $R_B$  și  $C_B$  astfel ca

$$R_B^2 \omega^2 C_B^2 \gg 1, \quad (10-28)$$

se obține :  $U_{eB} = I_B R_B$ , de unde rezultă :

$$I_B = \frac{U_{eB}}{R_B}, \text{ respectiv } i_B = \frac{u_{eB}}{R_B} = - \frac{N_B S}{R_B} \frac{dB}{dt}. \quad (10-29)$$

Tensiunea aplicată la plăcile orizontale ale osciloscopului este :

$$u_B = \frac{1}{C_B} \int i_B dt = - \frac{N_B S}{R_B C_B} \int dB = k_B B, \quad (10-30)$$

adică deviația spotului pe verticală se face proporțional cu valorile inducției magnetice  $B$ .

Deci, deviația pe orizontală a spotului este proporțională cu  $H$  și deviația pe verticală este proporțională cu  $B$ . Astfel, pe ecranul osciloscopului apare ciclul de histeresis  $B(H)$ .

La realizarea schemei, este necesar să se pună și condiția ca  $N_B i_B \ll N_H i_H$ , adică intensitatea  $H$  a câmpului magnetic din miez să fie determinată numai de amperspirele  $N_H i_H$ , cu variație sinusoidală în timp.

Există și alte metode de determinare a ciclului de histeresis, care pot fi găsite în literatura de specialitate.

### 10.3.2. DETERMINAREA CURBEI DE MAGNETIZARE CU AJUTORUL PERMEAMETRULUI (PERMEAMETRUL ILIOVICI)

Cu ajutorul permeametrului se determină curba de magnetizare, în c.c., a materialelor feromagnetice.

Principiul de funcționare al unui permeametru se explică pe baza schemei aparatului din fig. 10-8, care constă dintr-un jug din material feromagnetic, o probă realizată din materialul a cărui curbă de magnetizare se determină, o bobină de excitație cu  $N_1$  spire, parcursă de curentul continuu  $I_1$  și o bobină de măsurare legată la fluxmetrul  $F$ .

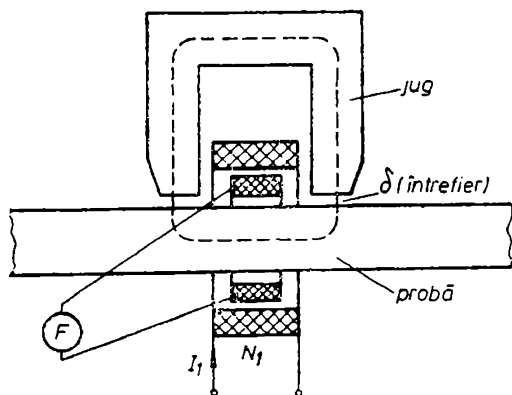


Fig. 10-8. Schema permeametrului fără compensare.

Din legea circuitului magnetic  $\oint \vec{H} d\vec{l} = NI$  aplicată la circuitul magnetic din fig. 10-8, rezultă :

$$H_p l_p + H_j l_j + 2 H_\delta \delta = N_1 I_1, \quad (10-31)$$

unde  $H_p$ ,  $l_p$ ,  $H_j$ ,  $l_j$ ,  $H_\delta$  și  $\delta$  sînt intensitățile cîmpului magnetic, respectiv lungimile (mijlocii) pentru probă, jug și întrefierul existent între probă și jug.

Din relația (10-31) se obține :

$$H_p = \frac{N_1 I_1}{l_p} - \left( H_j \frac{l_j}{l_p} + 2 H_\delta \frac{\delta}{l_p} \right), \quad (10-32)$$

de unde, dacă se poate neglija paranteza din membrul drept, rezultă :

$$H_p = \frac{N_1 I_1}{l_p}. \quad (10-33)$$

Adică, cunoscînd pe  $N_1$  și  $l_p$  și măsurînd  $I_1$ , rezultă  $H_p$ .

Pentru ca neglijaarea parantezei din (10-32) să fie posibilă, este necesar ca întrefierul  $\delta$  să fie cît mai mic, ceea ce se obține prin șlefuirea suprafețelor, și pentru ca  $H_j$  să fie neglijabil este necesar ca  $\mu_j \gg \mu_p$ .

Inducția  $B_p$  din materialul probei se măsoară cu ajutorul fluxmetrului  $F$ , adică se întrerupe curentul  $I_1$  și rezultă o variație a fluxului magnetic în bobina de măsură de la valoarea  $\Phi_1$  la zero. Se obține :

$$B_p = \frac{\Phi_1}{S_p}. \quad (10-34)$$

În acest fel se măsoară perechea de valori  $H_p$  și  $B_p$  corespunzătoare unui anumit curent  $I_1$ . Dînd lui  $I_1$  o altă valoare, se obține o altă pereche de valori pentru intensitatea cîmpului magnetic și inducția magnetică din probă, ș.a.m.d.

Cu perechile de valori măsurate pentru  $B$  și  $H$  se trasează punct cu punct curba de magnetizare.

Permeametrul Ilievici, reprezentat în fig. 10-9, este prevăzut cu un circuit magnetic de compensare, cu scopul ca eroarea comisă prin neglijaarea parantezei din (10-32) să fie minimă, respectiv ca relația (10-33) să fie cît mai exactă.

Cu notațiile din fig. 10-9, se obțin relațiile :

$$H_p l_p + H_j l_j = N_1 I_1 + N_c I_c, \quad (10-35)$$

$$H_j l_j + H'_j l'_j = N_c I_c, \quad (10-36)$$

unde  $N_c$  și  $I_c$  sînt numărul de spire și curentul din bobina de compensare. Dacă se realizează condiția :

$$H_j l_j = H_c I_c \quad (10-37)$$

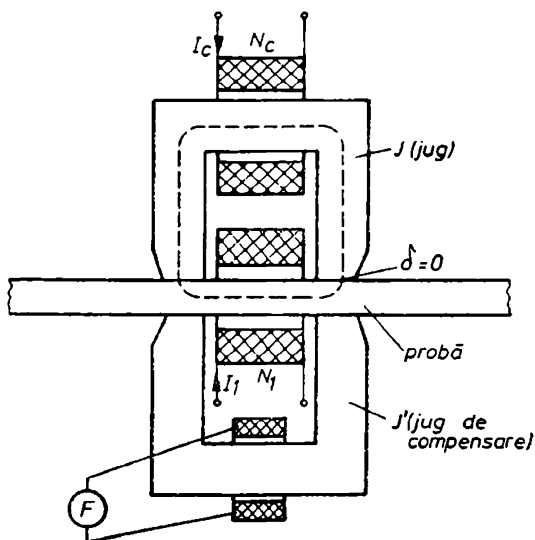


Fig. 10-9. Schema permeametrului Ilievici.

atunci, din (10-36) rezultă  $H'_j l'_j = 0$ , adică  $H'_j = 0$ , iar din (10-35) se obține (10-33), adică

$$H_p = \frac{N_1 I_1}{l_p}.$$

Condiția de compensare  $H'_j = 0$  se verifică cu ajutorul fluxmetrului  $F$  astfel : la valoarea dată a curentului  $I_1$  se modifică curentul de compensare  $I_c$  pînă în momentul în care fluxmetrul nu indică o variație de flux magnetic prin secțiunea jugului de compensare  $J'$  atunci cînd se întrerup simultan curenții  $I_1$  și  $I_c$ .

Așa cum s-a precizat mai sus, curba de magnetizare a materialului probei se obține punct cu punct, dînd lui  $I_1$  diverse valori și realizînd condiția de compensare (10-37) pentru fiecare valoare.

### 10.3.3. FEROMETRUL

Ferometrul este aparatul cu care se pot măsura : inducția magnetică  $B$ , intensitatea  $H$  a cîmpului magnetic și pierderile în fier pentru materiale feromagnetice. Cu valorile măsurate pentru  $B$  și  $H$  se poate trasa curba de magnetizare.

Schema electrică a ferometrului este reprezentată în fig. 10-10, care conține următoarele elemente : autotransformatorul de rețea  $AT$ , regulatorul de fază

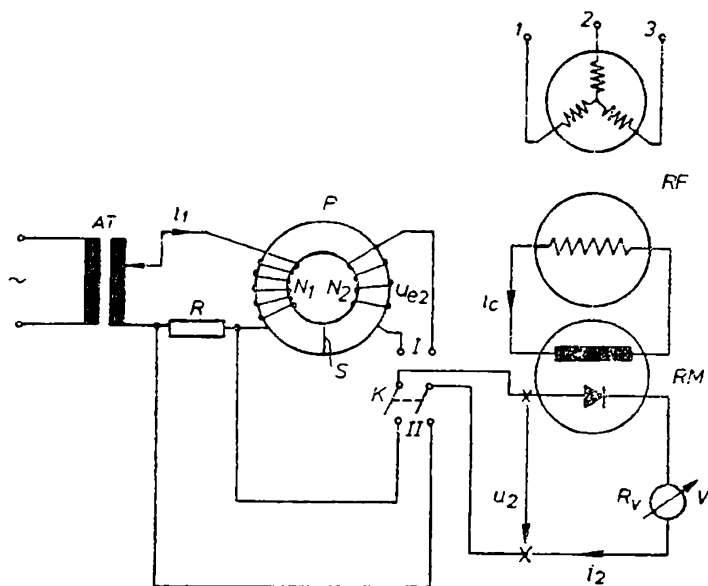


Fig. 10-10. Schema electrică de principiu a ferometrului.

$RF$  cu ajutorul căruia se modifică faza curentului alternativ de comandă  $i_c$ , redresorul mecanic  $RM$ , voltmetrul de tip magnetoelectric  $V$  și proba  $P$ , cu secțiunea  $S$ , realizată în formă toroidală din materialul de încercat.

Curentul de comandă  $i_c$  obținut de la regulatorul de fază  $RF$  are aceeași frecvență ca și curentul  $i_1$  de magnetizare a probei, provenit de la autotransformatorul  $AT$ .

Curentul  $i_2$  prin voltmetrul  $V$  este provocat fie de tensiunea electromotoare  $u_{e2} = -L_{12} \frac{di_1}{dt}$  indusă în bobina secundară  $N_2$  (poziția  $I$  a comutatorului  $K$ ), fie de căderea de tensiune  $u_R = Ri_1$  provocată pe rezistența  $R$  de curentul  $i_1$  din bobina primară  $N_1$  (poziția  $II$  a comutatorului  $K$ ).

Redresorul mecanic are contactul închis și va permite trecerea curentului  $i_2$  numai atît timp cît curentul  $i_c$  care îl comandă este pozitiv. Deci, acest redresor va permite trecerea prin voltmetrul  $V$  a curentului  $i_2$  numai în timpul alternanțelor pozitive ale curentului de comandă  $i_c$ , iar în timpul alternanțelor negative con-

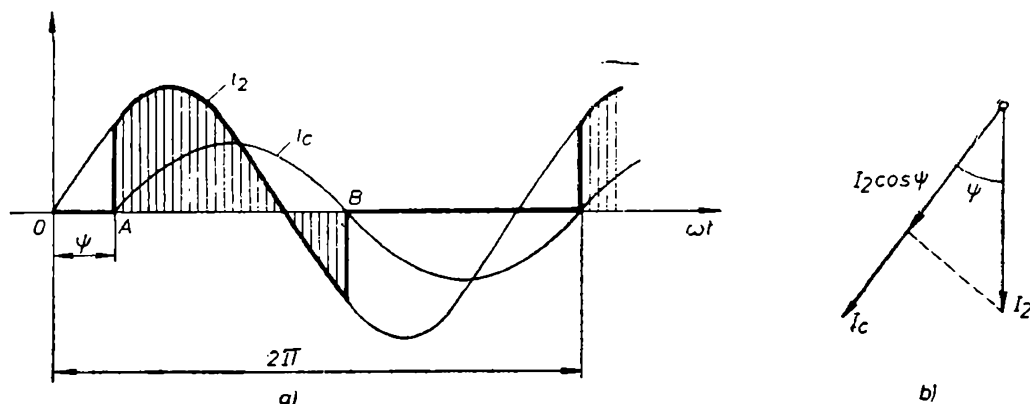


Fig. 10-11. Defazajul  $\psi$  dintre curentul de comandă și curentul măsurat la ferometru :  
a — în diagrama liniară; b — în diagrama fazorială.

tactele redresorului mecanic sînt deschise și  $i_2 = 0$ . În fig. 10-11, a este notat cu  $AB$  intervalul din perioada  $2\pi$  cînd curentul  $i_2 \neq 0$  și cu  $\psi$  defazajul dintre  $i_c$  și  $i_2$ . În fig. 10-11, b este reprezentată diagrama fazorială a celor doi curenți, considerați cu variație sinusoidală în timp.

Instrumentul de măsurare  $V$  fiind de tip magnetoelectric, are deviația proporțională cu valoarea medie  $I_{2med}$  a curentului  $i_2$  care, la rîndul său, este proporțională cu  $I_2 \cos \psi$  (v. aplicația 10-2). Cu alte cuvinte, voltmetrul  $V$ , avînd rezistența interioară  $R_v$  foarte mare, măsoară o tensiune medie proporțională cu proiecția curentului  $I_2$  pe direcția curentului de comandă  $I_c$  (fig. 10-11, b) :

$$U_{2med} = R_v I_{2med} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} R_v I_2 \cos \psi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_2 \cos \psi, \quad (10-38)$$

unde  $R_v I_2 = U_2$  este valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale de la bornele voltmetrului cu redresor.

Funcționarea ferometrului pentru determinarea punct cu punct a curbei de magnetizare constă în următoarele :

În poziția  $I$  a comutatorului  $K$ , curentul  $i_2 = i_{2I}$  prin voltmetrul  $V$  este determinat de t.e.m.  $u_{e2}$  indusă în bobina secundară  $N_2$ , avînd valoarea efectivă :

$$U_{e2} = 4,44 f N_2 S B_{max}, \quad (10-39)$$

unde  $4,44 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ .



Ținând seama că circuitul închis al voltmetrului are practic caracter rezistiv și că  $i_2$  este de valoare mică ( $R_v$  foarte mare), rezultă  $U_{2I} = U_{e2}$ , respectiv  $I_{2I}$  este în fază cu  $U_{e2}$  (fig. 10-12, a). În aceste condiții, relația (10-38) devine :

$$U_{2medI} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_{e2} \cos \psi = 2fN_2SB_{max} \cos \psi. \quad (10-40)$$

Se reglează faza curentului de comandă  $i_c$  pînă cînd indicația  $U_{2medI}$  a voltmetrului devine maximă, adică  $\psi = 0$ . În această situație, conform celor explicate mai sus, înseamnă că  $I_{cI}$  este în fază cu  $I_{2I}$ , respectiv cu  $U_{e2}$  (fig. 10-12, a) și relația (10-40) obține forma :

$$(U_{2medI})_{max} = 2fN_2SB_{max}, \quad (10-41)$$

de unde rezultă :

$$B_{max} = \frac{(U_{2medI})_{max}}{2fN_2S}. \quad (10-42)$$

Astfel se determină inducția magnetică maximă în miezul probei, cu comutatorul  $K$  în poziția  $I$ .

Pentru determinarea intensității cîmpului magnetic  $H_{max}$  în miezul probei, se lasă în prima etapă a măsurării comutatorul  $K$  în poziția  $I$  și se modifică faza curentului de comandă  $i_c$  pînă cînd voltmetrul  $V$  indică zero, ceea ce înseamnă  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , adică  $I_{cI}$  perpendicular pe  $U_{e2}$  (fig. 10-12, b).

În a doua etapă a măsurării, se trece comutatorul  $K$  în poziția  $II$ , fără a schimba faza curentului de comandă. În această situație, curentul  $i_2 = i_{2II}$  prin voltmetrul  $V$  este determinat de căderea de tensiune pe rezistența  $R$ , provocată de curentul  $i_1$ . În fig. 10-12, b este arătat că curentul  $I_1$  are două componente ortogonale :  $I_{\mu 1}$  — curentul de magnetizare a miezului probei, care determină fluxul  $\Phi = SB$  și componenta  $I_{a1}$ , corespunzătoare pierderilor din miez. T.e.m.  $U_{e2}$  este defazată în urmă cu  $\pi/2$  față de  $\Phi$ , adică față de  $I_{\mu 1}$ , iar  $I_{cII}$  este în fază (sau opoziție de fază) cu  $I_{\mu 1}$  (ceea ce a condus în prima etapă a măsurării la  $U_{2medI} = 0$ ).

Tensiunea  $U_{2medII}$  măsurată de voltmetrul  $V$ , așa cum s-a arătat mai sus, este proporțională cu proiecția curentului  $I_1$  pe direcția curentului de comandă  $I_{cII}$ , adică :

$$U_{2medII} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} RI_1 \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\pi} RI_{\mu 1}, \quad (10-43)$$

de unde rezultă :

$$I_{\mu 1} = \frac{\pi U_{2medII}}{\sqrt{2} R}. \quad (10-44)$$

Cunoscînd curentul de magnetizare  $I_{\mu 1}$  (valoarea efectivă), din legea circuitului magnetic se deduce valoarea maximă a intensității cîmpului magnetic în miez :

$$H_{max} = \frac{\sqrt{2} I_{\mu 1} N_1}{l} \quad (10-45)$$

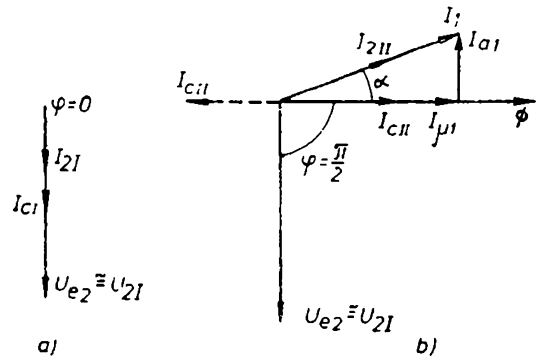


Fig. 10-12. Diagrama fazorială a ferometru-lui :

a — comutatorul  $K$  în poziția  $I$  (măsurarea lui  $B$ ) ;  
b — comutatorul  $K$  în poziția  $II$  (măsurarea lui  $H$ ).

unde  $l$  este lungimea medie a miezului și  $\sqrt{2} I_{\mu 1}$  este valoarea maximă a curentului de magnetizare.

Deci, s-au măsurat cu ajutorul ferometrului  $B_{max}$  (relația 10-42) și  $H_{max}$  (relația 10-45) din materialul probei, adică s-a obținut un punct al curbei de magnetizare.

Cu ajutorul autotransformatorului  $AT$  se dau mai multe valori curentului  $I_1$  și se obțin perechi de valori  $B_{max}$ ,  $H_{max}$  cu care se trasează curba de magnetizare.

**Aplicația 10-2.** Să se justifice că valoarea medie a curentului  $i_2$  ce trece prin instrumentul magnetoelectric  $V$ , alimentat prin redresorul mecanic  $RM$  (fig. 10-10), este  $I_2 \cos \psi$ , în care  $I_2$  este valoarea efectivă a acestui curent (sinusoidal) și  $\psi$  este defazajul curentului  $i_2$  față de curentul de comandă  $i_c$  (fig. 10-11).

**Rezolvare.** Valoarea medie, în raport cu o perioadă, a curentului  $i_2$  permis de către redresorul mecanic  $RM$  să treacă prin voltmetrul  $V$  (fig. 10-11) este :

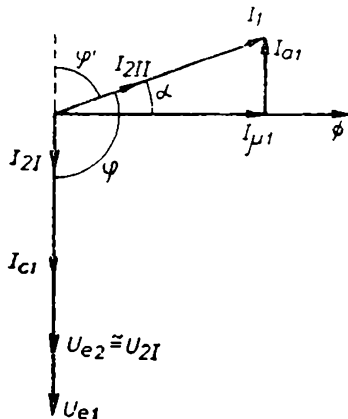
$$I_{2med} = \frac{1}{T} \int_{\frac{\psi}{\omega}}^{\frac{\pi+\psi}{\omega}} i_2 dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{\psi}{\omega}}^{\frac{\pi+\psi}{\omega}} \sqrt{2} I_2 \sin \omega t dt =$$

$$= \frac{1}{T} \sqrt{2} I_2 \frac{1}{\omega} \left| -\cos \omega t \right|_{\frac{\psi}{\omega}}^{\frac{\pi+\psi}{\omega}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} I_2 \cos \psi.$$

**Măsurarea pierderilor în fier** cu ajutorul ferometrului se realizează în felul următor :

Pierderile în fier sînt date de relația :

$$P_{Fe} = U_{e1} I_1 |\cos \varphi| = U_{e1} I_1 \cos \varphi' = U_{e1} I_1 \sin \alpha = U_{e1} I_{a1}, \quad (10-46)$$



unde  $U_{e1}$  este valoarea efectivă a tensiunii induse în bobina primară cu  $N_1$  spire,  $I_1$  este curentul din primar,  $\varphi = \pi - \varphi' = \frac{\pi}{2} + \alpha$  este defazajul dintre aceste două mărimi și  $I_2 \sin \alpha = I_{a1}$  este componenta curentului corespunzătoare pierderilor (fig. 10-13).

Se pune comutatorul  $K$  în poziția  $I$  și se reglează faza lui  $i_c$  pînă cînd voltmetrul  $V$  indică valoarea maximă. În acest caz, așa cum s-a arătat mai sus, curentul  $I_{c1}$  este în fază cu tensiunea  $U_{e2} = U_{2I}$  (fig. 10-13). Valoarea medie a tensiunii măsurate este

Fig. 10-13. Diagrama fazorială a ferometrului la măsurarea pierderilor în fier.

$$(U_{2med1})_{max} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_{2I} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_{e2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{N_2}{N_1} U_{e1}, \quad (10-47)$$

unde s-a ținut seamă că  $U_{e1}/U_{e2} = N_1/N_2$ . Din această relație se obține

$$U_{e1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{N_1}{N_2} (U_{2med1})_{max}. \quad (10-48)$$

Apoi, fără a modifica curentul de comandă  $I_c$ , se trece comutatorul  $K$  în poziția  $II$  în care  $I_{2II}$  este în fază cu  $I_1$  (fig. 10-13) și voltmetrul  $V$  măsoară tensiunea medie :

$$U_{2medII} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_{2II} |\cos \psi| = \frac{\sqrt{2}}{\pi} R I_1 |\cos \varphi| = \frac{\sqrt{2}}{\pi} R I_1 \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\pi} R I_{a1} \quad (10-49)$$

unde s-a ținut seama că  $\psi = \varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ . Din această relație se obține

$$I_{a1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{U_{2medII}}{R} \quad (10-50)$$

Înlocuind (10-48) și (10-50) în (10-46) rezultă :

$$P_{Fe} = \frac{\pi^2}{2} \frac{N_1}{N_2} (U_{2medI})_{max} \frac{U_{2medII}}{R} \quad (10-51)$$

Deci, măsurînd pe  $(U_{2medI})_{max}$  și  $(U_{2medII})$  și cunoscînd  $N_1$ ,  $N_2$  și  $R$ , rezultă pierderile în miezul feromagnetic al probei supuse încercării, care, așa cum se cunoaște, constau din pierderile prin histerezis și pierderile prin curenți turbionari. Modificînd valoarea tensiunii de alimentare a bobinei primare se poate determina, punct cu punct, curba pierderilor în funcție de tensiune.

La construcția ferometrului se pune condiția ca  $N_2 I_2 \ll N_1 I_1$ , adică magnetizarea miezului probei să fie produsă numai de amperspirele primare.

#### 10.3.4. MĂSURAREA PIERDERILOR ÎN FIER CU APARATUL EPSTEIN

Pierderile în fier prin curenți turbionari și prin histerezis apar în miezurile bobinelor de curent alternativ. Se consideră în fig. 10-14, *a* o astfel de bobină care are o rezistență proprie  $R_L$  (constantă) și inductanța  $L = \frac{\psi}{i}$  variabilă în funcție de curentul din bobină datorită saturației magnetice a miezului.

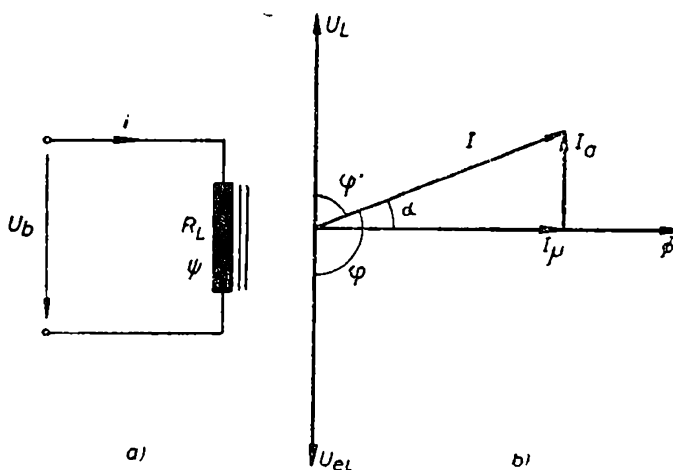


Fig. 10-14. Bobina cu pierderi :  
a — schema electrică; b — diagrama fazorială.

Curentul din bobină fiind variabil, t.e.m. indusă în bobină este :

$$u_{eL} = - \frac{d\psi}{dt}. \quad (10-52)$$

Dacă  $u_b$  este tensiunea alternativă aplicată la bornele bobinei, cu teorema a II-a a lui Kirchhoff se obține :

$$u_b + u_{eL} = R_L i, \quad (10-53)$$

de unde, ținînd seama de (10-52), rezultă :

$$u_b = R_L i + \frac{d\psi}{dt}$$

sau

$$u_b = R_L i + u_L, \quad (10-54)$$

în care

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} \quad (u_L = -u_{eL}).$$

În figura 10-14, *b* este reprezentată diagrama fazorială a valorilor efective pentru bobina considerată.

Pierderile în fier sînt date de relația :

$$P_{Fe} = U_{eL} I |\cos \varphi| = U_L I \cos \varphi' = U_L I \sin \alpha, \quad (10-55)$$

unde s-a avut în vedere că  $U_{eL} = U_L$  și  $\varphi' = \pi - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Modulul  $|\cos \varphi|$  s-a introdus pentru a rezulta valoarea pozitivă a pierderilor în fier.

Schema de principiu pentru măsurarea pierderilor în fier este reprezentată în fig. 10-15 și constă din miezul *M* în care se măsoară pierderile, pe care este așezată o bobină parcursă de curent alternativ, alimentată de la o sursă cu tensiunea

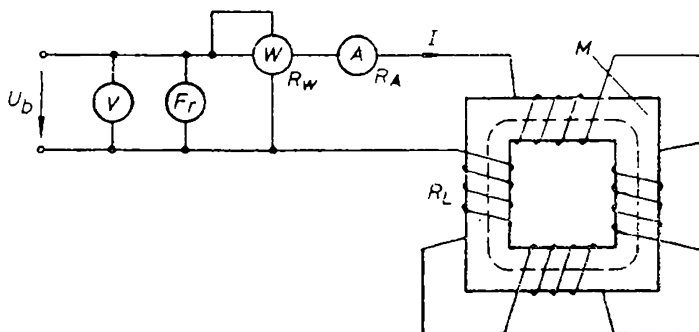


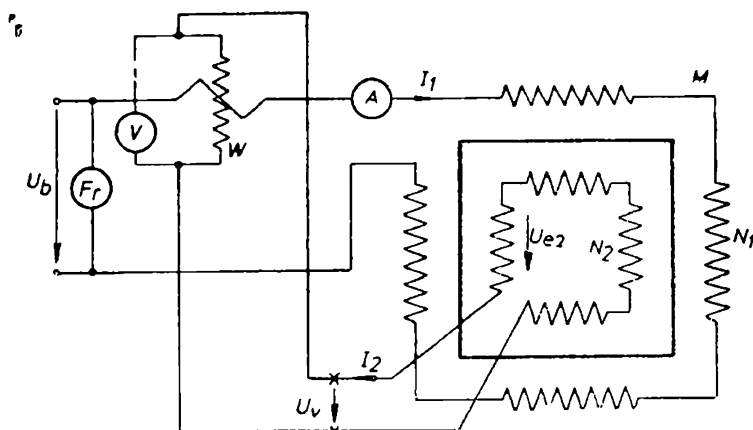
Fig. 10-15. Schema electrică pentru măsurarea pierderilor în fier.

la borne  $U_b$ , care se măsoară cu voltmetrul *V*. Există în circuit un wattmetru *W* pentru măsurarea puterii absorbite de la sursă, ampermetrul *A* care măsoară curentul *I* din bobină și frecvențmetrul *F*, care măsoară frecvența acestui curent.

Puterea măsurată de wattmetrul *W* este :

$$P_W = (R_W + R_A + R_L) I^2 + P_{Fe}, \quad (10-56)$$

unde  $R_W$ ,  $R_A$  și  $R_L$  sînt rezistențele electrice din circuit.



Din relația (10-56) se obține :

Această relație de calcul a pierderilor în fier conduce la erori mari din cauză că se face diferența între două valori de același ordin de mărime și pentru că rezistența circuitului se modifică cu temperatura.

Aparatul Epstein asigură măsurarea pierderilor în fier cu precizie ridicată, avînd schema reprezentată în fig. 10-16. Pe miezul  $M$ , cu o greutate de 10 kg, realizat din materialul feromagnetic din încercat, sînt așezate o bobină primară cu  $N_1$  spire și o bobină secundară cu  $N_2$  spire, astfel încît  $N_1 = N_2$  și t.e.m. induse  $U_{e1} = U_{e2}$ , fiind defazate cu  $90^\circ$  în urmă față de fluxul magnetic  $\Phi$  care le produce.

Solenatia care produce magnetizarea miezului este :

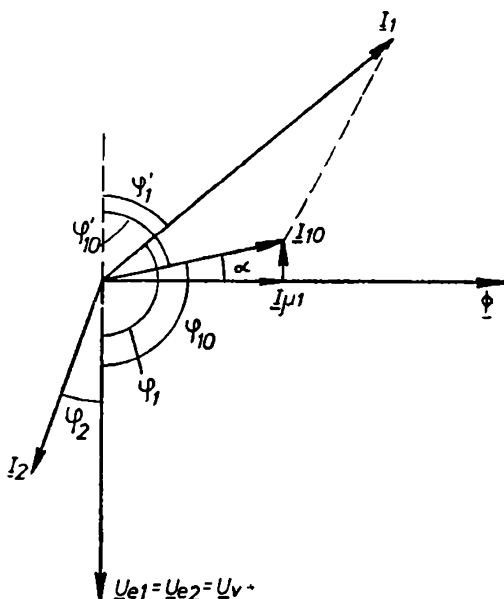
de unde, ținând seama că  $N_1 = N_2$ ,  
rezultă :

în care  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$  sînt curenții din primar și curenții din secundar, exprimați sub formă complexă.

În fig. 10-17 este reprezentată în planul complex diagrama circuitului din fig. 10-16 în care se ține seama de (10-59) și de faptul că fluxul  $\Phi$  din miez este produs de componenta  $I_{\mu 1}$  a curentului  $I_{10}$ . Din diagramă rezultă :

Pierderile în miezul de fier se exprimă prin relația

unde s-a ținut seama că  $\varphi_{10} = \pi - \varphi'_{10}$ .



Urmărind schema din fig. 10-16, se observă că bobina de tensiune a wattmetrului  $W$  este legată în paralel cu voltmetrul  $V$  și este alimentată cu tensiunea secundară  $U_V$ . Curentul prin aceste aparate este foarte mic (neglijabil), astfel că se pot neglija căderile de tensiune din bobina secundară și se obține  $U_V = U_{e2} = U_{e1}$ .

Puterea măsurată de wattmetrul  $W$  este :

$$P_W = U_V I_1 |\cos \varphi_1|, \quad (10-62)$$

unde în membrul drept s-a luat modulul din  $\cos \varphi_1$  pentru a se obține valoarea pozitivă a puterii, deoarece  $\varphi_1 > 90^\circ$ . Avînd în vedere că  $\varphi_1 = \pi - \varphi'_1$ , se mai poate scrie pentru această putere relația :

$$P_W = U_V I_1 \cos \varphi'_1, \quad (10-63)$$

în care, înlocuind  $I_1 \cos \varphi'_1$  din (10-60), se obține :

$$P_W = U_V I_{10} \cos \varphi'_{10} + U_V I_2 \cos \varphi_2. \quad (10-64)$$

Semnificația termenilor din membrul drept ai relației (10-64) este următoarea :

— pierderile în fier :

$$P_{Fe} = U_V I_{10} \cos \varphi'_{10} = U_{e1} I_1 \cos \varphi'_{10}; \quad (10-65)$$

— pierderile în secundar :

$$P_2 = U_V I_2 \cos \varphi_2. \quad (10-66)$$

Deci (10-64) devine  $P_W = P_{Fe} + P_2$ , de unde rezultă :

$$P_{Fe} = P_W - P_2. \quad (10-67)$$

Se remarcă faptul că pierderile în fier se obțin tot ca diferența a două puteri dar, în acest caz, pierderile în secundar  $P_2$  se pot determina cu precizie mai mare, curentul din secundar fiind de valoare mică.

Cadrul feromagnetic al aparatului Epstein are latura de 50 cm sau 25 cm (STAS 7758-67). Cadrul cu latura mai mare se folosește pentru materialele cu pierderi specifice mai mari (0,8 ... 2,2 W/kg) și cel cu latura mai mică pentru materialele cu pierderi specifice mai mici (0,5 ... 1,1 W/kg).

Dacă sursa de alimentare a aparatului Epstein este de frecvență variabilă, cu ajutorul lui se poate realiza și separarea pierderilor în fier, adică pierderile prin curenți turbionari și prin histerezis.

## Capitolul 11

### INSTRUMENTE DE MĂSURARE ELECTRONICE ȘI ÎNREGISTRATOARE

Instrumentele electronice, a căror construcție s-a dezvoltat foarte mult în ultimul timp, sînt folosite în special pentru măsurarea tensiunilor, curenților și puterilor foarte mici, datorită faptului că au un consum propriu foarte mic (neglijabil) în comparație cu instrumentele clasice. În general, un instrument electronic are o parte de amplificare și un sistem de măsurare de tip magneto-electric. Precizia instrumentelor electronice este în jur de  $\pm(1 \dots 3\%)$ , datorită modificării în timp, în funcție de temperatură etc., a parametrilor unor componente electronice.

Instrumentele înregistratoare, clasice sau electronice, sînt prevăzute cu un sistem de imprimare analogică sau cifrică a mărimilor măsurate.

În cele ce urmează se vor prezenta unele dintre cele mai uzuale instrumente electronice și înregistratoare.

#### 11.1. OSCILOSCOPUL ELECTRONIC

Partea principală a osciloscopului electronic este tubul catodic, a cărui schemă de principiu este reprezentată în fig. 11-1. Catodul  $c$  al tubului este încălzit de filamentul  $f$  și emite electroni. Fiind atrași de către anodul  $a_1$ , situat la un potențial ridicat, electronii trec prin grila de comandă  $g$ , de formă cilindrică, conectată la un potențial negativ, fiind focalizați în axa cilindrului. Al doilea anod  $a_2$ , tot de formă cilindrică ca și primul, este situat la un potențial mai ridicat decît  $a_1$ . Spotul de electroni, care trece de la primul, la al doilea anod, este focalizat din nou și puternic accelerat spre ecranul fluorescent al tubului

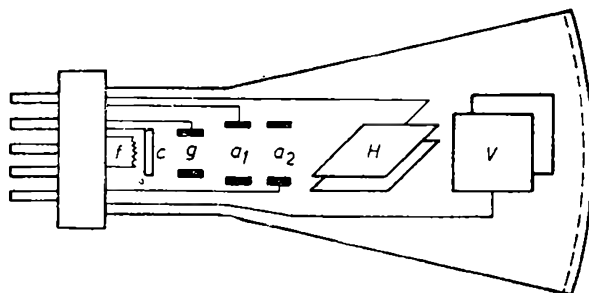


Fig. 11-1. Tubul catodic.

pe care îl bombardează și, astfel, pe ecran se va vedea un punct luminos. Luminozitatea (intensitatea) spotului de pe ecran se reglează modificând potențialul negativ al grilei  $g$ , iar focalizarea (concentrarea) spotului se realizează modificând diferența de potențial dintre anozii  $a_1$  și  $a_2$ .

În drumul spre ecran, spotul de electroni trece prin spațiul dintre două plăci verticale  $V$  și două plăci orizontale  $H$ .

Între plăcile verticale  $V$  se aplică o diferență de potențial (tensiune)  $u_x$ , cu variație în timp sub formă de dinți de ferăstrău (fig. 11-2), denumită *tensiune de baleiaj* sau *bază de timp*, care este obținută de la un oscilator propriu al osciloscopului. Sub influența diferenței de potențial  $u_x$ , spotul de electroni se va deplasa pe orizontală, descriind pe ecran un segment de dreaptă. Timpul  $t_a$  cît spotul se mișcă spre dreapta ecranului este mult mai lung decît timpul  $t_b$  cît spotul se mișcă spre stînga.

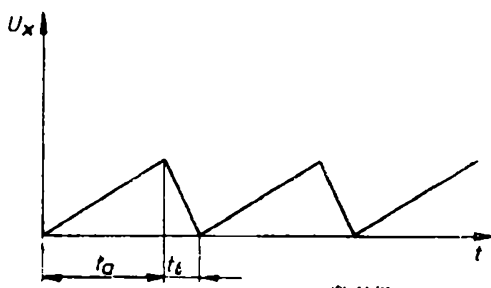


Fig. 11-2. Tensiunea de baleiaj în formă de dinți de ferăstrău.

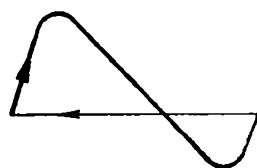


Fig. 11-3. Imaginea pe ecranul osciloscopului a sinusoidei.

Între plăcile orizontale se aplică o diferență de potențial (tensiune)  $u_y$ , proporțională cu mărimea a cărei variație în timp se urmărește. Sub influența acestei diferențe de potențial, spotul de electroni se deplasează pe verticală. Dacă, spre exemplu,  $u_y$  este o tensiune cu variație sinusoidală în timp, iar frecvența bazei de timp  $u_x$  este egală sau submultiplu întreg față de frecvența tensiunii  $u_y$ , pe ecranul osciloscopului se vor vedea imagini luminoase de formă sinusoidală. În fig. 11-3 este arătată sinusoida obținută în cazul egalității celor două frecvențe, care este incompletă din cauza revenirii spotului în poziția inițială. Dacă frecvența bazei în timp nu este submultiplu întreg al frecvenței semnalului de studiat, sau este un multiplu al acestei frecvențe, pe ecranul osciloscopului apare o rețea de curbe luminoase suprapuse. De aceea, frecvența bazei de timp  $u_x$  trebuie sincronizată cu frecvența semnalului.

În situația cînd  $u_x$  și  $u_y$  au ambele variație sinusoidală în timp, pe ecran se obțin „figurile lui Lissajoux” (fig. 11-4), a căror formă depinde de raportul frecvențelor celor două tensiuni și de diferența de fază dintre ele.

Din cele prezentate este evident că osciloscopul se poate folosi numai pentru studiul mărimilor cu variație periodică în timp și sub formă de impuls. Mărimile cu variație aperiodică nu pot fi urmărite cu acest aparat.

Osciloscopul este un aparat fără inerție, deoarece inerția spotului de electroni în mișcare este practic zero.

Există și osciloscopia cu mai multe spoturi, cu ajutorul cărora se pot urmări simultan mai multe mărimi variabile periodic în timp.



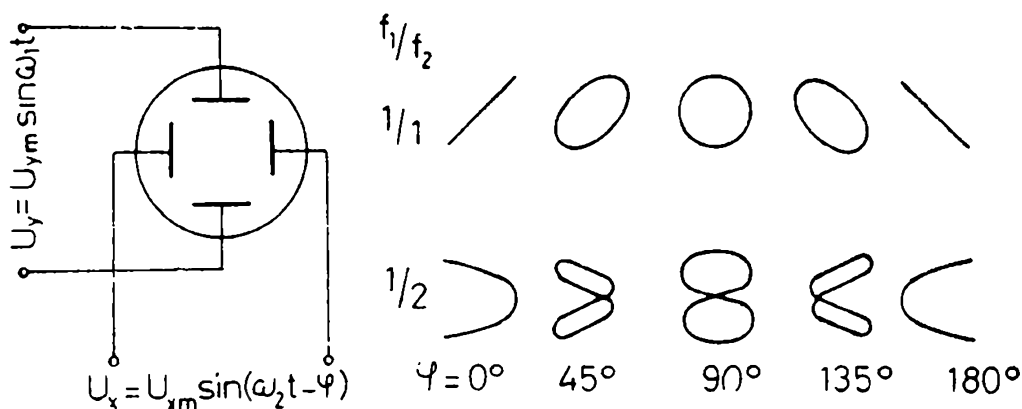


Fig. 11-4. Figurile lui Lissajoux.

Oscilografele electronice sînt osciloscopae prevăzute cu dispozitiv de fotografiere (înregistrare).

**Aplicațiile osciloscopului electronic** se referă aproape la toate domeniile tehnicii moderne. Cu o etalonare adecvată a deplasării spotului pe verticală, osciloscopul poate fi folosit pentru măsurarea amplitudinii unor tensiuni sau curenți cu variație periodică în timp. De asemenea, poate fi vizualizată forma de variație în timp a acestor tensiuni sau curenți (sinusoidală sau nesinusoidală).

Dacă se cunoaște cu precizie frecvența tensiunii de baleiaj  $f_2$ , se poate măsura cu ajutorul osciloscopului frecvența  $f_1$  a semnalului care provoacă deflexia pe verticală. De exemplu, dacă pe ecran se obține o imagine de forma reprezentată în fig. 11-3, înseamnă că  $f_1 = f_2$ .

La paragraful 9.7 s-au făcut referiri privind folosirea osciloscopului electronic pentru localizarea defectelor în cabluri, iar la paragraful 10.3.1 s-a explicat metoda de determinare a ciclului de histerezis al materialelor feromagnetice cu ajutorul osciloscopului.

Osciloscopul electronic are multiple aplicații în tehnica măsurărilor și verificărilor circuitelor și dispozitivelor electronice și cu semiconductoare folosite în telecomunicații, automatizări etc. Spre exemplu, cu osciloscopul se pot testa circuitele de redresare, circuitele de comutație statice cu tranzistoare și tiristoare etc.

## 11.2. VOLTMETRE ELECTRONICE

Voltmetrele clasice (magnetoelectrice, electromagnetice, electrodinamice) au două mari dezavantaje. În primul rînd, conectarea lor introduce o sarcină suplimentară în circuit, deoarece rezistența (impedanța) lor interioară este relativ mică, mai ales pentru domeniile mici de măsurare. În al doilea rînd, cu ajutorul lor nu se pot măsura în c.c. sau în c.a., tensiuni mici, de ordinul milivoltilor sau microvoltilor.

Voltmetrele electronice elimină aceste dezavantaje prin aceea că au o rezistență (impedanță) interioară, de intrare, foarte mare, ceea ce le conferă o sensibilitate mărită. Dezavantajul lor constă în aceea că sînt mult mai scumpe și necesită o sursă de alimentare.

### 11.2.1. VOLTMETRE CU TUBURI ELECTRONICE

În fig. 11-5, *a* și *b* sînt prezentate schemele electrice de principiu pentru două tipuri de *voltmetre cu tuburi electronice* folosite pentru măsurarea tensiunilor continue. Se observă forma în punte a schemei, cu cele două tuburi electronice (triode)  $T_1$  și  $T_2$  în două laturi și cu rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$  în celelalte două laturi ale punții. Instrumentul de măsurare  $A$ , de tip magnetoelectric, este introdus într-o diagonală, iar sursa de alimentare,  $+B$  și  $-B$ , în cealaltă diagonală. Tuburile electronice au și rol de amplificare. Tensiunea de măsurat  $U_1$  se aplică la grila de comandă a tubului  $T_1$  prin intermediul unui atenuator (cu rezistența totală de  $10\text{ M}\Omega$ ).

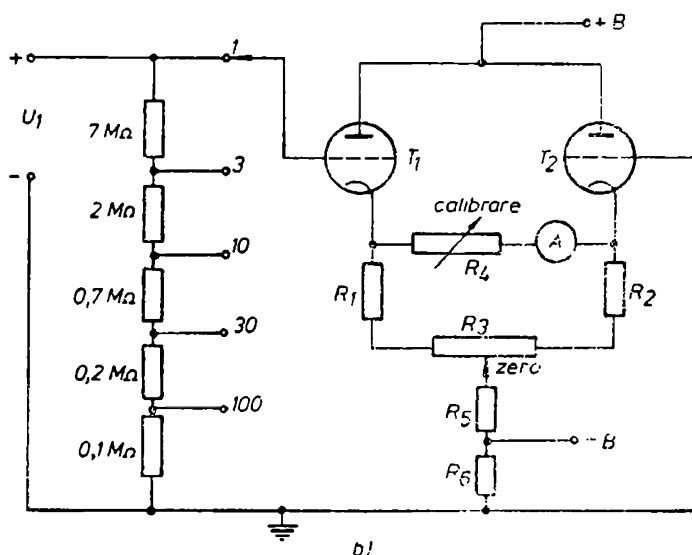
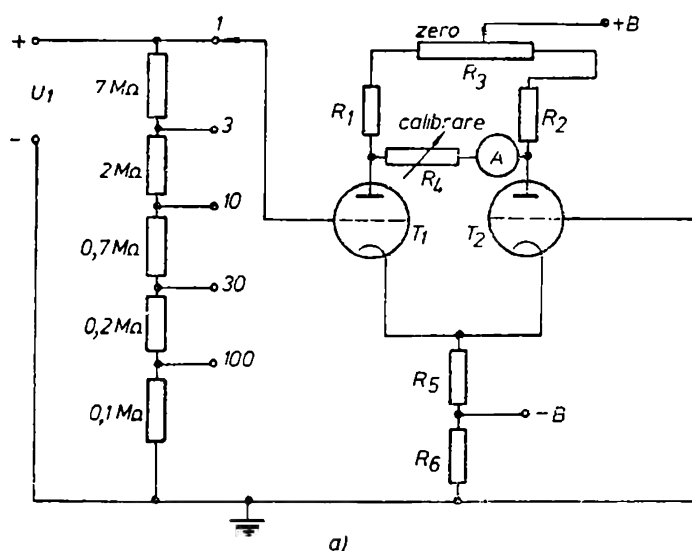


Fig. 11-5. Schema voltmetrului electronic cu două triode avînd catodul comun (a), respectiv anodul comun (b).

Prin aplicarea unui potențial pozitiv la grila de comandă a tubului  $T_1$ , rezistența anodică a tubului descrește și puntea se dezechilibrează. Simultan, crescînd curentul anodic, catodul tubului  $T_2$  devine mai pozitiv față de grilă și rezistența anodică a acestui tub crește. Deci, ambele tuburi participă la dezechilibrarea punții. Instrumentul de măsurare  $A$  sesizează dezechilibrul punții, indicația sa fiind proporțională cu tensiunea de măsurat  $U_1$  (aplicată la grila tubului  $T_1$ ).

Rezistențele  $R_1$  și  $R_2$  sînt fixe. Cu rezistența  $R_3$  se aduce instrumentul de măsurare  $A$  în poziția zero (înainte de măsurare), iar cu rezistența  $R_4$  se fixează sensibilitatea instrumentului.

Se remarcă faptul că rezistența de intrare este aceeași ( $10\text{ M}\Omega$ ) pentru toate domeniile de măsurare. Pentru a nu se modifica această rezistență de intrare, cordonalele de legătură folosite la intrare trebuie să fie foarte bine izolate. De asemenea, componentele electronice din schemă trebuie să aibă parametri cu toleranțe cît mai mici și independenți de factori externi. De exemplu, pentru ca condițiile de temperatură la cele două tuburi să fie aceleași, se folosește obișnuit o triodă dublă. Toate aceste măsuri au menirea ca puntea să nu se dezechilibreze sub influența unor factori perturbatori externi.

*Voltmetrele cu tuburi electronice pentru măsurarea tensiunilor alternative* (perio-dice) necesită un detector, adaptat la intrarea voltmetrului, care permite :

- măsurarea valorii medii ;
- măsurarea valorii de vîrf (amplitudinii) ;
- măsurarea valorii efective (RMS).

În fig. 11-6 este arătată schema de principiu a unui detector care permite măsurarea valorilor de vîrf (amplitudinilor) unei tensiuni cu variație periodică.

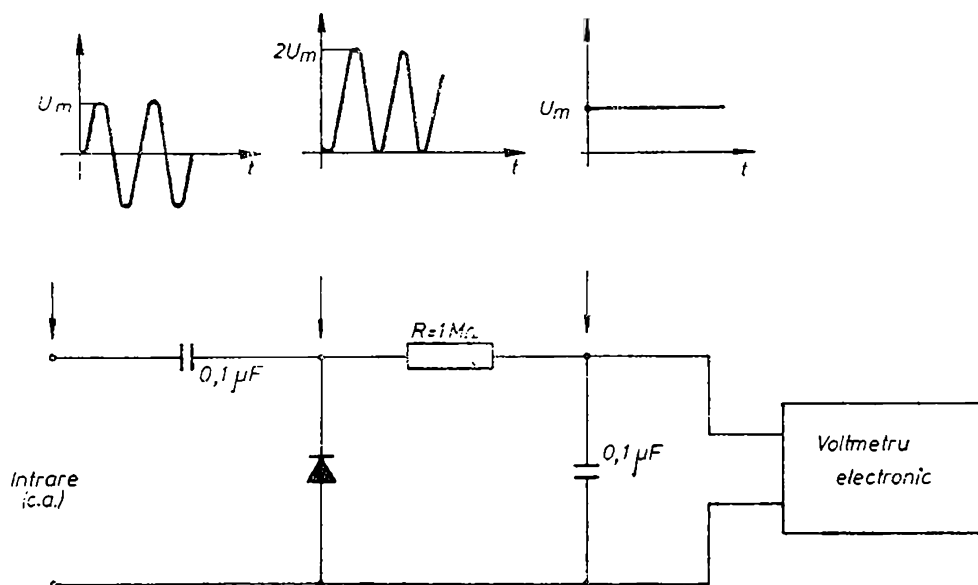


Fig. 11-6. Schema detectorului pentru valoarea de vîrf.

Instrumentul de măsurare al voltmetrului electronic poate fi etalonat pentru valoarea de vîrf sau pentru valoarea efectivă a tensiunii periodice. Avînd în vedere că în regim sinusoidal, raportul dintre valoarea efectivă și amplitudine este 0,707, cu voltmetrul electronic se poate măsura în acest regim atît amplitudinea, cît și valoarea efectivă, oricum ar fi etalonată scala aparatului. În schimb,

În regim nesinusoidal, raportul dintre cele două valori se modifică și, dacă instrumentul este etalonat pentru valoarea de vîrf, nu poate măsura valoarea efectivă și invers, dacă este etalonat pentru valoarea efectivă, nu poate măsura valoarea de vîrf.

Trebuie subliniat că pentru măsurarea cu ajutorul voltmetrului electronic a valorii efective pentru orice formă de variație periodică în timp a tensiunii, este necesar un detector de valoare efectivă, adică un dispozitiv prin intermediul căruia să se aplice la intrarea în voltmetrul electronic o tensiune proporțională cu valoarea efectivă. Un astfel de detector poate fi, spre exemplu, un termocuplu.

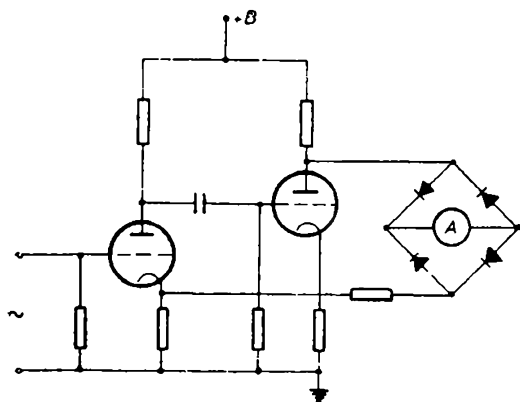


Fig. 11-7. Schema voltmetrului electronic cu două triode și reacție negativă.

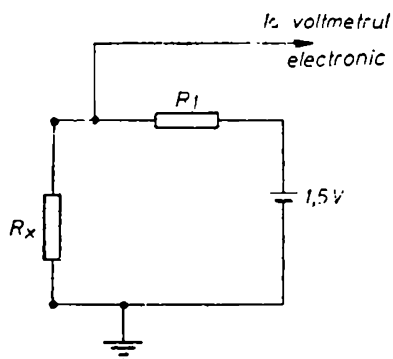


Fig. 11-8. Potentiometrul de adaptare.

În fig. 11-7 este reprezentată schema unui voltmetru de c.a., cu tuburi electronice, cu reacție negativă. Această construcție asigură sensibilitate mai mare și stabilitate mai bună pentru instrumentul de măsurare.

Măsurarea rezistențelor cu voltmetrul cu tuburi electronice poate fi realizată dacă la intrarea sa se adaptează un dispozitiv potențiometric avînd schema reprezentată în fig. 11-8. Se observă că  $U_1 = 0$  cînd  $R_x = 0$  și  $U_1 = 1,5$  V cînd  $R_x = \infty$ . Voltmetrul electronic are, în mod obișnuit, scală distinctă pentru măsurarea rezistențelor.

**Aplicația 11-1.** Să se reevalueze treptele de rezistență ale divizorului de tensiune din fig. 11-5, astfel încît să se poată măsura tensiuni pînă la 300 V, cu următoarele trepte : 1 V, 15 V, 60 V, 150 V, 300 V. Rezistența totală de intrare crește la  $R = 30$  MΩ.

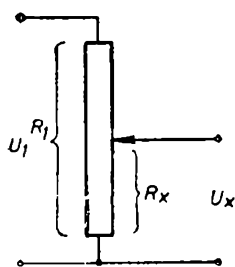


Fig. 11-9. Schema explicativă pentru divizarea tensiunii de intrare.

*Rezolvare.* Pe baza schemei din fig. 11-9 rezultă :

$$\frac{U_x}{U_1} = \frac{R_x}{R_1}.$$

Aplicînd această relație pentru datele din enunț și avînd în vedere că pentru fiecare treaptă  $U_x = 1$  V, rezultă :

$$U_1 = 1 \text{ V}, \quad \frac{1}{1} = \frac{R_x}{30}, \quad R_x = 30 \text{ M}\Omega ;$$

$$U_1 = 15 \text{ V}, \quad \frac{1}{15} = \frac{R_x}{30}, \quad R_x = 2 \text{ M}\Omega ;$$

$$U_1=60 \text{ V}, \quad \frac{1}{60} = \frac{R_x}{30}, \quad R_x=0,5 \text{ M}\Omega;$$

$$U_1=150 \text{ V}, \quad \frac{1}{150} = \frac{R_x}{30}, \quad R_x=0,2 \text{ M}\Omega;$$

$$U_1=300 \text{ V}, \quad \frac{1}{300} = \frac{R_x}{30}, \quad R_x=0,1 \text{ M}\Omega.$$

Se obțin astfel valorile treptelor de rezistență înscrise pe schița din fig. 11-10.

### 11.2.2. VOLTMETRE CU TRANZISTOARE

Dispozitivele semiconductoare (diode, tranzistoare) sînt folosite tot mai mult în ultimul timp în construcția instrumentelor electrice de măsurare. În comparație cu instrumentele cu tuburi electronice, instrumentele cu dispozitive semiconductoare prezintă următoarele avantaje:

- în timpul funcționării, căldura dezvoltată în interiorul lor este redusă, deci cu efecte neglijabile;
- sînt mai compacte și mai ușoare;
- pot fi alimentate de la o baterie, deci sînt independente de rețea.

Voltmetrele cu tranzistoare funcționează pe aceleași principii ca și voltmetrele cu tuburi electronice. În fig. 11-11 este reprezentată schema electrică a unui voltmetru de c.c. cu două tranzistoare în punte (analoagă cu schema voltmetrului cu două triode din fig. 11-5, a). Cele patru brațe ale punții sînt formate din rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$  și tranzistoarele  $T_1$ ,  $T_2$ . Tranzistorul  $T_1$  fiind comandat prin curentul de bază, nu este necesar un divizor potențiometric pentru tensiunea de intrare.

Dacă un potențial pozitiv (față de masă) se aplică la baza tranzistorului  $T_1$ , crește curentul de bază și, în măsură mai mare crește curentul de colec-

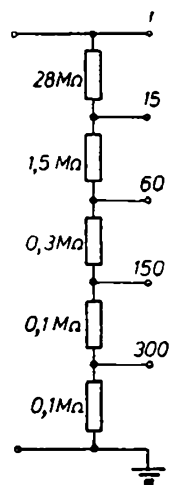


Fig. 11-10.  
Trepte de rezistență de intrare.

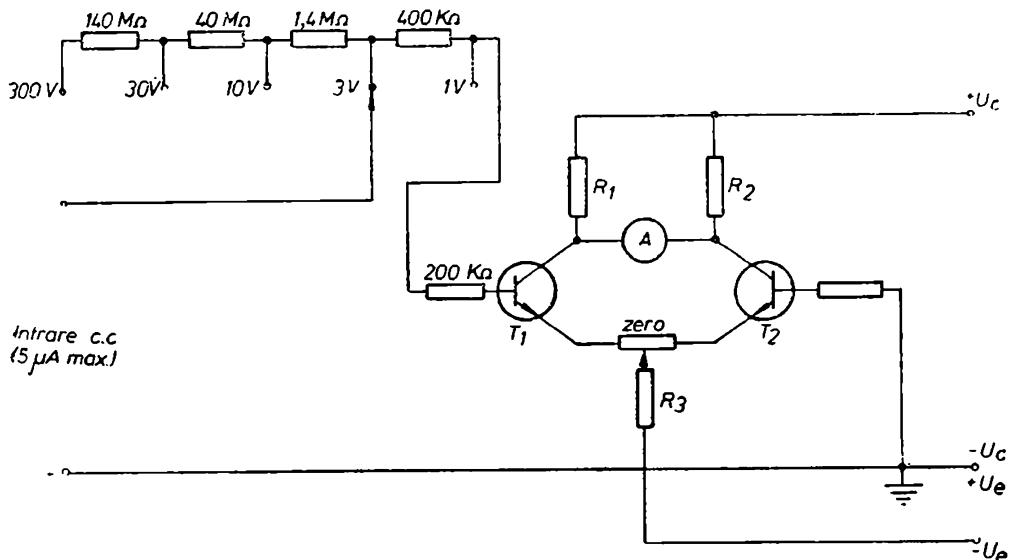


Fig. 11-11. Schema voltmetrului de c.c. cu tranzistoare.

tor ce străbate rezistențele  $R_1$  și  $R_3$ . În același timp, scade curentul de colector al tranzistorului  $T_2$  datorită creșterii potențialului la emitor provocat de căderea de tensiune pe rezistența  $R_3$ . Ca urmare, puntea se dezechilibrează și ampermetrul  $A$ , legat în diagonala punții, indică acest dezechilibru, proporțional cu tensiunea de la intrare.

Rezistența de intrare (sensibilitatea) voltmetrului este de circa  $200 \text{ k}\Omega/\text{V}$ , iar precizia, de aproximativ  $\pm 1\%$ .

### 11.3. FRECVENȚMETRE ELECTRONICE

Principiul de funcționare al frecvențmetrelor electronice cu citire directă a frecvenței constă în obținerea prin instrumentul de măsurare (ampermetru) a unui curent de valoare proporțională cu frecvența tensiunii aplicate, independent de amplitudinea acesteia.

În fig. 11-12 este reprezentată schema de principiu a unui frecvențmetru cu două triode  $T_1$  și  $T_2$ , conectate în montaj în contratimp. La bornele bobi-

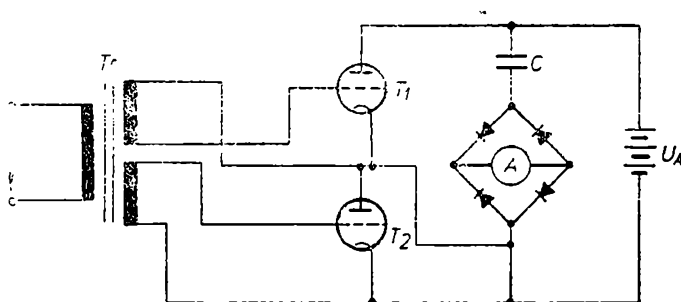


Fig. 11-12. Schema de principiu a frecvențmetrului cu două triode în contratimp.

nei primare ale transformatorului  $Tr$  se aplică tensiunea  $u_1 = U_{1m} \sin \omega_1 t$  a cărei frecvență  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$  se măsoară. Datorită amplitudinii mari a tensiunii obținute la cele două bobine secundare și aplicate la grilele de comandă, tuburile  $T_1$  și  $T_2$  sînt aduse pe rînd în stare de conducție, respectiv de blocare.

În alternanța cînd tubul  $T_2$  conduce, tubul  $T_1$  fiind blocat, condensatorul  $C$  se încarcă rapid cu sarcina electrică  $Q = CU_A$ , unde  $U_A$  este tensiunea sursei de c.c. din circuitul anodic. În alternanța următoare tubul  $T_2$  se blochează, iar  $T_1$  va conduce, permițînd condensatorului să se descarce rapid. Atît încărcarea condensatorului, cît și descărcarea au loc prin instrumentul de măsurare  $A$ , de tip magnetoelectric, montat în diagonala unei punți de redresare. Valoarea medie a curentului, măsurată de ampermetrul  $A$ , calculată în raport cu perioada  $T_1 = 1/f_1$ , este :

$$I_{med} = \frac{2Q}{T_1} = 2 CU_A f_1 = k f_1,$$

adică indicația instrumentului de măsurare este proporțională cu frecvența  $f_1$ , constanta de proporționalitate fiind  $k = 2 CU_A$ . Deci, scala instrumentului de măsurare poate fi etalonată în valori ale frecvenței.

## 11.4. FAZMETRE ELECTRONICE

Principiul de funcționare al unui fazmetru electronic se bazează pe ideea că, prin însumarea (sau scăderea) a două tensiuni sinusoidale de aceeași frecvență și aceeași amplitudine, dar defazate între ele, se obține o tensiune ce depinde de defazaj, adică

$$u_1 = U_m \sin \omega t, \quad u_2 = U_m \sin (\omega t + \varphi),$$

$$u = u_1 + u_2 = U_m 2 \sin \left( \omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Schema bloc a unui fazmetru cu citire directă este reprezentată în fig. 11-13. Cele două tensiuni,  $u_1$  și  $u_2$ , a căror defazaj se măsoară sînt aplicate la intrarea a două amplificatoare limitatoare, la ieșirea cărora se obțin semnale (tensiuni) dreptunghiulare,  $A$  și  $B$ , de amplitudini egale, dar cu conservarea defazajului de la intrare.

Tuburile  $T_1$  și  $T_2$  realizează însumarea semnalelor  $A$  și  $B$  aplicate la grilele lor de comandă. În partea de jos a fig. 11-13 se vede că suma  $A + B$  depinde

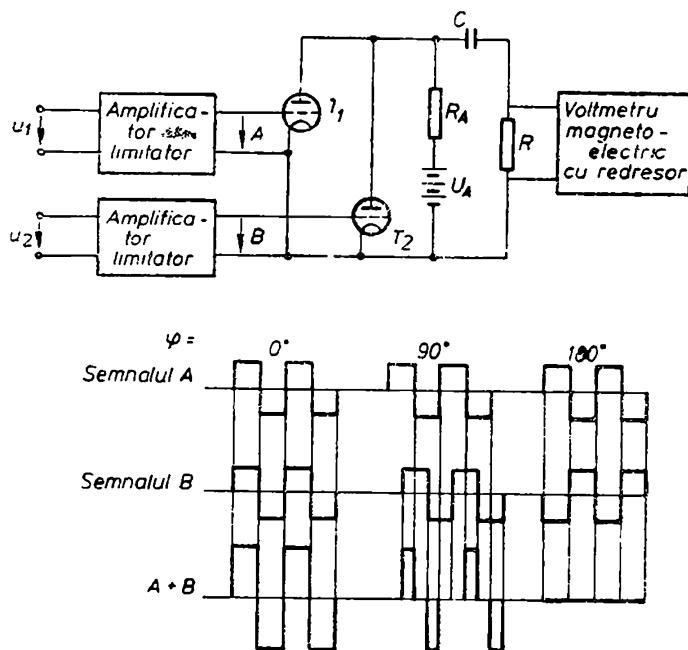


Fig. 11-13. Schema de principiu a fazmetrului electronic.

de defazajul  $\varphi$ , care, la o altă scară, reprezintă căderea de tensiune pe rezistența de sarcină  $R$ . Voltmetrul de tip magnetoelectric, prevăzut cu schemă de redresare în punte și legat la bornele rezistenței  $R$ , va măsura valoarea medie a semnalului  $A + B$ . Deci, indicația sa depinde numai de defazajul  $\varphi$  și, ca urmare, scala poate fi gradată în valori ale acestui defazaj.

## 11.5. TAHOMETRE ELECTRONICE

Tahometrul este aparatul folosit pentru măsurarea turației. Această măsurare intervine foarte frecvent în tehnică, la mașini electrice, motoare cu ardere internă și, în general, în toate cazurile când există în construcția unei mașini piese în mișcare de rotație.

Există diverse tipuri de tahometre, fixe sau portative. Spre exemplu, una dintre metodele de măsurare a turației constă în folosirea unui generator tahometric (de c.c. sau de c.a.), cuplat pe arborele a cărui turație se măsoară, și prevăzut cu un voltmetru care măsoară tensiunea sa. Întrucât tensiunea dată de generator depinde liniar de turație, scala voltmetrului se etalonează în valori ale turației [rot/min].

În ultimul timp, se folosesc tot mai mult tahometrele electronice. În principiu, pentru măsurarea turației este necesar să existe un traductor cu rolul

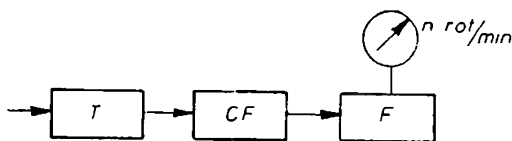


Fig. 11-14. Schema bloc a tahometrului electronic.

de a transforma viteza unghiulară într-un semnal electric, a cărui amplitudine sau frecvență este proporțională cu această viteză. Schema bloc a unui tahometru electronic, este reprezentată în fig. 11-14. Traductorul  $T$ , de tip fotoelectric sau magnetic, furnizează un semnal sub formă de impulsuri, cu

frecvența de repetiție proporțională cu turația. Pentru ca forma acestor impulsuri să nu afecteze măsurarea, schema este prevăzută și cu un formator de impulsuri,  $CF$ , la ieșirea căruia se obțin impulsuri dreptunghiulare, cu durată constantă și cu frecvență, de asemenea, proporțională cu turația. Urmează în schemă frecvențmetrul  $F$ , care măsoară frecvența impulsurilor, deci turația. Pentru precizii mai mari, se pot folosi frecvențmetre numerice.

Se precizează că *traductorul de turație fotoelectric* constă dintr-o celulă fotoelectrică, sensibilizată de o rază de lumină, provenită de la o sursă luminoasă și reflectată de o mică oglindă fixată pe piesa rotitoare. Deci, la fiecare rotație, celula fotoelectrică generează un impuls de curent. La *traductorul de turație magnetic*, impulsul de curent apare într-o bobină prin fața căreia trece o piesă feromagnetică fixată pe arborele în rotație (sau un gol practicat în arbore), provocând modificarea reluctanței circuitului magnetic al bobinei.

O altă categorie de tahometre o constituie *strobotahometrele electronice*. Pe piesa în rotație se află un reper asupra căruia se trimite o rază de lumină intermitentă, provenită de la o lampă specială cu descărcări în gaze, comandată electronic. Când între frecvența de rotație și cea a impulsurilor luminoase există egalitate sau un raport întreg, reperul apare imobil. Cunoscând frecvența impulsurilor luminoase, se poate determina numărul de rotații din unitatea de timp.

## 11.6. INSTRUMENTE ÎNREGISTRATOARE

Instrumentele electrice înregistratoare au rolul de a măsura și de a imprima (înregistra) valorile mărimilor electrice, magnetice etc. Înregistrarea valorilor mărimilor măsurate poate fi făcută analogic, prin trasarea, la o anumită scară, a curbei de variație, sau numeric (cifric).



### 11.6.1. AMPERMETRE, VOLTMETRE, WATTMETRE ÎNREGISTRATOARE

În fig. 11-15 este schițat principiul de funcționare al unui instrument înregistrator clasic, care poate fi: ampermetru, voltmetru, wattmetru etc. O bandă de hîrtie gradată este menținută în mișcare de translație de către un mecanism de ceasornic sau de altă natură. Acul indicator este prevăzut cu o peniță realizată dintr-un tub capilar, unul din capetele tubului fiind în contact cu hîrtia, iar celălalt fiind introdus într-un rezervor cu cerneală.

Din cauza inerției relativ mari a mecanismului de înscriere, instrumentele înregistratoare sînt folosite pentru urmărirea mărimilor care au o variație relativ lentă în timp. De exemplu, astfel de instrumente sînt folosite în stații și centrale electrice pentru urmărirea variației valorilor efective ale curentului și tensiunii, a puterii etc. Pentru urmărirea mărimilor cu variație rapidă în timp se folosesc instrumente înregistratoare cu inerție mai mică cum sînt, de exemplu, oscilografele.

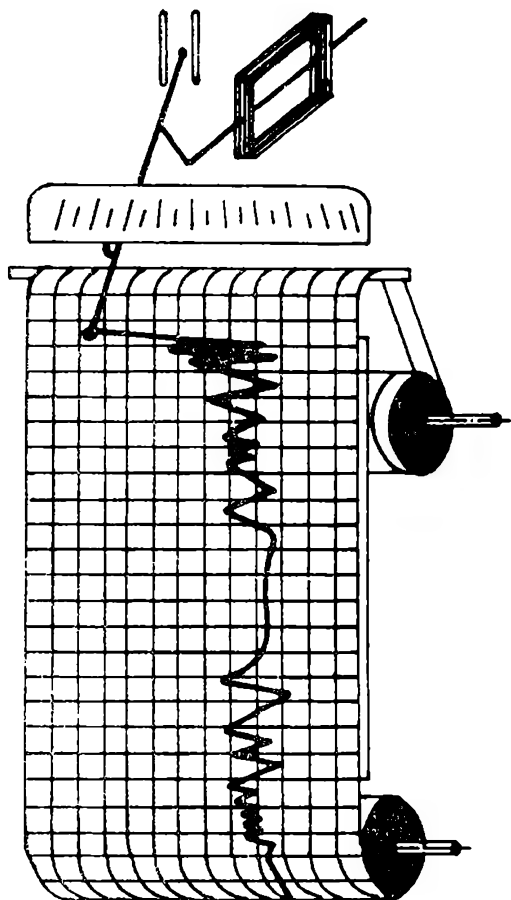


Fig. 11-15. Schema de principiu a instrumentului înregistrator (clasic).

### 11.6.2. OSCIOGRAFUL ELECTROMECHANIC

Schița funcțională a unui oscilograf electromecanic este reprezentată în fig. 11-16. Elementul de măsurare al acestui tip de aparat este constituit dintr-un galvanometru vibrator (bucă)  $B$ , care constă dintr-un magnet permanent între polii căruia se găsește o oglindă susținută de o buclă conductoare (galvanometru). Când prin buclă trece curent, acesta, împreună cu oglinda se rotește mai mult sau mai puțin, într-un sens sau în altul, în funcție de valoarea și sensul curentului.

O rază de lumină care provine de la un bec  $S$ , este reflectată de oglindă și dirijată, parțial, spre o lentilă prismatică  $L_p$  și, parțial, spre o lentilă cilindrică  $L_c$ .

De la lentila prismatică  $L_p$ , raza de lumină ajunge pe suprafața oglindată a unei prisme hexagonale rotitoare, ale cărei fețe reflectă spotul luminos spre ecranul semitransparent  $E$ , destinat pentru urmărirea vizuală.

Raza de lumină care ajunge la lentila cilindrică  $L_c$  este concentrată și proiectată pe suprafața hîrtiei fotosensibile  $H$ , menținută în mișcare de trans-

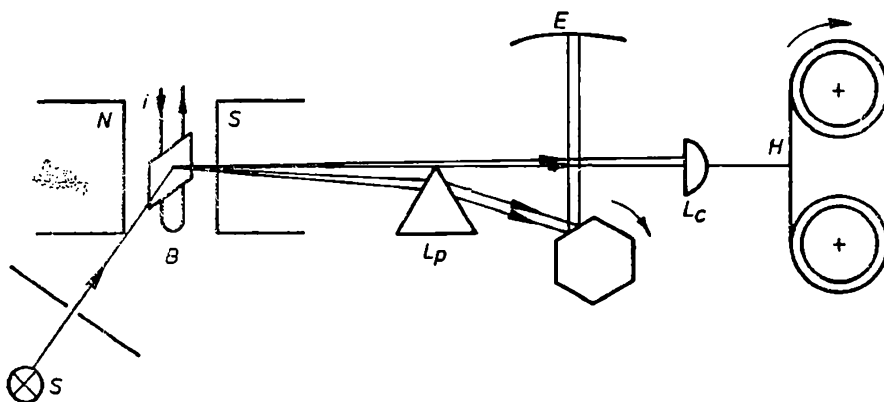


Fig. 11-16. Principiul de funcționare a oscilografului electromecanic.

lație de către un mecanism cu doi tamburi, unul pe care hîrtia se înfășoară și altul de pe care se desfășoară.

Dacă curentul din bucla  $B$  obține valori proporționale cu mărimea variabilă în timp de studiat, oglinda buclei se va mișca, iar pe ecran se va observa, respectiv pe hîrtia sensibilă se va înregistra curba de variație în timp a mărimii studiate.

Cu oscilograful electromecanic se pot urmări atât mărimi cu variație periodică, cît și cele cu variație aperiodică în timp. Există oscilografe electromecanice cu 3...24 bucle, cu ajutorul cărora se pot urmări simultan tot atîtea mărimi.

Oscilograful electromecanic se mai numește și *cu inerție*, deoarece mișcarea sistemului mobil al galvanometrului este însoțită de inerție, din care cauză frecvența de variație a mărimilor studiate este limitată. Pentru amortizarea mișcărilor galvanometrului, aceasta este situată într-un mediu de ulei.

În tehnica măsurărilor moderne, oscilografele au devenit aparate deosebit de utile. La oscilografele moderne, dezvoltarea hîrtiei pe care s-a făcut înregistrarea se realizează la lumina zilei (sau la lumină artificială).

### 11.6.3. ÎNREGISTRATORUL ÎN COORDONATE X-Y

Înregistratorul X-Y este un aparat modern cu ajutorul căruia se înregistrează dependența dintre două mărimi:  $y(x)$ . În fig. 11-17 este reprezentată schema unui astfel de instrument, care constă dintr-un mecanism de înscriere a cărui mișcări în direcțiile X, Y sînt efectuate prin cîte un servomotor. Deplasarea pe direcția axei X se face proporțional cu mărimea  $x$ , iar deplasarea pe direcția axei Y se face proporțional cu mărimea  $y$ . Rezultă astfel curba  $y(x)$ .

Dacă hîrtiei pe care se realizează înregistrarea i se imprimă o viteză de deplasare constantă în direcția X, se obține curba de variație în funcție de timp a unei mărimi,  $y=f(t)$ .

Sensibilitatea maximă a înregistratorului X-Y este de cca 2,5 cm/mV. Dispozitivul denumit Chopper are rolul de a transforma semnalul (tensiunea) continuu în impulsuri de o anumită frecvență (ex. 50 Hz).

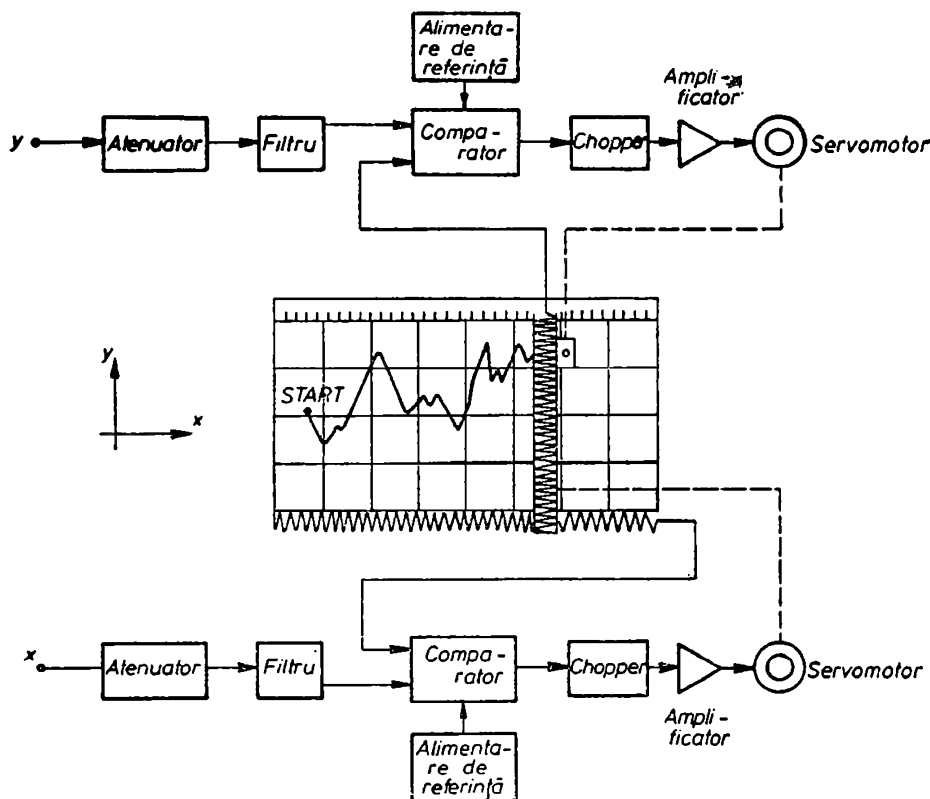


Fig. 11-17. Schema bloc a înregistratorului X—Y.

Înregistratoarele X—Y se folosesc pentru urmărirea dependenței dintre două mărimi cu variație lentă în timp. Pentru frecvențe ridicate, inerția relativ mare a sistemului mobil de înregistrare conduce la trasarea unei înfășurături a curbei reale de variație.

## 11.7. SURSE DE ALIMENTARE STABILIZATE

Instrumentele de măsurare electronice, cât și alte numeroase aparate de cercetare, necesită surse de alimentare, de tensiune sau de curent, stabilizate. Sursele chimice sînt folosite în mică măsură în acest scop datorită modificării în timp a tensiunii și rezistenței lor interne. Se folosesc în prezent, pe scară largă, surse electronice stabilizate, cu semiconductoare, la care ne referim în cele ce urmează.

a. **Surse stabilizate de tensiune continuă.** O sursă stabilizată de tensiune continuă constă din două părți principale: redresorul și stabilizatorul. Redresorul este realizat, obișnuit, cu diode semiconductoare, cu schema de montaj în punte, plasate în circuitul secundar al transformatorului de alimentare de la rețea. Stabilizatorul are rolul de a menține constantă tensiunea continuă de ieșire, atunci cînd tensiunea de alimentare (de la rețea) se modifică între anumite limite sau cînd se schimbă curentul de sarcină (la ieșire).

În general, un stabilizator este format din două elemente principale : detectorul  $D$ , care are rolul de a sesiza variațiile tensiunii de la ieșire față de valoarea impusă, și corectorul  $C$ , acționat de detector în sensul anulării abaterii tensiunii de ieșire. După felul cum sînt dispuse aceste două elemente, se disting : stabilizatoare de tip serie (fig. 11-18,  $a$ ) și stabilizatoare de tip derivație (fig. 11-18,  $b$ ).

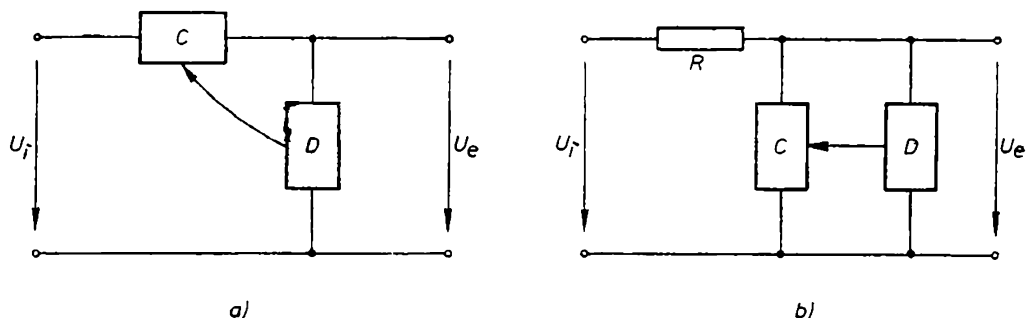


Fig. 11-18. Scheme-bloc ale stabilizatoarelor :  
 $a$  — de tip serie;  $b$  — de tip derivație.

La stabilizatoarele de tip serie, elementul de corecție este în serie cu sarcina și acționează ca o rezistență variabilă care preia variațiile de tensiune de la ieșire. Dacă elementul detector este prevăzut cu o amplificare, este posibil ca elementul de corecție să compenseze cele mai mici variații ale tensiunii de ieșire.

La stabilizatoarele de tip derivație, elementul de corecție este în paralel cu sarcina. Atunci cînd curentul de sarcină are tendința de a se schimba datorită modificării tensiunii de ieșire, se schimbă și curentul prin corector, astfel încît curentul prin rezistența  $R$  să se păstreze constant, menținînd astfel tensiunea la ieșire la valoarea inițială. Dacă se modifică tensiunea la intrare, curentul prin elementul corector se schimbă în așa fel încît tensiunea la ieșire este menținută constantă.

Performanțele unui stabilizator de tensiune continuă se apreciază prin rezistența de ieșire  $R_e$  și coeficientul de stabilizare  $K_u$ , definiți prin relațiile :

$$R_e = \left( \frac{\Delta U_e}{\Delta I_e} \right)_{U_i = \text{const.}}, \quad K_u = \left( \frac{\Delta U_i / U_i}{\Delta U_e / U_e} \right)_{R_e = \text{const.}},$$

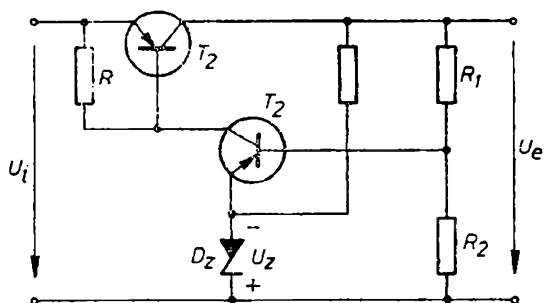


Fig. 11-19. Schema de principiu a unui stabilizator de tip serie.

unde  $R_e$  este rezistența de sarcină.

Tensiunea de referință este obținută cu un tub de gaz, cu descărcare luminiscentă, sau — în cazul semiconductoarelor — cu o diodă Zener.

În fig. 11-19 este reprezentată schema electrică de principiu a unui element stabilizator de tip serie, prevăzut cu două tranzistoare,  $T_1$  și  $T_2$ , și o diodă Zener,  $D_z$ . Variația nedorită de tensiune la ieșire se

transmite în raportul  $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$  la intrarea tranzistorului amplificator  $T_1$ . Tensiunea de referință  $U_z$  este dată de dioda Zener. Variația de tensiune de la ieșire este deci amplificată și apare sub forma unei variații a curentului la colectorul tubului  $T_1$ , care, trecînd prin rezistența de sarcină  $R$  produce tensiunea de comandă a tranzistorului de reglaj  $T_2$ , ce îndeplinește rolul unei rezistențe variabile.

b. **Surse stabilizate de curent continuu.** La acest tip de stabilizator, curentul la ieșire (de sarcină) se menține constant atunci cînd se modifică, în anumite limite, tensiunea de alimentare de la rețea, sau variază rezistența de sarcină. Performanțele unui astfel de stabilizator se apreciază prin admitanța de ieșire  $G_e$  și coeficientul de stabilizare  $K_i$ , definiți prin relațiile :

$$G_e = \left( \frac{I_e}{U_e} \right)_{U_i = \text{const.}}, \quad K_i = \left( \frac{\Delta U_i / U_i}{\Delta I_s / I_s} \right)_{R_s = \text{const.}},$$

unde  $R_s$  este rezistența de sarcină.

Cel mai simplu stabilizator de curent este *baretorul*, a cărui caracteristică tensiune-curent este reprezentată în fig. 11-20, care se observă că poate stabiliiza numai o valoare fixă,  $I_0$ , a curentului.

Schema de principiu a unui stabilizator de c.c. prevăzută cu două tranzistoare,  $T_1$  și  $T_2$ , și o diodă Zener,  $D_z$ , este reprezentată în fig. 11-21. Deosebirea între această schemă și cea a stabilizatorului de tensiune continuă din fig. 11-19 constă în aceea că, curentul de sarcină  $I$  trece printr-un rezistor etalon  $R_{et}$  și tranzistorul  $T_1$  amplifică și transmite variațiile căderii de tensiune pe acest element.

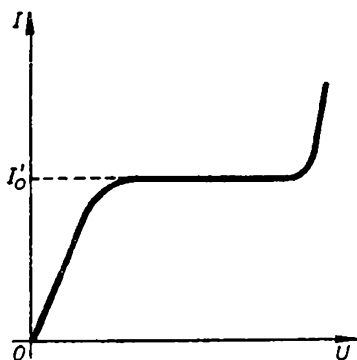


Fig. 11-20. Caracteristica tensiune-curent a baretorului.

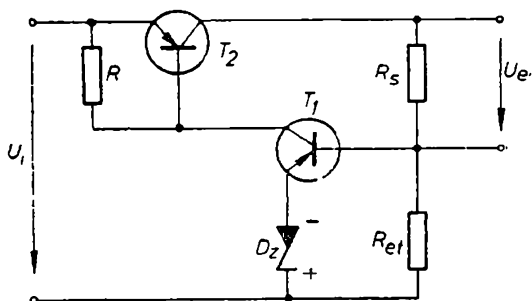


Fig. 11-21. Schema de principiu a unui stabilizator de c.c. cu tranzistoare.

*Ca exemplu de sursă stabilizată de tensiune continuă și cu limitare de curent este cea de fabricație indigenă, tip I-4103, tranzistorizată, destinată alimentării aparatelor de laborator, avînd următoarele date caracteristice :*

- tensiunea de alimentare : 220 V (−15% ... +10%),
- frecvența rețelei : (50 ... 60) Hz,
- temperatura mediului : (+5 ... +40) °C,
- tensiunea stabilizată la ieșire : 0 ... 7,5 V,
- limitarea curentului de sarcină : (0,05 ... 2) A,

- rezistența de ieșire :  $R_e \leq 1 \Omega$ ,
- coeficientul de stabilizare :  $K_u \geq 5\,000$ .

Sursa este prevăzută și cu protecție la supratensiune, între limitele (3...8) V.

c. Surse stabilizate de tensiune alternativă. Unele instrumente sau dispozitive electronice necesită o tensiune alternativă de alimentare constantă, independentă de fluctuațiile tensiunii de la rețea, sau de variațiile curentului de sarcină. În acest caz se folosesc sursele stabilizate de tensiune alternativă care pot fi de diferite tipuri : cu diodă Zener, cu amplificatoare magnetice, cu circuit ferorezonant etc.

## 11.8. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR ȘI MĂSURAREA PARAMETRILOR TRANZISTOARELOR

Performanțele dispozitivelor și aparatelor cu tranzistoare depind în mare măsură de caracteristicile și parametrii acestora. Aceasta impune cunoașterea, sau găsirea prin măsurare, a caracteristicilor și parametrilor tranzistoarelor, care sînt dependente atît de frecvență cît și de temperatură.

Tranzistorul poate fi privit ca un circuit cuadripolar, cu două borne de intrare și două borne de ieșire. În fig. 11-22 este reprezentată schema cuadripolară a tranzistorului de tip *pnp* cu bază comună. Este cunoscut că un tranzistor are mai multe familii de caracteristici, fiecare familie reprezentînd dependența între două mărimi (de la intrare și de la ieșire), avînd pe a treia ca parametru.

Determinarea caracteristicilor tranzistoarelor se realizează folosind metode și mijloace (aparate) adecvate acestui scop, precizîndu-se în fiecare caz și regimul de funcționare al tranzistorului testat. Caracteristicile statice (în curent continuu) ale unui tranzistor se ridică prin *metoda punct cu punct*, care nu necesită

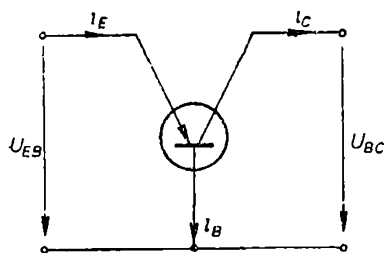


Fig. 11-22. Schema cuadripolară a tranzistorului de tip *pnp* cu bază comună.

aparatură complicată dar nu este suficient de expeditivă. În schimb, prin *metode de baleiaj*, folosind osciloscopul sau un aparat de înregistrare, se pot determina mult mai expeditiv aceste caracteristici. Frecvența de baleiaj trebuie să fie inferioară celei la care apar efecte reactive ce nu mai pot fi neglijate.

Funcționarea tranzistoarelor la semnale mari și în regim de comutație necesită cunoașterea caracteristicilor statice în zone în care disipația admisibilă este mult depășită. *Metodele de impulsuri* permit determinarea carac-

teristicilor statice și în aceste zone prin aplicarea la bornele de acces ale tranzistorului a unor impulsuri de tensiune sau de curent de amplitudine mare și de durată foarte mică, astfel ca tranzistorul să nu fie deteriorat. Spre exemplu, determinarea caracteristicilor statice de ieșire prin metoda impulsurilor se face injectînd impulsuri de curent în circuitul emitorului și măsurînd amplitudinea impulsurilor de curent în circuitul colectorului, pentru diferite valori ale tensiunii continue la colector.

Referitor la măsurarea parametrilor unui tranzistor, sînt necesare unele precizări.

1. Din caracteristicile statice se determină *valorile parametrilor statici* :  
— rezistența emitor-bază (de intrare) :

$$R_i = \left( \frac{du_{EB}}{di_E} \right)_{u_{CB}=\text{const.}}$$

- rezistența bază-colector (de ieșire) :

$$R_e = \left( \frac{du_{BC}}{di_C} \right)_{i_E=\text{const.}}$$

- factorul de amplificare al curentului :

$$= \left( \frac{di_C}{di_E} \right)_{u_{CB}=\text{const.}}$$

- factorul de amplificare a tensiunii :

$$= \left( \frac{du_{BC}}{du_{EB}} \right)_{i_E=\text{const.}}$$

Caracteristicile statice fiind neliniare, valorile acestor parametri depind de poziția pe caracteristică a punctului de funcționare.

2. *Parametrii dinamici* se determină considerînd funcționarea tranzistorului cu semnale periodice de amplitudine mică astfel încît circuitul cuadripolar să poată fi considerat liniar. În acest regim, se folosesc parametrii hibridi de tip  $h$ , ce intervin în ecuațiile cuadripolului de forma :

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2,$$

unde s-a considerat  $u_1 = u_{EB}$ ,  $u_2 = -u_{BC}$ ,  $i_1 = i_E$  și  $i_2 = i_C$ . Se observă că :

$$h_{11} = \left( \frac{u_1}{i_1} \right)_{u_2=0}, \quad h_{12} = \left( \frac{u_1}{u_2} \right)_{i_1=0},$$

$$h_{21} = \left( \frac{i_2}{i_1} \right)_{u_2=0}, \quad h_{22} = \left( \frac{i_2}{u_2} \right)_{i_1=0}.$$

Aceste două precizări, respectiv relațiile de definiție a parametrilor statici și dinamici evidențiază și procedeul folosit pentru măsurarea lor. Spre exemplu,  $u_2 = 0$  înseamnă încercarea tranzistorului cu ieșirea în scurtcircuit, iar  $i_2 = 0$  înseamnă ieșirea în gol.

Aparatura folosită pentru încercarea tranzistoarelor trebuie să satisfacă cerința de a fi de precizie și cu un consum propriu minim posibil. Astfel, pentru măsurarea tensiunilor între electrozi se folosește voltmetrul electronic, iar pentru măsurarea rezistențelor (impedanțelor) de intrare sau de ieșire se folosesc punți electronice.

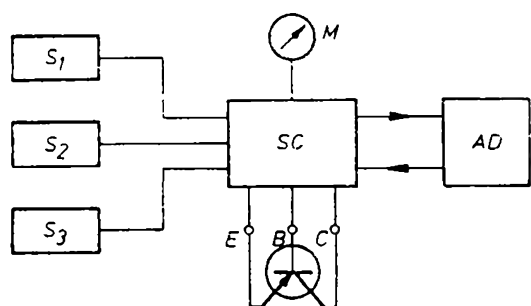


Fig. 11-23. Schema-bloc a tranzistormetrului.

- $S_1$  — sursa de tensiune continuă stabilizată ;
- $S_2$  — sursa de curent reglabilă ;
- $S_3$  — sursă de semnal alternativ ;
- $AD$  — amplificator-detector ;
- $SC$  — sistem de comutare ;
- $M$  — instrument de măsurare magnetoelectric.

Sursa  $S_1$  este de tipul serie prezentat la paragraful 11-7, asigurând tensiuni continue între (0...20) V.

Sursa cu tranzistoare  $S_2$  asigură injectarea unui curent în baza tranzistorului de măsurat în limitele (0...30) mA.

Sursa  $S_3$  asigură curentul alternativ necesar măsurării factorului de amplificare de curent în regim dinamic.

Amplificatorul detector  $AD$  are rolul de a transforma curentul alternativ de la transformatorul de ieșire al sursei  $S_3$  într-un semnal proporțional cu factorul de amplificare de curent al tranzistorului de măsurat.

Sistemul de comutare  $SC$  asigură conectarea instrumentului de măsurare în diferite puncte ale schemei fie ca voltmetru, fie ca miliampermetru.

Tensiunea de alimentare a tranzistormetrului portabil descris este  $220 \text{ V} \pm 10\%$ , iar domeniul de temperatură  $+10^\circ \text{C} \dots +35^\circ \text{C}$ .

## 11.9. UNELE CONSIDERAȚII ASUPRA MĂSURĂRILOR LA CIRCUITELE INTEGRATE

În ultimul deceniu a început să se dezvolte vertiginos *tehnica circuitelor integrate* și alte domenii ale microelectronicii, ramură principală nouă a electronicii moderne. Evident, măsurările folosite în tehnica microelectronică sînt cu totul specifice, în acest scop folosirea aparaturii clasice (voltmetre electronice, ampermetre etc.) fiind total nepotrivită. Este dificil de măsurat cu un ohmmetru (sau ceva similar) valoarea unor rezistențe (impedanțe) create în interiorul unui microcristal în interconexiune strînsă cu alte elemente ale microcristalului.

Circuitele integrate reprezintă blocuri distincte ale unor scheme electronice complexe sau chiar unele circuite electronice de sine stătătoare, de exemplu, bistabili, circuite logice, amplificatoare (cu 2—3 etaje) etc. În acest caz măsurări asupra circuitului se fac aplicînd la intrarea sa un semnal și analizînd răspunsul întregului bloc integrat. Dealtfel, astfel se și face încercarea

*Tranzistormetrul* este aparatul destinat încercării tranzistoarelor. Ne referim la tranzistormetrul portabil de fabricație indigenă, tip IE-0702, care este destinat verificării atît a tranzistoarelor *pnp* și *nnp* de mică putere, cît și a diodelor de mică putere, inclusiv diode Zener. În fig. 11-23 este reprezentată schema bloc a aparatului, compusă din :

$S_1$  — sursa de tensiune continuă stabilizată ;



și sortarea diferitelor circuite integrate, a sistemelor microelectronice în general. În acest scop au fost create instalații speciale de măsurare pentru încercarea și sortarea circuitelor (blocurilor) microelectronice. Cel mai adesea aceste măsurări se fac cu ajutorul unor instalații cuplate cu calculatoare electronice, înzestrate cu aparatură digitală modernă.

Pentru cercetarea mai detaliată a unui modul sau circuit integrat se utilizează în mod curent sonde cu fascicul electronic. În aceste tehnici, accesul la detaliile electronice de ordinul micronilor ( $10-20\text{ }\mu\text{m}$ ) se face prin fascicule electronice care constituie „conductoarele” de legătură între schemă și aparatul de măsurare. De exemplu, cu ajutorul a două microfascicule electronice se poate măsura valoarea unei microrezistențe din interiorul unui circuit integrat bidimensional sau tridimensional.

Analiza prin microscopie electronică prin baleiaj, sau alte metode, este de asemenea folosită în tehnica microelectronică, atât pentru măsurare, cât mai ales pentru controlul producției. Metoda poate fi folosită în diferite etape ale producției microcircuitelor, sau pentru controlul suprafețelor. Uneori, asemenea microscopie care analizează probe (microscheme) după radiațiile X sau electronii secundari generați prin incidența fascicului electronic inițial, se mai numesc și microsonde electronice.

Fotografierea cu raze X este de asemenea mult folosită în controlul unor microscheme, micromodule etc., în vederea descoperirii unor eventuale defecte interioare, mai ales dacă modulul a fost deja încapsulat într-o rășină epoxidică sau alte corpuri speciale.

Tehnica circuitelor integrate a condus la o revoluție în însăși domeniul măsurărilor (electronice) și mai ales telemăsurărilor, chiar la distanțe cosmice. Astfel, majoritatea aparatelor de măsurat digitale se construiesc actualmente pe bază de circuite integrate.

Elaborarea tehnicilor maser și laser au determinat și crearea metodelor de măsurare în domeniul frecvențelor foarte mari, specifice acestor tehnici noi. Chiar metode mai vechi de măsurare au fost reactualizate și completate cu aparatură de mare precizie, ceea ce duce la înglobarea acestor metode în domeniul măsurărilor de tehnică nouă.

### 12.1. PRINCIPIUL DE FUNCȚIONARE AL INSTRUMENTELOR NUMERICE

Instrumentele de măsurare descrise la capitolele precedente pot fi încadrate în categoria instrumentelor *analogice*, întrucât indicația lor se poate modifica continuu pe întreg domeniul de măsurare. Pentru stabilirea valorii măsurate de aceste instrumente, este nevoie de intervenția operatorului care citește diviziunile și subdiviziunile indicate în lungul scalei gradate.

Există și o altă categorie de instrumente de măsurare, denumite *numerice*, care furnizează direct, prin cifre, valoarea mărimii măsurate. Cu cât numărul de cifre afișate este mai mare, cu atât precizia măsurării este mai ridicată.

O măsurare numerică constă, în fond, în aproximația unei funcții continue (mărimii de măsurat) printr-o mulțime discretă de valori. Dispozitivul care operează această transformare se numește convertor analog-numeric. De exemplu, dacă mărimea de măsurat  $A(t)$  prezintă în timp variația reprezentată în fig. 12-1, mulțimea continuă a valorilor acestei funcții se înlocuiește printr-o mulțime discontinuă, cu un număr limitat de valori discrete (0, 1, 2, 3, ...). Valoarea mărimii la momentul  $t_1$  se înlocuiește cu valoarea discretă cea mai apropiată (3 sau 4). Evident că acest proces de aproximare introduce erori care sînt cu atât mai mici, cu cât intervalul dintre valorile discrete alese (cuantizarea) este mai mic.

Stările discrete de la ieșirea convertorului analog-numeric sînt transformate în numere cu ajutorul unui codificator, operație denumită codificare. La ieșirea din codificator se atașează partea de măsurare propriu-zisă.

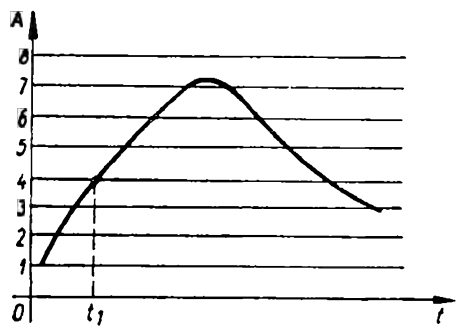


Fig. 12-1. Discretizarea în trepte a unei mărimi cu variație continuă în timp.

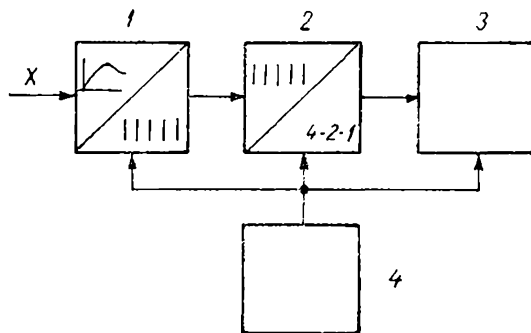


Fig. 12-2. Schema bloc a unui instrument numeric.

În fig. 12-2 este reprezentată schema bloc a unui instrument numeric. Mărimea analogică  $X$  este discretizată în convertorul analog-numeric 1, a cărui informație este codificată de codicatorul 2 și apoi transmisă instalației de ieșire 3. Întreaga funcționare a schemei este guvernată de dispozitivul de comandă 4.

## 12.2. VOLTMETRUL NUMERIC

Voltmetrele numerice sînt de mai multe tipuri. În continuare se prezintă principiul de funcționare al voltmetrului numeric cu 4 cifre, tip VN 1-4/B, de fabricație indigenă.

Voltmetrul numeric VN 1 măsoară tensiuni cu o eroare de 0,2%, de la 100  $\mu$ V pînă la 1 000 V c.c. Acest aparat funcționează pe principiul aproxi-

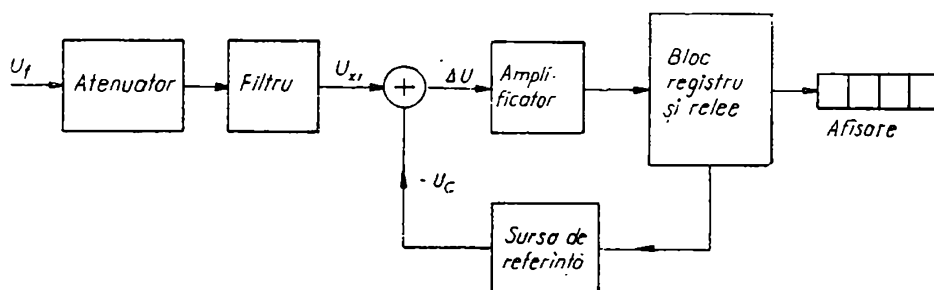


Fig. 12-3. Schema bloc a voltmetrului numeric cu 4 cifre.

mărilor succesive, pe baza comparației dintre tensiunea de măsurat  $U_x$  și o tensiune de referință (comparație)  $U_c$ . Schema de principiu a funcționării acestui tip de voltmetru este reprezentată în fig. 12-3.

Înainte de a fi comparată cu tensiunea de referință, tensiunea de măsurat  $U_x$  este divizată prin atenuatorul de intrare, format dintr-un sistem de rezistențe, și filtrată printr-un sistem de capacități de semnalele perturbatoare pe care le poate conține. Semnalul de intrare  $U_{xi}$  astfel obținut (prin filtru și atenuator) este însumat cu o tensiune de referință de polaritate opusă. Se obține semnalul abatere  $\Delta U = U_{xi} - U_c$  care este trecut printr-un amplificator de c.c. Semnalul de ieșire din acest amplificator are forma unor impulsuri rectangulare cu amplitudinea și polaritatea corespunzătoare semnalului abatere.

Semnalul de la ieșirea din amplificator este prelucrat de blocul ce conține un registru de deplasare și relee care se stabilizează pentru starea corespunzătoare la  $\Delta U = 0$ . În acest sens, mărimea de ieșire din acest bloc acționează asupra sursei de referință și modifică tensiunea de comparație  $U_c$  pînă cînd se ajunge la  $U_{xi} = U_c$ , adică  $\Delta U = 0$ . Modificarea tensiunii de comparație atrage după sine schimbarea celor 4 cifre de la sistemul de afișaj, pînă în momentul cînd este atinsă starea stabilizată, cînd se poate citi valoarea tensiunii de măsurat  $U_x$ .

Din această scurtă prezentare a voltmetrului numeric de c.c. se reține faptul că măsurarea tensiunii se face prin comparație cu o tensiune de referință variabilă. Variația tensiunii de referință are loc în trepte egale, astfel că  $U_c = n \Delta U_c$ , unde  $\Delta U_c$  este treapta elementară. Măsurarea începe de la  $U_c = 0$  și

se continuă pînă cînd  $U_c = U_{xi}$ . În acest moment, numărul de trepte necesare,  $n$ , este o măsură a tensiunii  $U_x$ .

Există și alte posibilități de comparație între tensiunea de măsurat și tensiunea de referință. De exemplu, tensiunea de referință poate fi liniar variabilă, cu o pantă dată. În acest caz, timpul pînă cînd se ajunge la îndeplinirea condiției de compensare este o măsură a tensiunii  $U_x$ .

Voltmetrele numerice pentru măsurarea tensiunilor alternative sînt prevăzute în plus cu un convertor c.a.-c.c. Deci, după convertire, urmează măsurarea tensiunii continue obținute, așa cum s-a explicat mai sus. În funcție de tipul convertorului utilizat se poate măsura valoarea medie sau valoarea efectivă a tensiunii alternative.

*Rezoluția* voltmetrelor numerice se exprimă prin cea mai mică valoare a tensiunii ce poate fi măsurată pentru fiecare domeniu de măsurare al instrumentului. Evident că rezoluția corespunde unității din rangul inferior al sistemului de indicație numerică. Schimbînd domeniul de măsurare al instrumentului (deplasînd virgula indicatorului) se modifică și rezoluția. De exemplu, la un voltmetru numeric cu 6 cifre și domeniul de măsurare de 1 V, rezoluția este 1  $\mu$ V.

*Eroarea* voltmetrelor numerice este determinată, în principal, de cuantificarea realizată de convertorul analog-numeric.

### 12.3. MĂSURAREA NUMERICĂ A CURENTULUI ELECTRIC

Măsurarea numerică a curentului electric se poate efectua după procedura generală, prin inserierea în circuit a unei rezistențe cunoscute, de valoare convenabil aleasă, la bornele căreia se măsoară cu un voltmetru numeric căderea de tensiune, proporțională cu intensitatea curentului. Aceasta este metoda cea mai simplă și cea mai frecvent utilizată. Există însă și metode și instrumente (ampermetre) numerice specifice acestui scop, la care ne referim, sumar, în cele ce urmează.

**Măsurarea numerică a curentului electric prin compararea unor sarcini electrice sub formă de impulsuri.** Metoda se bazează pe egalitatea dintre sarcina transportată de curentul de măsurat într-un timp scurt,  $Q_x = I_x t$ , cu sarcina transportată de impulsuri etalon de curent repetate,  $Q_e = nq$ , unde  $n$  este numărul unor astfel de impulsuri și  $q$  sarcina corespunzătoare fiecăruia. Prin urmare,  $n$  este o măsură a curentului  $I_x$ .

Schema bloc a unui astfel de instrument de măsurare este reprezentată în fig. 12-4. Sarcina transportată de curentul  $I_x$  încarcă condensatorul  $C$ , astfel încît tensiunea  $U_c$  aplicată la intrarea amplificatorului 1 crește și, cînd atinge o anumită valoare, semnalul de ieșire din amplificator produce bascularea discriminatorului 2, care deblochează generatorul 3, de 5 MHz. Impulsurile generatorului 3 sînt numărate și, în același timp, provoacă producerea impulsurilor etalon de sarcină  $q$  de către generatorul 4. Semnul sarcinii  $q$  este astfel ales încît să producă descărcarea condensatorului  $C$ . După  $n$  astfel de impulsuri etalon, condensatorul este descărcat și discriminatorul 2 rebasculază în poziția inițială, provocînd blocarea generatorului 3, respectiv a generatorului 4. După aceasta, ciclul de funcționare se repetă deoarece  $I_x$  produce o nouă încărcare a condensatorului  $C$ .

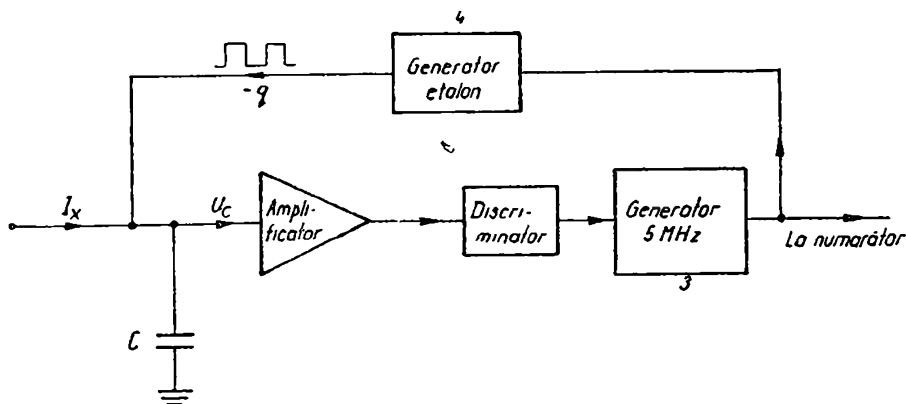


Fig. 12-4. Schema bloc a ampermetrului numeric cu impulsuri de sarcină electrică.

Se observă că numărul  $n$  de impulsuri etalon este mai mare sau mai mic, după cum intensitatea curentului de măsurat  $I_x$  este mai mare sau mai mică. Înregistrînd  $n$  la un numărător de impulsuri, rezultă valoarea numerică a lui  $I_x$ .

**Măsurarea numerică a curentului electric prin compararea succesivă cu valori cunoscute.** În principiu, această metodă folosește proprietatea de remagnetizare prin impulsuri de curent a miezurilor din ferită cu ciclul de histerezis dreptunghiular. În fig. 12-5, *a* este reprezentat un astfel de miez, iar în fig. 12-5, *b* este arătat ciclul său de histerezis rectangular. Pentru ca miezul să comute din starea de magnetizare  $-B_s$  în  $+B_s$  sau din starea  $+B_s$  în  $-B_s$  este necesar un cîmp de excitație  $H > H_c$ , respectiv  $H < -H_c$ . Se notează cu  $I_c$  curentul care produce cîmpul  $H_c$ .

Se consideră că, în prezența curentului de comparație cunoscut,  $I_k$ , miezul din ferită se găsește în starea de magnetizare  $-B_s$ . Aplicînd în această stare curentul de măsurat  $I_x$ , miezul va comuta în starea  $+B_s$  numai dacă  $I_x - I_k > I_c$ . În caz contrar, miezul rămîne mai departe în starea  $-B_s$ . Dacă comutarea are loc, va apare în bobina situată pe miez o t.e.m. indusă  $u_e$  (sub formă de impuls). Deci, apariția impulsului  $u_e$  este un indiciu că  $I_x$  este mai mare decît o anumită valoare cunoscută.

Pe același principiu, se efectuează o nouă comparație a lui  $I_x$ , de exemplu cu  $\frac{1}{2} I_k$ , ș.a.m.d. Astfel, din aproape în aproape, se ajunge să se stabilească cu precizie valoarea lui  $I_x$ , care se afișează la sistemul numeric al instrumentului.

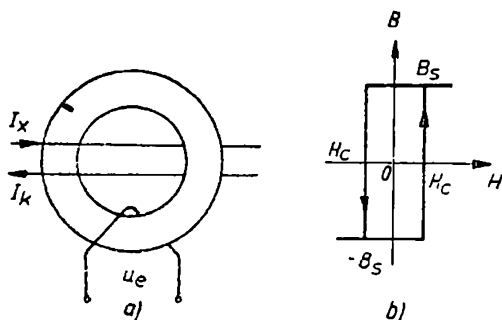


Fig. 12-5. Măsurarea numerică prin comparație a intensității curentului electric :  
a — miezul din ferită; b — ciclul de histerezis rectangular.

## 12.4. MĂSURAREA NUMERICĂ A DEFAZAJULUI ȘI FACTORULUI DE PUTERE

La paragraful 11.4 s-a explicat posibilitatea măsurării analogice a defazajului dintre două mărimi sinusoidale, folosind un voltmetru electronic. Dacă în locul voltmetrului electronic se folosește un voltmetru numeric, valoarea defazajului se obține sub formă numerică.

Știind că în regim sinusoidal factorul de putere este  $\Delta = \cos \varphi$ , înseamnă că există posibilitatea ca pentru fiecare valoare numerică a defazajului  $\varphi$  să se obțină, tot sub formă numerică, valoarea factorului de putere  $\Delta$ . Pentru aceasta trebuie să se țină seama de legătura neliniară între  $\Delta$  și  $\varphi$ , exprimată prin funcțiunea cosinus. Există în acest sens aparate de măsurare numerice care îndeplinesc cerința impusă, destul de complexe, a căror descriere este prezentată în literatura de specialitate.

## 12.5. MĂSURAREA NUMERICĂ A PUTERII

Puterea și energia au fost probabil primele mărimi electrice măsurate numeric. Contorul de energie este în orice caz, și astăzi, cel mai răspândit aparat de măsurare numeric.

El poate servi și pentru măsurarea puterii. După cum se știe, viteza de rotație a contorului este proporțională cu puterea consumată. Pentru a produce impulsuri a căror frecvență să fie proporțională cu viteza, au fost imaginate și aplicate o mulțime de procedee, începând cu montarea unor lamele de contact pe axul contorului trecând apoi la practicarea unor orificii, la periferia discului, prin care, la trecerea lor prin dreptul unei surse, lumina produce impulsuri prin elemente fotoelectrice, sau la aplicarea unor piese feromagnetice pe disc, care trecând printre două bobine cuplate magnetic ale unui oscilator, întrerup oscilațiile acestuia. Toate aceste procedee nu pot asigura o precizie prea ridicată din cauza erorilor proprii ale contorului. Ele se utilizează însă și astăzi în sisteme de telemăsurare puțin pretențioase.

Tendința actuală privind măsurarea numerică a puterii este de a o converti într-o altă mărime (tensiune, frecvență), proporțională cu ea, și de a măsura numeric această mărime.

**Convertoare putere-tensiune.** Una dintre posibilitățile de a converti puterea în tensiune este oferită de sonda cu efect Hall, la care, așa cum este cunoscut, tensiunea Hall  $u_H$  este proporțională cu produsul între curentul de comandă  $i_c$  și inducția magnetică  $B$ :  $u_H = C_H i_c B$ . Dacă curentul de comandă  $i_c$  se alege proporțional cu tensiunea  $u_b$  de la bornele unui circuit și dacă inducția magnetică  $B$  este proporțională cu curentul  $i$  din circuit, rezultă tensiunea Hall proporțională cu puterea electromagnetică instantanee:

$$u_H = k u_b i = k p. \quad (12-1)$$

În regim sinusoidal, valoarea medie a tensiunii Hall în raport cu o perioadă este proporțională cu puterea activă:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_H dt = k \frac{1}{T} \int_0^T p dt = k P = k U_b I \cos \varphi. \quad (12-2)$$

Prin urmare, indicația unui voltmetru numeric folosit pentru măsurarea tensiunii Hall, redă, la o altă scară, puterea activă.

**Convertoare de putere cu dispozitive de înmulțire numerică.** Valoarea numerică a puterii se poate obține prin produsul între valorile numerice a tensiunii efective de la borne, a curentului efectiv din circuit și a factorului de putere, conform schemei reprezentată în fig. 12-6. Convertoarele analog-numerice 1 au rolul de a da la ieșire valorile numerice ale tensiunii, curentului (mărimi

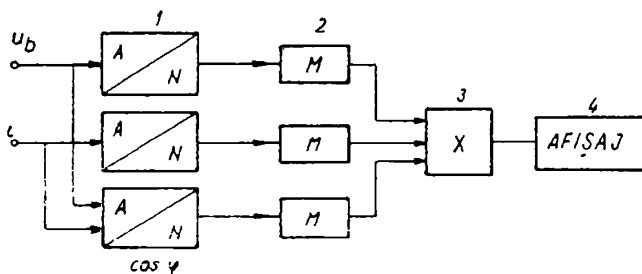


Fig. 12-6 Schema bloc a wattmetrului numeric cu dispozitive de înmulțire.

efective) și factorului de putere, care se înmagazinează în dispozitivele de memorare 2. Din aceste memorii se scot, ciclic, valorile numerice și se înmulțesc în dispozitivul 3. Rezultatul înmulțirii apare la afișajul 4.

Wattmetrele numerice sînt destul de costisitoare dar, ca și alte instrumente numerice de măsurare, oferă posibilitatea urmăririi și comenzii de la distanță a puterii, respectiv a altor mărimi (telemăsurare, telecomandă), ceea ce prezintă importanță deosebită în sistemele electrice de putere. Toate aceste informații redată prin valori numerice ajung la un punct central de dispecerat din care se coordonează funcționarea la parametrii optimi ai sistemului.

## 12.6. NUMĂRĂTOARE ELECTRONICE

Există un număr mare de instrumente electronice destinate numărării impulsurilor primite de la o sursă într-un interval de timp dat, numite numărătoare electronice. De regulă, aceste numărătoare sînt constituite din circuite bistabile care au la ieșire două stări stabile: 1 (tensiune mare) și 0 (tensiune mică). Trecerea dintr-o stare în alta are loc la fiecare impuls de un anumit semn aplicat la intrare.

În cele ce urmează, se prezintă principiul de funcționare al numărătoarelor binare și zecimale, precum și unele aplicații.

### 12.6.1. NUMĂRĂTOARE BINARE

Se consideră în figura 12-7 un numărător cu patru circuite bistabile în lanț, avînd ieșirile notate cu A, B, C și D. La intrarea primului circuit bistabil din dreapta se aplică un tren de impulsuri negative (impulsul negativ provoacă bascularea).

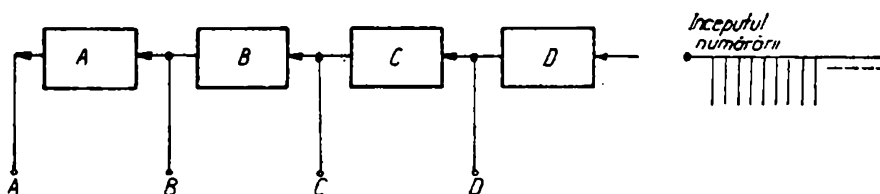


Fig. 12-7. Schema de principiu a numărătorului binar de impulsuri cu patru circuite bistabile.

Presupunem că la începutul numărării toate circuitele bistabile au la ieșire starea zero, adică  $A=0$ ,  $B=0$ ,  $C=0$  și  $D=0$ , ceea ce înseamnă numărul binar 0000. La primul impuls primit, circuitul bistabil  $D$  trece din starea 0 în starea 1. Următorul circuit bistabil rămâne în continuare în starea inițială 0, deoarece la intrarea sa a apărut un impuls pozitiv care nu produce basculare. Deci, numărul binar care exprimă această nouă stare a circuitelor bistabile este 0001. La al doilea impuls

Tabela 12-1

Starea circuitelor bistabile din fig 12-7

Nr. impulsurilor	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1
16	0	0	0	0

primit din exterior, circuit bistabil  $D$  basculează din nou, din starea 1 în starea 0. Următorul circuit bistabil,  $C$ , basculează din 0 în 1 deoarece la intrarea sa a apărut un impuls negativ prin trecerea din 1 în 0 a bistabilului  $D$ . Această nouă stare a circuitelor bistabile corespunde numărului binar 0010. Procesul se desfășoară analog la al treilea impuls, ș.a.m.d. În tabela 12-1 este prezentată starea circuitelor bistabile după fiecare impuls primit din exterior.

Dacă tensiunile de la ieșirile  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  se aplică unor beculețe fixate pe un panou, se poate urmări vizual starea fiecărui bistabil, respectiv numărul binar prin care se exprimă numărul de impulsuri primite.

Se observă din tabela 12-1 că, cu sistemul compus din patru bistabile nu se poate număra (în binar) decât un număr de 15 impulsuri.

**Aplicația 12-1.** Dacă numărătorul binar este prevăzut cu șapte elemente bistabile, care este numărul de impulsuri ce poate fi înregistrat?

**Rezolvare.** Numărul binar maxim ce poate fi înregistrat la numărătorul cu șapte elemente bistabile este: 1111111. La acest număr binar, corespunde numărul zecimal:

$$2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 127.$$

Deci, se pot număra 127 de impulsuri.



## 12.6.2. NUMĂRĂTOARE ZECIMALE

Principiul de funcționare al unui numărător zecimal, realizat cu elemente bistabile și elemente logice, urmărește transformarea numerelor binare în numere zecimale. Cu alte cuvinte, impulsurile de ordinul unităților numărate de sistemul binar se transpun în sistemul de numărare zecimală la rangul

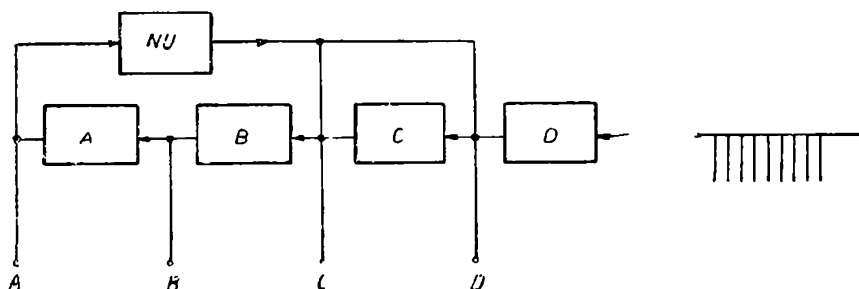


Fig. 12-8. Schema de principiu a numărătorului binar cu patru bistabile, a căror stări se repetă după fiecare zece impulsuri.

unităților, apoi grupe de câte zece impulsuri numărate de sistemul binar se transpun în sistemul zecimal la rangul zecilor, ș.a.m.d. Evident, aceasta înseamnă că la fiecare al zecelea impuls numărat de sistemul binar, acesta să revină în starea inițială, apt pentru a număra alte 10 impulsuri.

În figura 12-8 este reprezentat sistemul de numărare în binar, cu patru elemente bistabile prevăzute cu două bucle de reacție, care revine în starea inițială 0000 la fiecare al zecelea impuls (tab. 12-2).

Sistemul de înregistrare (și citire) în zecimal a numărului de impulsuri de la 0 la 9 constă din 10 ansambluri realizate din elemente logice NU și ȘI, câte un ansamblu pentru fiecare număr zecimal. La intrarea acestor ansambluri se aplică impulsurile A, B, C, D de la sistemul binar. În figura 12-9, a, b și c sînt reprezentate ansamblurile pentru înregistrarea și vizualizarea prin aprinderea unui bec a numerelor zecimale 0, 1, 2 și 3. Evident că la un moment dat, adică după un anumit impuls, va lumina numai un singur bec din cele 10.

Tabela 12-2

Starea circuitelor bistabile din fig. 1-28

Nr. impulsurilor	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1
10	0	0	0	0

Pentru înregistrarea zecilor, sutelor, ... sistemul zecimal este prevăzut cu grupe în cascadă de câte zece ansambluri fiecare (fig. 12-10), similare cu grupa de ansambluri a unităților descrisă mai sus. La fiecare al zecelea impuls, înregistrat la o grupă de ansambluri, se transmite un impuls la grupa de ansambluri din stînga (de exemplu, de la grupa zecilor, la grupa sutelor etc.).

Pentru a număra impulsurile într-un interval de timp, de exemplu în 1 secundă, este necesar să se adapteze la numărătorul binar-zecimal o „poartă” care să permită numărarea impulsurilor numai în acel interval de timp, respec-

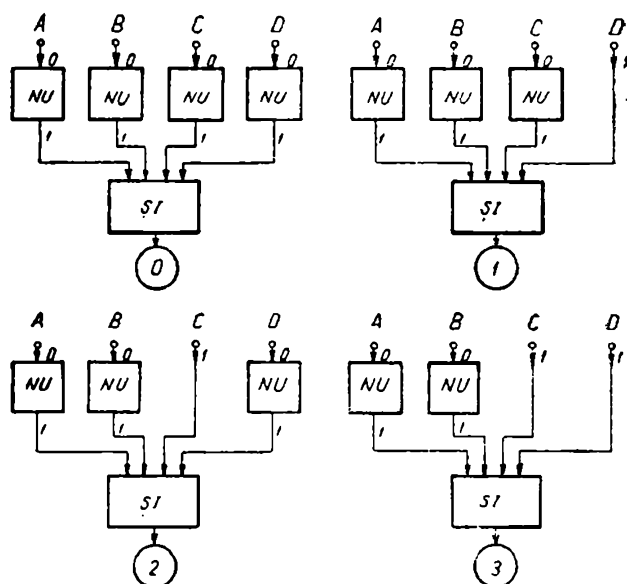


Fig. 12-9. Ansamblele pentru convertirea din binar în numerele zecimale 0, 1, 2 și 3.

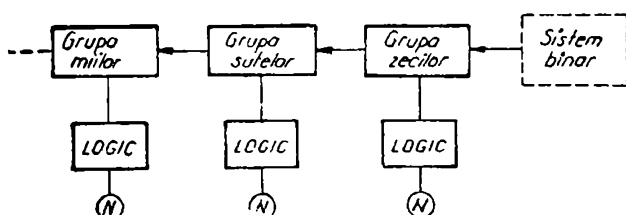


Fig. 12-10. Cascada ansamblelor de convertire din binar pe ranguri zecimale.

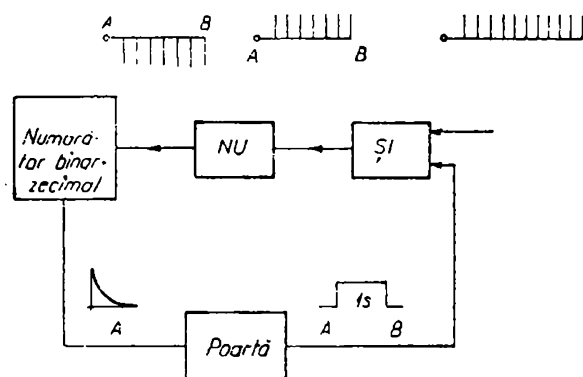


Fig. 12-11. Numărător cu o poartă.

— repetarea numărării trenului de impulsuri cuprinse într-o secundă trebuie să se facă la intervale de timp care să permită citirea (vizualizarea) valorii frecvenței în orice moment.

tiv de a aduce numărătorul în starea zero la începutul intervalului. În fig. 12-11 este reprezentată schema numărătorului prevăzut cu o „poartă” din care se poate deduce foarte ușor principiul de funcționare. La începutul intervalului de numărare (punctul A), poarta dă un impuls la numărător și îl aduce în starea zero și, în același moment, dă un semnal rectangular prin care se fixează începutul A și sfârșitul B al intervalului de numărare.

## 12.7. FRECVENȚMETRUL NUMERIC

Frecvențmetrul numeric constituie una din cele mai evidente aplicații ale numărătoarelor electronice de impulsuri. Problemele prezentate la paragraful precedent, referitoare la numărarea impulsurilor într-un interval de timp dat, constituie de fapt principiul de funcționare al frecvențmetrului numeric, care trebuie să indice numărul de perioade (oscilații) într-o secundă.

Următoarele precizări mai trebuie adăugate :

— alternanța pozitivă a fiecărei oscilații trebuie transformată într-un impuls adecvat intrării în numărătorul binar-zecimal ;

— poarta care eșantionează timpul de măsurare la 1s trebuie să fie de precizie ridicată, mai ales atunci când frecvența de măsurat este mare ;

## Capitolul 13

# VERIFICAREA ȘI ETALONAREA INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

### 13.1. CONSIDERAȚIUNI GENERALE

Verificarea instrumentelor electrice de măsurare este o operație obligatorie atât pentru instrumentele de fabricație nouă, precum și pentru cele în folosință, fiind efectuată de către organele metrologice autorizate. Verificarea poate fi :

- *inițială*, când se efectuează asupra fiecărui instrument de măsurare nou fabricat, reparat sau importat ;

- *periodică*, când se efectuează la termene stabilite asupra instrumentelor de măsurare în folosință ;

- *la cererea* organizațiilor socialiste deținătoare de instrumente de măsurare.

Organele metrologice de verificare eliberează buletine de verificare pentru fiecare instrument în care se precizează rezultatul verificării (admis, respins).

Pentru fiecare tip de instrument supus verificării există instrucțiuni oficiale de verificare, a căror respectare este obligatorie. În aceste instrucțiuni sînt precizate : natura și condițiile verificării, aparatura folosită și clasa de precizie a acesteia, limitele admisibile ale abaterilor în timpul funcționării instrumentului etc.

Întrucît pentru verificarea și etalonarea instrumentelor electrice de măsurare se folosesc frecvent compensatoare (potențiometre), se prezintă în continuare principiul de funcționare al acestora.

### 13.2. COMPENSATOARE DE MĂSURARE

#### 13.2.1. PRINCIPIUL DE FUNCȚIONARE

Compensatoarele (numite și potențiometre) sînt dispozitive de măsurare prin comparație, bazate în mod obișnuit pe metode de nul.

După cum se știe, metoda de nul constă în compararea acțiunilor a două mărimi, una cunoscută și una necunoscută și în cazul în care diferența acțiunilor este nulă se trage concluzia că cele două mărimi au valori egale. Dacă mărimea cunoscută (mărimea etalon) este de precizie mare și compensarea este riguroasă, precizia determinării mărimii necunoscute poate fi foarte mare.

În general, cu compensatoarele pot fi măsurate tensiuni precum și oricare altă mărime care poate fi transformată în tensiune.

Pentru o instalație de compensare sînt necesare : o tensiune etalon reglabilă în limite largi și în trepte fine, de precizie foarte mare și un aparat care să indice egalitatea celor două tensiuni (instrument de nul) de exemplu, un galvanometru.

Compensatoarele pot fi de c.c. sau de c.a.

### 13.2.2. COMPENSATOARE DE CURENT CONTINUU

În c.c. obținerea unei tensiuni etalon reglabilă este foarte dificilă, căci pilele etalon (Weston) au tensiunea cunoscută cu precizie, dar nereglabilă. Soluția se obține prin folosirea unui divizor de tensiune de pe care se pot culege tensiuni de valori diferite, prin deplasarea cursorului. Însă, pentru a cunoaște tensiunea culeasă, este nevoie ca divizorul să fie parcurs de un curent constant, bine cunoscut, și ca rezistența divizorului să fie cunoscută și de asemenea constantă.

Divizorul se realizează neapărat reglabil în trepte, de exemplu în decade, pentru a avea rezistențele determinate cu precizie (nu se poate folosi o rezistență reglabilă continuu, deoarece nu se poate fixa cu precizie valoarea rezistenței).

Schema de principiu a unui compensator de c.c. este reprezentată în fig. 13.1. Ea cuprinde trei circuite, care au funcțiuni distincte.

Circuitul I conține sursa auxiliară de tensiune  $U_a$ , care furnizează curentul de lucru  $I_a$ . Acest curent poate fi modificat cu rezistența  $R_h$  și trece prin divizorul ohmic de tensiune cu rezistența totală  $R_k$  și prin rezistența  $R_N$  care servește la măsurarea lui.

Circuitul II conține sursa de tensiune etalon (pila Weston, de tensiune electromotoare  $U_N = 1,01865$  V), un galvanometru  $G$  ca indicator de nul, comutatorul  $K$  și rezistența  $R_N$ . Acest circuit este destinat măsurării curentului  $I_a$ .

Circuitul III servind măsurărilor, conține tensiunea de măsurat  $U_x$ , galvanometrul și porțiunea  $R_c$  din rezistența divizorului ohmic de tensiune.

Dacă comutatorul  $K$  este în poziția 1, se poate scrie :

$$U_N = (I_a + i) R_N + i (R_g + R_i) \quad (13-1)$$

sau

$$I_a = \frac{U_N}{R_N} - \frac{i (R_N + R_g + R_i)}{R_N}, \quad (13-2)$$

unde  $R_i$  este rezistența interioară a sursei de tensiune  $U_N$ .

Regimul de funcționare al compensatoarelor se particularizează pentru cazul în care  $i=0$ , cînd  $I_a$  are valoarea :

$$I_a = \frac{U_N}{R_N}, \quad (13-3)$$

care este foarte precis determinată. Modificarea curentului  $I_a$  se face cu rezistența  $R_h$ , pînă cînd  $i=0$ . Pentru ca curentul  $I_a$  să rămînă constant în continuare, trebuie ca tensiunea  $U_a$  să rămînă constantă și rezistențele compensatorului să aibe un coeficient de variație cu temperatura neglijabil. De asemenea, rezistențele de contact trebuie să rămînă constante. De aceea, toate rezistențele compensatorului se realizează din manganină și cu ploturi (deci reglabile în trepte), inclusiv rezistența  $R_h$ .

Pentru a măsura tensiunea necunoscută  $U_x$ , se trece comutatorul  $K$  în poziția 2 și la echilibru, cînd galvanometrul  $G$  indică zero, se poate scrie :

$$U_x = I_a R_c. \quad (13-4)$$

Echilibrul se realizează modificînd pe  $R_c$ , curentul  $I_a$  trebuind să rămînă în tot cursul măsurărilor neschimbat. În aceste condiții, din (13-3) și (13-4) se obține :

$$U_x = U_N \frac{R_c}{R_N}. \quad (13-5)$$

Aceasta arată că tensiunea  $U_x$  se măsoară prin comparație cu tensiunea etalon  $U_N$ , cu o precizie determinată de preciziile de cunoaștere a mărimilor  $U_N$ ,  $R_c$  și  $R_N$ .

### 13.2.3. COMPENSATOARE DE CURENT ALTERNATIV

În c.a. problema compensatoarelor se prezintă mult mai complicat, fiind necesare mai multe condiții pentru a se realiza compensarea : tensiunea etalon reglabilă trebuie să aibă, față de tensiunea de măsurat, la o compensare perfectă, aceeași formă de variație în timp, aceeași frecvență, aceeași fază și aceeași amplitudine. Aceste condiții introduc tot atîtea elemente de reglare.

Compensatoarele de c.a. sînt de două tipuri :

- compensatoare în coordonate rectangulare ;
- compensatoare în coordonate polare.

La compensatorul în coordonate rectangulare tensiunea de măsurat  $\underline{U}_x$  se compensează prin două componente rectangulare  $\underline{U}_{ca}$  și  $\underline{U}_{cr}$  ale tensiunii de  $\underline{U}_c$  (fig. 13-2), dintre care  $\underline{U}_{ca}$  este în fază cu curentul de lucru  $\underline{I}_a$  a compensatorului. Fiecare dintre aceste două componente ale tensiunii de compensare se pot modifica între anumite limite, fără a se schimba defazajul dintre ele.

La compensatorul în coordonate polare tensiunea de măsurat  $\underline{U}_x$ , se compensează cu tensiunea  $\underline{U}_c$  a cărei fază se modifică cu ajutorul unui regulator de fază și a cărei valoare efectivă se modifică între anumite limite.

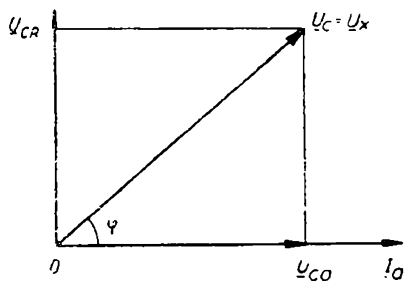


Fig. 13-2. Componentele rectangulare ale tensiunii de compensare

### 13.3. VERIFICAREA AMPERMETRELOR ȘI VOLTMETRELOR

Verificarea ampermetrelor și voltmetrelor, în general a oricărui instrument electric de măsură, constă în următoarele :

— *Verificarea echilibrării sistemului mobil* : dacă se înclină cu  $10^\circ$  instrumentul în orice direcție, acul indicator, în prealabil adus la zero, nu trebuie să se deplaseze mai mult decât cu eroare de clasă.

— *Verificarea mișcării libere a sistemului mobil* : se variază cu un dispozitiv alimentarea, pînă cînd deviația acului indicator ajunge la limita superioară a scalei. Apoi, alimentarea se reduce, pînă cînd indicația ajunge la zero. Dispozitivul indicator trebuie să se deplaseze lin, fără salturi.

— *Verificarea deviației inițiale* : se aplică brusc valoarea egală cu  $2/3$  din limita scalei gradate (intensitate sau tensiune, după felul aparatului), indicatorul fiind la reperul inițial. Deviația inițială nu trebuie să depășească cu mai mult de 30% deviația permanentă pentru acea valoare.

— *Verificarea deviației remanente* : se aduce indicatorul la valoarea maximă a scalei și se reduce alimentarea încet pînă la zero, indicatorul trebuind să revină la poziția inițială în limitele erorii tolerate.

— *Verificarea timpului de amortizare a oscilațiilor* : se aduce indicatorul la mijlocul scalei gradate, se deconectează și se lasă indicatorul să-și amortizeze oscilațiile în jurul poziției inițiale, apoi se conectează brusc pornind în același moment un cronometru care se oprește în momentul în care oscilațiile au devenit mai mici decât 1,5% din lungimea scalei gradate. Se fac trei astfel de determinări și se ia media, care nu trebuie să depășească 4 s.

— *Verificarea rezistenței de izolație la străpungere* : se face cu instalații cu puterea de minimum 0,5 kVA pentru fiecare 1 000 V tensiune de încercare, prevăzute cu transformator ridicător de tensiune. Tensiunea de încercare se aplică progresiv, crescînd cu 100 V/s, iar descreșterea tensiunii se face de asemenea uniform. Rezistența de izolație la străpungere, pentru toate categoriile de aparate electrice trebuie să suporte timp de 60 s, la temperatura mediului ambiant de  $20^\circ \pm 5^\circ \text{C}$  și umiditate relativă 65% ... 80%, următoarele tensiuni de încercare, în funcție de tensiunile nominale de izolație : 0,5 kV, la cele cu tensiunea nominală de izolație 40 V ; 2 kV, la cele cu tensiunea nominală de izolație pînă la 650 V ; 3 kV, la cele pînă la 1 000 V ; 5 kV, la cele pînă la 2 000 V.

— *Verificarea indicațiilor* : la instrumentele electrice etalon și la cele de laborator de clasa 0,1 ... 0,5, verificarea indicațiilor se face prin *metoda compensației*, cu precizie de 0,02 ... 0,05% din limita de măsurare ; la instrumentele tehnice (clasa 1 ... 5), verificarea indicațiilor se face prin *metoda comparației* cu indicațiile unui instrument etalon cu indicele de clasă de cel puțin 5 ori mai mic decât al celor de verificat, cu limita superioară de măsurare aceeași cu a aparatelor de verificat și de același tip. Instrumentele de clasa 0,1 ; 0,2 ; 0,5 se pot verifica imediat după conectarea lor în circuit, iar celelalte după lăsarea sub curentul și tensiunea nominală timp de 30 de min. Cele cu mai multe domenii de măsurare se verifică pentru fiecare domeniu.

În fig. 13-3 este reprezentată schema instalației pentru verificarea indicației ampermetrelor de c.c. prin metoda compensației. Schema instalației pentru verificarea indicației voltmetrelor de c.c. prin metoda compensației este repre-

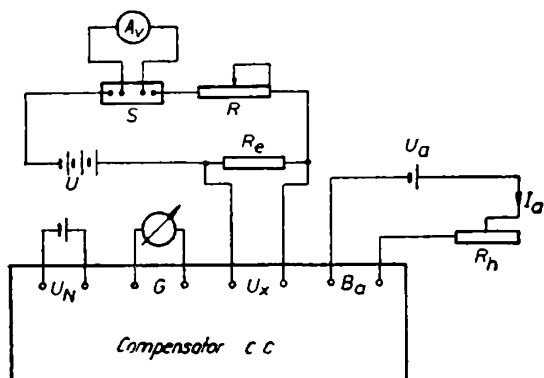


Fig. 13-3. Schema de verificare cu compensatorul a ampermetrelor de c.c.

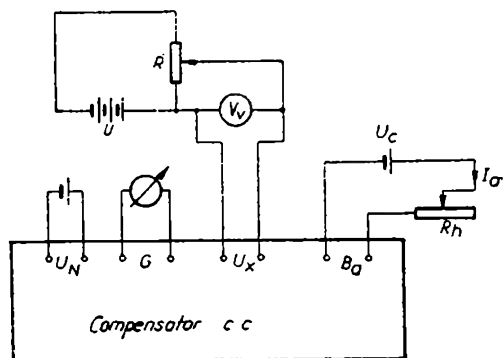


Fig. 13-4. Schema de verificare cu compensatorul a voltmetrelor de c.c.

zentată în fig. 13-4. Semnificația elementelor din aceste două scheme este următoarea :

- $U_N$  — tensiunea etalon (element Weston);
- $G$  — galvanometru (instrument de nul);
- $A_v, V_v$  — instrumente de verificat;
- $B_a$  — baterie de alimentare a compensatorului, pentru curentul de lucru  $I_a$ ;
- $U_a$  — tensiunea bateriei exterioare;
- $R_e$  — rezistență etalon;
- $R_h$  — rezistența de modificare a curentului (tensiunii) de măsurat;
- $S$  — șunt.

În fig. 13-5 este reprezentată schema pentru verificarea indicației ampermetrelor de c.c. prin metoda comparației, unde  $A_0$  este ampermetrul etalon, iar  $A_v$  este ampermetrul ce se verifică. Ampermetrele de c.a. se verifică prin metoda comparației conform schemei din fig. 13-6, *a* în cazul alimentării directe și conform schemei din fig. 13-6, *b* în cazul alimentării prin transformator.

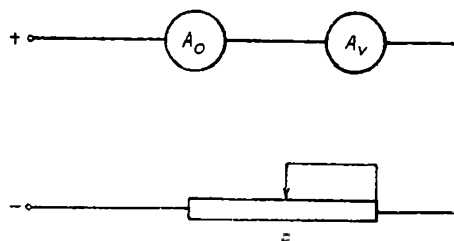


Fig. 13-5. Schema de verificare prin comparație a ampermetrelor de c.c.

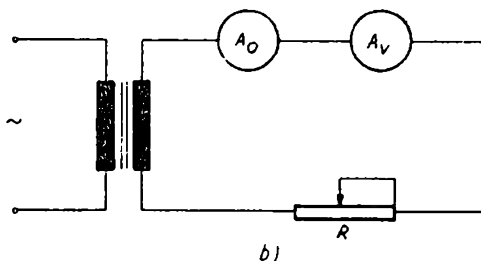
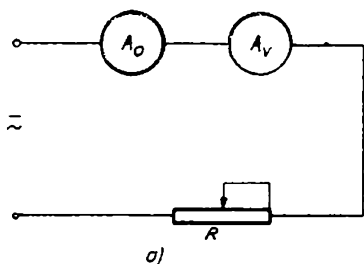


Fig. 13-6. Schema de verificare prin comparație a ampermetrelor de c.a. :  
*a* — legarea directă; *b* — legarea prin transformator de curent.

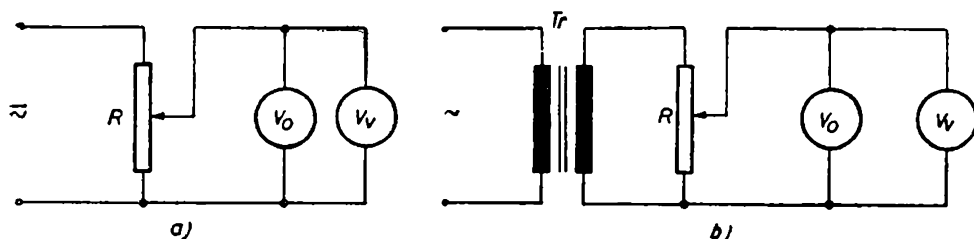


Fig. 13-7. Schema de verificare prin comparație a voltmetrelor :  
a — legarea directă; b — legare prin transformator de tensiune.

Verificarea prin comparație a indicației voltmetrelor se face folosind schema de montaj din fig. 13-7, a în cazul alimentării directe (c.c. și c.a.), respectiv folosind schema de montaj din fig. 13-7, b în cazul alimentării prin transformator (c.a.).

### 13.4. VERIFICAREA CONTOARELOR DE ENERGIE ELECTRICĂ

Verificarea contoarelor de măsurare a energiei electrice nou fabricate, în uz sau reparate constă din :

- verificarea stării generale și a construcției;
- verificarea lucrărilor de reparație sau revizie;
- verificarea funcționării;
- verificarea dispozitivelor auxiliare (mecanismul indicatorului de putere maximă, relee etc.).

În cele ce urmează, se fac referiri numai la verificarea funcționării contoarelor, care constă în a verifica indicația, respectiv constanta contorului.

Pentru verificarea funcționării unui contor de energie electrică se folosesc următoarele metode :

- verificarea vitezei de rotație a discului contorului cu wattmetrul și cronometrul etalon;
- verificarea prin comparație cu un contor etalon.

Înainte de începerea operației de verificare a indicației contoarelor, acestea trebuie să se afle timp de 45 min sub tensiunea și curentul nominal, la  $\cos \varphi = 1$  în cazul contoarelor de energie activă și  $\sin \varphi = 1$  în cazul contoarelor de energie reactivă.

Instalațiile de verificare a contoarelor sînt prevăzute cu circuite separate pentru curent și pentru tensiune, fiecare circuit avînd reglaj independent.

**Verificarea cu wattmetrul și cronometrul etalon.** În fig. 13-8 este reprezentată schema de verificare a unui contor monofazat folosind wattmetrul și cronometrul etalon.

Pentru asigurarea preciziei necesare trebuie urmărit ca variația sarcinii contoarelor în timpul verificării să nu întreaacă  $\pm 0,5\%$ . Dacă sursa de alimentare a instalației de verificare nu asigură îndeplinirea acestei condiții, atunci verificarea trebuie făcută de către doi operatori, unul urmînd să numere rotațiile discului, iar celălalt să urmărească indicațiile wattmetrului etalon și să mențină sarcina la o valoare, pe cît este posibil, constantă. Dacă oscilațiile



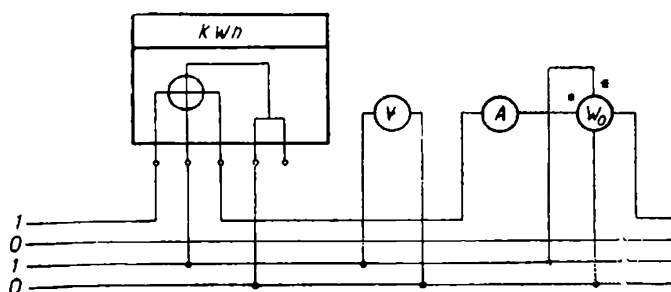


Fig. 13-8. Schema de verificare a unui contor monofazat.

sarcinii sînt de asemenea natură încît operatorul care o reglează nu poate să mențină variații ale sarcinii față de valoarea fixată mai mici ca  $\pm 1,5\%$ , atunci va trebui să renunțe la metoda de verificare wattmetru-cronometru etalon.

Erorile de indicație ale contoarelor se obțin ca rezultat a cel puțin două citiri la cronometru pentru fiecare sarcină. Aceasta se poate realiza fie prin urmărirea repetată a rotațiilor discului și folosirea în acest caz a unui singur cronometru sau prin folosirea a două cronometre pentru urmărirea o singură dată a rotațiilor discului la o anumită sarcină. Ca valoare reală a timpului de rotație pentru o sarcină dată se ia media aritmetică a citirilor obținute la cronometru, medie în care nu se includ citirile care dau valori mult prea diferite și care sînt cel mai adesea cauzate de greșeli în numărarea rotațiilor.

În cazul în care valoarea erorii obținute ca rezultat al două citiri la cronometru este foarte apropiată de valoarea erorii limită, atunci este necesar să se efectueze în mod suplimentar încă două citiri la sarcina respectivă și să se ia pentru eroare valoarea care rezultă din media aritmetică a celor patru determinări.

Calculul erorii contorului de verificat în cazul folosirii metodei wattmetru-cronometru etalon se efectuează cu ajutorul următoarei relații de bază :

$$\Delta \% = \frac{W_1 - W}{W} 100, \quad (13-6)$$

în care :

$\Delta$  este eroarea relativă a indicațiilor contorului exprimată în procente ;

$W_1$  — valoarea energiei electrice determinată după indicațiile contorului de verificat ;

$W$  — valoarea reală (adevărată) a energiei electrice determinată după indicațiile aparatelor etalon.

În locul relației (13-6) se poate folosi pentru ușurarea calculelor relația :

$$\Delta \% = \frac{t_c - t}{t} 100, \quad (13-7)$$

în care :

$t_c$  este așa-numitul timp normal (calculat) pentru contorul dat, adică numărul de secunde în care discul ar trebui să execute în mod corect  $N$  rotații la sarcina dată ;

$t$  — indicația cronometrului.

Timpul normal se calculează cu ajutorul relației :

$$t_c = \frac{CN}{P}, \quad (13-8)$$

în care :

$P$  este sarcina contorului în wați ;

$C$  — constanta contorului în wattsecunde pentru o rotație a discului ;

$N$  — numărul de rotații pentru fiecare sarcină, care se alege în așa fel încît timpul corespunzător  $t_c$  să nu fie mai mic de 50 s.

Constanta contorului în wattsecunde pe rotație, se calculează pe baza constantei înscrise pe plăcuța contorului.

**Verificarea prin comparație cu indicațiile unui contor etalon.** Tipul și modul de conectare al contorului etalon trebuie să corespundă tipului și modului de conectare al contorului de verificat.

Contoarele etalon trebuie folosite numai la acei curenți și tensiuni pentru care se garantează funcționarea lor corectă. Pentru extinderea limitelor lor de măsurare, contoarele etalon pot fi conectate prin transformatoare de măsurare.

Contorul etalon este pus în funcțiune în momentul cînd se începe numărarea rotațiilor discului contorului de verificat și se deconectează în momentul încetării numărării. Indicațiile contorului etalon se înregistrează cu o precizie mergînd pînă la 0,01 rotații.

Pînă la începerea numărării rotațiilor la discul contorului de verificat, contorul etalon trebuie să se găsească sub sarcină de cel puțin 15 min.

Timpul de numărare a rotațiilor la contorul de verificat se alege în așa fel încît, în acest interval, discul contorului etalon să execute cel puțin 5 rotații în cazul contoarelor de verificare de clasa 2 și cel puțin 8 pentru contoare de clase superioare de precizie.

Pentru fiecare valoare a sarcinii este necesar să se efectueze cel puțin 2 citiri la contorul etalon, urmînd ca pentru calculul erorii să se ia media aritmetică a tuturor citirilor, cu excepția acelor care prezintă abateri importante de la valoarea medie.

La verificarea prin comparație cu indicațiile unui contor etalon, eroarea contorului de verificat se calculează cu relația :

$$\Delta \% = \frac{N_2 K_1 - N_1 K_2}{N_1 K_2} 100, \quad (13-9)$$

unde :

$N_1$  este numărul de rotații ale contorului etalon ;

$N_2$  — numărul de rotații ale contorului de verificat ;

$K_1$  — constanta contorului etalon exprimată în rot/kWh ;

$K_2$  — constanta contorului de verificare exprimată în rot/kWh.

În cazul în care conectarea contorului etalon se face prin intermediul unor transformatoare de măsurare, relația pentru calculul erorii contorului de verificat devine :

$$\Delta \% = \frac{N_2 K_3 - N_1 K_2}{N_1 K_2} 100, \quad (13-10)$$

unde :

$$K_3 = \frac{I_s}{I_p} \cdot \frac{U_s}{U_p} \cdot K_1 \quad (13-11)$$

$\frac{I_p}{I_s}$  reprezintă raportul de transformare al transformatorului de măsurare de curent ;

$\frac{U_p}{U_s}$  reprezintă raportul de transformare al transformatorului de măsurare de tensiune.

În afară de cele arătate mai sus privind verificarea indicației (erorii) contoarelor, se mai efectuează și următoarele încercări :

— deconectînd circuitul bobinelor de curent și aplicînd succesiv tensiuni egale cu 80% ... 110% din tensiunea nominală, sistemul mobil trebuie să rămînă nemișcat ;

— la un curent de cel mult 5% din curentul nominal discul trebuie să înceapă a se roti.

Pentru cunoașterea condițiilor de verificare a altor tipuri de instrumente și aparate electrice, se recomandă consultarea instrucțiunilor elaborate în acest sens de Institutul de Metrologie.

## BIBLIOGRAFIE

1. Andronescu P.I. *Bazele electrotehnicii*. București, Editura didactică și pedagogică 1972.
2. Răduleț R. *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. București, Litografia învățămîntului, 1955—1956.
3. Nicolau E., Belîș M. *Măsurări electrice și electronice*. București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
4. Bogoevici N., Heler A. *Electrotehnică și mașini electrice*. Institutul Politehnic Timișoara, 1969.
5. Crișan S., Stoica V. *Măsurări electrice* (curs pentru subingineri). Institutul Politehnic „Traian Vuia” Timișoara, 1972.
6. Daba D., Constantin E. *Electrotehnică*. Institutul Politehnic „Traian Vuia” Timișoara, 1973.
7. Dimboiu E., Saal C., Szabo W. *Electrotehnică și mașini electrice*. București, Editura didactică și pedagogică, 1973.
8. Ilioniu N., Ivanovici Gh. *Memorator de metrologie*. București, Editura tehnică, 1966.
9. Pop E., Chivu M. *Măsurări electrice și magnetice*. Institutul Politehnic Timișoara, 1969.
10. Pop E. *Metode și aparate de măsură numerice*. Institutul politehnic „Traian Vuia” Timișoara, 1972.
11. Preda M., Hortopan V. *Electrotehnică și măsurări electrice*. București, Editura didactică și pedagogică, 1967.
12. Preda M., Sonea P., Manea Fl., Cristea P., Spinei F., Gavrila H., Petru V. *Electrotehnică*. București, Editura didactică și pedagogică, 1974.
13. Șora C., De Sabata I., Constantin E., Lăpușan V., Dobre S., Daba D., Grün U. *Bazele electrotehnicii. Probleme*. Institutul politehnic „Traian Vuia” Timișoara, 1971.
14. \* \* \* *Lexiconul Tehnic Român*.
15. Ciorăscu F., Spinulescu I. *Măsurări electrice și electronice*. Editura didactică și pedagogică, București, 1973.
16. Clyde N. Herrich. *Instruments and Measurements for Electronics*. Mc Graw-Hill Book Company, 1972.

## SISTEMUL DE UNITĂȚI MKSA

În Republica Socialistă România este legiferată obligativitatea folosirii sistemului de unități internațional (SI) care, pentru domeniul electromagnetismului, are denumirea de sistemul MKSA (raționalizat).

Tabela I-1

Denumirile și modul de definire a unor unități MKSA

Denumirea și simbolul mărimii	Unitatea de măsură	Definirea unității de măsură
1	2	3
Lungimea ( $l, d$ )	Metru [m] Unitate fundamentală	STAS 737-49
Masa ( $m$ )	Kilogramul [kg] Unitate fundamentală	STAS 737-49
Timpul ( $t$ )	Secunda [s] Unitate fundamentală	STAS 737-49
Curentul electric ( $i, I$ )	Amperul [A] Unitate fundamentală	Curentul constant care, menținut în două conductoare, paralele, rectilinii, de lungime practic infinită și de secțiune circulară neglijabilă, așezate în vid la o distanță de 1 m unul de altul, produce între acești conductori o forță de $2 \cdot 10^{-7}$ newtoni pe metru de lungime
Forța ( $F$ )	Newton [N]	Forța ce imprimă masei de 1 kg o accelerație de $1 \text{ m/s}^2$
Energia ( $W$ )	Joule [J]	Lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 N al cărui punct de aplicație se deplasează cu 1 m în direcția și sensul forței
Puterea ( $P$ )	Watt [W]	Energia de 1 J dezvoltată uniform timp de 1 s
Sarcina electrică ( $Q, q$ )	Coulomb [C]	Cantitatea de sarcină electrică transportată de un curent constant de 1 A timp de 1 s
Potențialul electric și tensiunea electrică ( $V, U$ )	Volt [V]	Tensiunea electrică între două puncte ale unui conductor prin care trece un curent constant de 1 A, când puterea disipată între aceste două puncte este de 1 W

Tabela I-1 (continuare)

1	2	3
Intensitatea cîmpului electric ( $E$ )	Volt pe metru [V/m]	Intensitatea cîmpului electric care determină o forță de 1 N asupra unei sarcini electrice punctiforme de 1 C
Capacitatea electrică ( $C$ )	Farad [F]	Capacitatea unui condensator electric care fiind încărcat cu sarcina electrică de 1 C determină o tensiune de 1 V între armăturile lui
Rezistență electrică ( $R$ )	Ohm [ $\Omega$ ]	Rezistența electrică între două puncte ale unui conductor, cînd o tensiune constantă de 1 V aplicată între aceste două puncte, produce în conductor un curent de 1 A, conductorul nefiind sediul altor tensiuni electromotoare.
Fluxul magnetic ( $\Phi$ )	Weber [Wb]	Fluxul inducției magnetice care, străbătînd aria unei spire, produce în acea spiră o tensiune electromotoare de 1 V, cînd fluxul scade liniar la zero în timp de 1 s
Inducția magnetică ( $B$ )	Tesla [T] Weber pe metru patrat [Wb/m <sup>2</sup> ]	Inducția magnetică a unui cîmp magnetic uniform care produce un flux magnetic de 1 Wb printr-o suprafață normală de 1 m <sup>2</sup>
Intensitatea cîmpului magnetic ( $H$ )	Amper-spiră pe metru [AS/m]	Intensitatea cîmpului magnetic în centrul unei spire circulare avînd diametrul de 1 m și fiind străbătută de curentul de 1 A
Tensiune magnetomotoare ( $U_m$ )	Amper-spiră [AS]	Tensiunea magnetomotoare produsă de o spiră parcursă de curentul de 1 A
Inductanța ( $L$ )	Henry [H]	Inductanța unei spire parcursă de curentul de 1 A care produce prin aria spirei un flux magnetic de 1 Wb
Permitivitatea vidului ( $\epsilon_0$ )	Farad pe metru [F/m]	Constantă universală $\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi 9 \cdot 10^9} \text{ [F/m]}$
Permeabilitatea vidului ( $\mu_0$ )	Henry pe metru [H/m]	Constantă universală $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]}$

Pe lângă unitățile specifice sistemului MKSA, este tolerată folosirea în practică și a altor unități, multipli sau submultipli ai unităților de bază, sau alte unități necoerente. De exemplu, densitatea curentului electric să măsoară, obișnuit, în A/mm<sup>2</sup>, în practica curentă energia activă se măsoară cu unitatea necoerentă kilowatt-ora (1 kWh=10<sup>3</sup> · 3 600 J)

## INSTRUMENTE ELECTRICE DE MĂSURARE FABRICATE ÎN R.S.R.

Industria electrotehnică în plină dezvoltare din Republica Socialistă România realizează utilaje și instalații de mare complexitate și cu performanțe superioare, necesare în numeroase sectoare ale economiei. Acestei industrii îi revine și rolul de a produce instrumente și aparate electrice de măsurare atât pentru echiparea unor mașini și instalații, cât și pentru măsurări de precizie tot mai ridicată în laboratoare și în procesul de producție. În acest sens, au fost înființate și au intrat în funcțiune unități specializate pentru producerea de aparate de măsurare și control ca : I.A.E.M.I. București, I.A.E.M. Timișoara, I.R.M.E. București etc,

Tabela II-1

Denumirile și caracteristicile unor instrumente și aparate electrice de măsurare fabricate în țară

Nr. de ord.	Denumirea	Caracteristici	Clasa de precizie
1	2	3	4
1	Instrumente magnetoelectrice de tablou, tip M.	Ampermetre, minim 1 mA. Voltmetre, maxim 1 000 V.	1,5 ; 2,5
2	Instrumente electromagnetice de tablou, tip E.	Ampermetre, minim 600 mA Voltmetre, maxim 600 V.	1,5 ; 2,5
3	Instrumente de măsurare portabile electromagnetice, tip AP, VP, VAP.	Ampermetre : 0,2 ; 1 ; 5 ; 6 ; 20 ; 30 A. Voltmetre : 30 ; 75 ; 150 ; 250 ; 300 ; 500 ; 600 V.	1
4	Megohmmetre tranzistorizate, MT.	0...100 MΩ ; 500 V ; 1 000 V. 0...1 000 MΩ ; 2 500 V.	2,5
5	Aparat pentru măsurarea rezistenței prizelor de pământ, tip APP-2.	1...1 000 Ω	5
6	Wattmetru ferodinamic, tip D 4.	0...3 kW	2,5
7	Trusă de curent, TC-12.	100...1 200 A ; 1 000 VA ; 50 Hz. 5...440 A ; 100 VA ; 50 Hz	2,5
8	Trusă pentru încercarea izolației, TCS-2.	0...2 kV ; 100 mA ; 50 Hz	
9	Clește ampermetric de joasă și de înaltă tensiune (CAJT, CAIT).	0...600 A ; 50 Hz. 0...1 000 A ; 10 kV ; 50 Hz.	5

*Tabela II-1 (continuare)*

1	2	3	4
10	Voltmetre electronice, tip E-0402, E-0401.	10 $\mu$ V...100 V (c.c.); 100 mV...1 000 V (c.c.); 100 mV...300 V (c.a).	2,5
11	Multimetre numerice, tip E-0302.	Tensiuni continui 0,2...100 V; Tensiuni alternative 0,2...350 V; Curenți 0,2...100 mA; Rezistențe 0,2...200 k $\Omega$ .	
12	Frecvențmetru electronic tip E-0203.	10 Hz...20 MHz.	
13	Numărător universal tip E-0202.	10 <sup>7</sup> impulsuri; 0...20 MHz.	
14	Punte RLC, tip E-0704.	0,5...105 M $\Omega$ ; 1 pF...1 050 $\mu$ F; 50 $\mu$ H...105 H.	
15	Punți Wheatstone de precizie.	10 <sup>-2</sup> ...10 <sup>7</sup> $\Omega$ .	0,05 0,1
16	Punte Schering cu brațe cuplate inductiv, PSBI	0,01...1,11 pF; tg $\delta$ =10 <sup>-5</sup> ...1.	
17	Teslametru cu sondă Hall, TSH.	0,1...1,2 T.	2,5
18	Galvanometru cu ac indicator.	(1...3)·10 <sup>-7</sup> A/div.	
19	Contoare electrice monofazate și trifazate (CAM, CA)	240 V; 2,5...15 A. 3×380/220 V; 5; 10; 20 A.	2

Tiraj: 11 400+S.P. 80 exemplare legate. Coli de tipar: 26,25. Hîrtia: Scris I-A. Format: 70×100-44,1. Bun de tipar: 21.XI.1978.  
Nr. plan 5748. Ediția 1979.

Întreprinderea Poligrafică „Banat”  
Timișoara, Calea Aradului nr. 1.  
Republica Socialistă România.

Comanda nr. 147.







Lei 17,10